УДК 517.925.51

Ю. Ю. Клевцова

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассматривается одна характеристика асимптотической устойчивости нулевого решения линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Предлагается способ вычисления этой характеристики. На его основе был разработан алгоритм численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Введение

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — T-периодическая матрица размера $N \times N$, непрерывная по Липшицу, т. е.

$$A(t+T) = A(t), \quad \|A(t) - A(s)\| \leq M|t-s|, \tag{2}$$

$\|\cdot\|$ — спектральная норма.

Хорошо известно, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы монодромии системы (1) принадлежат единичному кругу $\gamma = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ (см., например, [1; 2]). Однако задача нахождения собственных значений неэрмитовых матриц с точки зрения теории возмущений является плохо обусловленной задачей (см., например, [3; 4]). Отсутствие в общем случае формулы для матриканта системы (1) дополнительно затрудняет на практике использование спектрального критерия, поскольку мы вначале должны построить приближение к матрице монодромии, а затем исследовать спектральные свойства этой приближенной матрицы. Поэтому при решении конкретных задач кроме спектральных критериев желательно использовать и другие критерии. В работе [5] был получен следующий критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), формулируемый в терминах разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова.

Теорема 1. 1. *Если нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво, то для любой матрицы C существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T), \end{cases} \tag{3}$$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 60–80

при этом если $C = C^* > 0$, *то* $H(t) = H^*(t) > 0$, $\quad t \in [0, T]$.

2. *Если при* $C = C^* > 0$ *краевая задача* (3) *имеет эрмитово решение* $H(t)$ *такое, что* $H(0) > 0$, *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Пусть нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. В работе [5] была установлена следующая оценка скорости сходимости к нулю при $t \to \infty$ произвольного решения этой системы:

$$\|y(t)\|^2 \leq 2a \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds\right) \|H(0)\| \|y(0)\|^2, \quad t \geq 0,$$

где $a = \max\limits_{t \in [0,T]} \|A(t)\|$, под матрицей $H(t)$ при $t > T$ мы понимаем T-периодическое продолжение положительно определенного решения краевой задачи (3), когда $C = I$ — единичная матрица. Из этой оценки в силу T-периодичности $H(t)$ следует, что скорость убывания решений системы (1) оценивается интегральными средними

$$\theta = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \|H(t)\| \, dt \quad \text{или} \quad \theta_1 = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \frac{1}{\|H(t)\|} \, dt,$$

а оценка амплитуды решения определяется нормой $\|H(0)\|$. В работе [6] указано также, что интегральное среднее θ_1 позволяет оценивать скорость убывания решения при $t \to \infty$ квазилинейных систем

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0,$$

где $\varphi(t, y)$ — гладкая вектор-функция, $\varphi(t, 0) = 0$, и оценивать области притяжения нулевого решения этих систем. Поэтому в качестве числовой характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) можно рассмотреть величину

$$\varkappa = 2a \max\bigl\{\|H(0)\|, \theta\bigr\}. \tag{4}$$

Отметим, что в случае систем с постоянными коэффициентами, когда $A(t) \equiv A$, число $\varkappa$ совпадает с параметром устойчивости, введенным в [7; 8]:

$$\varkappa = 2\|A\|\|H\|,$$

где $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I.$$

В работе [9] был предложен предварительный алгоритм для приближенного вычисления характеристики (4). В настоящей работе, опираясь на эти результаты, мы даем модификацию алгоритма для проведения численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения линейных систем с периодическими коэффициентами.

Следует отметить, что предлагаемый алгоритм является некоторым аналогом алгоритма из [7; 8], разработанного для случая дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В соответствии с подходом из этих работ, результатом численных расчетов является либо утверждение об асимптотической устойчивости нулевого решения исследуемой системы, при этом указывается верхнее ограничение для характеристики (4), либо утверждение, что указанная характеристика превышает некоторое заданное значение, и делается вывод о практической неустойчивости нулевого решения исследуемой системы.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук Г. В. Демиденко за постановку задач и внимание к работе и канд. физ.-мат. наук И. И. Матвеевой за полезные дискуссии.

§ 1. Алгоритм приближенного вычисления характеристики (4). Оценка скорости сходимости приближений

В этом параграфе мы кратко напомним основные формулы, оценки и теоремы из работы [9], касающиеся способа построения приближений к характеристике (4), а также внесем в этот способ ряд изменений, которые значительно повысят его быстродействие.

Будем полагать, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Характеристика (4) представляет собой величину, зависящую от решения $H(t)$ краевой задачи (3) (всюду $C = I$, где I — единичная матрица). Поэтому вначале мы опишем способ построения приближений к $H(t)$ в точках

$$t_p = p\frac{T}{m} = p\tau, \quad p = 0, 1, \dots, m-1,$$

с четными номерами равномерного разбиения отрезка $[0, T]$ на m частей с шагом τ (будем полагать, что m — четное). Этот способ будет основан на построении приближений к интегралу, который дает явную формулу решения [5],

$$H(t) = \int\limits_0^\infty (Y^{-1}(t))^* Y^*(\xi + t) Y(\xi + t) Y^{-1}(t)\, d\xi, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

где $Y(t)$ — матрицант системы (1) в точках t_{2l}, $l = 0, 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$.

Как известно, в общем случае формулы для матрицанта $Y(t)$ системы (1) не существует, поэтому сначала построим для него приближения. Для этого в [9] рассматривалась линейная система

$$\frac{dy}{dt} = A_\tau(t) y, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

где $A_\tau(t)$ — кусочно-постоянная матрица:

$$A_\tau(t) = A(t_p + \frac{1}{2}\tau) = A_p \quad \text{при} \quad t_p \leq t \leq t_{p+1}, \ \ p = 0, 1, \dots, m-1,$$

$A_\tau(t)$ продолжается на всю полуось $t \geq 0$ периодически. В [9] матрицант $Y(t)$ системы (1) приближался матрицантом $Y_\tau(t)$ системы (6), который сходится к $Y(t)$ равномерно на $[0, T]$ при $\tau \to 0$:

$$Y_\tau(t) \to Y(t), \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Из сходимости (7) следует, что собственные значения матрицы монодромии для системы (6) стремятся к собственным значениям матрицы монодромии для системы (1) при $\tau \to 0$. Поэтому, начиная с некоторого τ_0, в силу спектрального критерия асимптотической устойчивости все собственные значения матрицы монодромии для системы (6) также, как и для системы (1), будут находиться внутри единичного круга γ. А это означает по теореме 1 и формуле (5) сходимость интеграла

$$H_\tau(t) = \int\limits_0^\infty (Y_\tau^{-1}(t))^* Y_\tau^*(\xi+t) Y_\tau(\xi+t) Y_\tau^{-1}(t)\, d\xi, \tag{8}$$

который является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H_\tau + H_\tau A_\tau(t) + A_\tau^*(t) H_\tau = -I, \quad 0 < t < T, \\ H_\tau(0) = H_\tau(T). \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что теорема 1 и формула (5) остаются, как непосредственно вытекает из [5], справедливыми для кусочно-постоянных коэффициентов системы (6).

Можно показать, что имеет место равномерная сходимость при $\tau \to 0$

$$H_\tau(t) \to H(t), \quad t \in [0, T].$$

Поэтому в качестве приближенного значения интеграла $H(t)$ можно рассмотреть интеграл $H_\tau(t)$ при достаточно малых $\tau > 0$.

Приближенное вычисление интеграла $H_\tau(t_{2l})$ (в дальнейшем, если не оговорено значение l, то считаем l — произвольным целым числом от 0 до $\frac{m}{2} - 1$) мы проводили по аналогии с алгоритмом вычисления матричного интеграла Ляпунова, описанного в монографии [7]. А именно, в качестве приближений к интегралу $H_\tau(t_{2l})$ рассматривались матрицы

$$H_\tau^k(t_{2l}) = \int\limits_0^{2^k T} (Y_\tau^{-1}(t_{2l}))^* Y_\tau^*(\xi + t_{2l}) Y_\tau(\xi + t_{2l}) Y_\tau^{-1}(t_{2l})\, d\xi \tag{10}$$

и в [9] было показано, что для приближений $H_\tau^k(t_{2l})$ при $l = 0$ выполняются рекуррентные формулы

$$H_\tau^k(0) = H_\tau^{k-1}(0) + B_{k-1}^* H_\tau^{k-1}(0) B_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

где

$$B_k = B_{k-1}^2, \quad B_0 = Y_\tau(T). \tag{12}$$

Эти рекуррентные формулы позволяют эффективно вычислить приближение $H_\tau^k(0)$ при заданном k через матрицу B_0 и начальное приближение $H_\tau^0(0)$. Аналогичные рекуррентные формулы в [9] были показаны и для остальных приближений $H_\tau^k(t_{2l})$ при $l > 0$. В настоящей работе чуть позже мы приведем новые рекуррентные формулы для приближений $H_\tau^k(t_{2l})$ при $l > 0$, которые позволят нам сразу при заданном k вычислить эти приближения через уже посчитанное по формуле (11) приближение $H_\tau^k(0)$. Таким образом, значительно повысится скорость вычисления. Отметим, что в [9] матрицу B_0 мы находили по легко проверяемой явной формуле

$$Y_\tau(T) = e^{\tau A_{m-1}} e^{\tau A_{m-2}} \ldots e^{\tau A_0}$$

(алгоритм вычисления $e^{\tau A_j}$ см., например, в [10; 11]). А для начального приближения $H_\tau^0(0)$ ниже мы предложим более быстродействующий, чем в [9], способ вычисления.

В качестве приближения к интегралу $H^0_\tau(0)$ рассмотрим сумму

$$\widehat{H}^0_\tau(0) = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1} Y^*_\tau(t_{2n+1}) Y_\tau(t_{2n+1}) \cdot 2\tau. \tag{13}$$

Введем обозначения для $l = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1$

$$\widehat{H}^0_\tau(t_{2l}) = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1} \left(Y^{-1}_\tau(t_{2l})\right)^* Y^*_\tau(t_{2(n+l)+1}) Y_\tau(t_{2(n+l)+1}) Y^{-1}_\tau(t_{2l}) \cdot 2\tau, \tag{14}$$

которые мы будем рассматривать в качестве приближений к интегралам $H^0_\tau(t_{2l})$, $l = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1$. Получим оценку скорости сходимости приближений $\widehat{H}^0_\tau(t_{2l})$ к интегралу $H^0_\tau(t_{2l})$.

Теорема 2. *Пусть матричная последовательность $\{S_j\}$ такова, что ряд*

$$\sum_{j=0}^{\infty} S^*_j H^0_\tau(t_{2l}) S_j \tag{15}$$

сходится. Тогда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} S^*_j \widehat{H}^0_\tau(t_{2l}) S_j \tag{16}$$

сходится и для любого τ такого, что

$$\Delta < 1, \tag{17}$$

где

$$\Delta = \frac{e^{2a\tau} - 2a\tau - 1}{2a\tau}, \tag{18}$$

$a = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$, *выполняется оценка*

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} S^*_j \widehat{H}^0_\tau(t_{2l}) S_j - \sum_{j=0}^{\infty} S^*_j H^0_\tau(t_{2l}) S_j \right\| \le \frac{\Delta}{1-\Delta} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} S^*_j H^0_\tau(t_{2l}) S_j \right\|. \tag{19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l = 0$. Для $l > 0$ доказательство аналогично.

Нетрудно показать, что для матрицанта системы (6) выполняется формула

$$Y_\tau(t) = e^{(t-t_p)A_p} e^{\tau A_{p-1}} \ldots e^{\tau A_0} \tag{20}$$

при $t_p \le t \le t_{p+1}$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$. Поэтому в силу (10) и (13) имеем

$$\int_0^T Y^*_\tau(\xi) Y_\tau(\xi) d\xi - \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1} Y^*_\tau(t_{2n+1}) Y_\tau(t_{2n+1}) \cdot 2\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1} Y^*_\tau(t_{2n+1}) \Big(\int_0^\tau e^{-sA^*_{2n}} e^{-sA_{2n}}\, ds + \int_0^\tau e^{sA^*_{2n+1}} e^{sA_{2n+1}} ds - 2\tau I \Big) Y_\tau(t_{2n+1}).$$

А отсюда непосредственно вытекает, что для любого вектора v верно неравенство

$$\Big|\Big\langle\big(S_j^*\widehat{H}_\tau^0(0)S_j - S_j^*H_\tau^0(0)S_j\big)v,v\Big\rangle\Big| \le \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\Big\|\int\limits_0^\tau e^{-sA_{2n}^*}e^{-sA_{2n}}ds-\tau I\Big\| +$$

$$+\Big\|\int\limits_0^\tau e^{sA_{2n+1}^*}e^{sA_{2n+1}}ds-\tau I\Big\|\Big)\times\Big|Y_\tau(t_{2n+1})S_jv\Big|^2,\quad j=0,1,2,\ldots.$$

Далее оценим величину

$$\Big\|\int\limits_0^\tau e^{-sA_{2n}^*}e^{-sA_{2n}}\,ds-\tau I\Big\|,\quad n=0,1,\ldots,\frac{m}{2}-1.$$

Так как для любого вектора u выполнены оценки

$$\Big\langle\Big(\int\limits_0^\tau e^{-sA_{2n}^*}e^{-sA_{2n}}\,ds-\tau I\Big)u,u\Big\rangle = \int\limits_0^\tau\Big(|e^{-sA_{2n}}u|^2-|u|^2\Big)\,ds \le$$

$$\le\int\limits_0^\tau\big(e^{2as}-1\big)\,ds|u|^2=\tau\Delta|u|^2$$

и

$$\int\limits_0^\tau\big(|e^{-sA_{2n}}u|^2-|u|^2\big)\,ds\ge\int\limits_0^\tau\big(e^{-2as}-1\big)\,ds|u|^2\ge-\tau\Delta|u|^2,$$

то

$$\Big\|\int\limits_0^\tau e^{-sA_{2n}^*}e^{-sA_{2n}}ds-\tau I\Big\|\le\tau\Delta.$$

Аналогично доказывается оценка

$$\Big\|\int\limits_0^\tau e^{sA_{2n+1}^*}e^{sA_{2n+1}}ds-\tau I\Big\|\le\tau\Delta.$$

Поэтому

$$\Big|\Big\langle\big(S_j^*\widehat{H}_\tau^0(0)S_j-S_j^*H_\tau^0(0)S_j\big)v,v\Big\rangle\Big|\le\Delta\Big\langle\Big(S_j^*\widehat{H}_\tau^0(0)S_j\Big)v,v\Big\rangle,\quad j=0,1,2,\ldots.$$

В силу сходимости ряда (15), положительной определенности матрицы $H_\tau^0(0)$ сходится ряд (16). Тогда

$$\Big|\Big\langle\big(\sum_{j=0}^\infty S_j^*\widehat{H}_\tau^0(0)S_j-\sum_{j=0}^\infty S_j^*H_\tau^0(0)S_j\big)v,v\Big\rangle\Big|\le\Delta\Big\langle\Big(\sum_{j=0}^\infty S_j^*\widehat{H}_\tau^0(0)S_j\Big)v,v\Big\rangle.$$

Отсюда

$$\Big\|\sum_{j=0}^\infty S_j^*\widehat{H}_\tau^0(t_{2l})S_j-\sum_{j=0}^\infty S_j^*H_\tau^0(t_{2l})S_j\Big\|\le\Delta\Big\|\sum_{j=0}^\infty S_j^*\widehat{H}_\tau^0(t_{2l})S_j\Big\|. \tag{21}$$

В силу (17) получим оценку (19).

Теорема доказана.

При расчетах лучше использовать чуть более грубую оценку.

Следствие 1. *Пусть матричная последовательность $\{S_j\}$ такова, что ряд* (15) *сходится. Тогда сходится ряд* (16), *и для любого τ такого, что*

$$\Delta \le 0{,}5\,, \tag{22}$$

где Δ определена в (18), *выполняется оценка*

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty} S_j^* \widehat{H}_\tau^0(t_{2l}) S_j - \sum_{j=0}^{\infty} S_j^* H_\tau^0(t_{2l}) S_j\Big\| \le 2\Delta \Big\|\sum_{j=0}^{\infty} S_j^* H_\tau^0(t_{2l}) S_j\Big\|.$$

Отсюда вытекает следующая оценка скорости сходимости приближений $\widehat{H}_\tau^0(t_{2l})$ к интегралу $H_\tau^0(t_{2l})$.

Следствие 2. *Если τ удовлетворяет неравенству* (22), *то*

$$\big\|\widehat{H}_\tau^0(t_{2l}) - H_\tau^0(t_{2l})\big\| \le 2\Delta \big\|H_\tau^0(t_{2l})\big\|.$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$H_\tau^k(t_{2l}) = \sum_{j=0}^{2^k-1} (Y_\tau(t_{2l}) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l}))^* H_\tau^0(t_{2l}) Y_\tau(t_{2l}) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l}), \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

которое нетрудно показать, используя равенство (см., например, [12])

$$Y_\tau(s+qT) = Y_\tau(s) Y_\tau^q(T), \quad 0 \le s < T, \tag{24}$$

q — натуральное число. Поскольку мы приблизили интегралы (10) при $k=0$ суммами (13) и (14), то целесообразно в качестве приближения к интегралу $H_\tau^k(t_{2l})$ рассмотреть матрицы

$$\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) = \sum_{j=0}^{2^k-1} (Y_\tau(t_{2l}) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l}))^* \widehat{H}_\tau^0(t_{2l}) Y_\tau(t_{2l}) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l}), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{25}$$

Нетрудно показать, что при $l=0$ для матрицы $\widehat{H}_\tau^k(0)$ имеет место рекуррентная формула аналогичная (11):

$$\widehat{H}_\tau^k(0) = \widehat{H}_\tau^{k-1}(0) + B_{k-1}^* \widehat{H}_\tau^{k-1}(0) B_{k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots, \tag{26}$$

где матрицы B_s, $s=0,1,2,\ldots$, определены по формуле (12). А для приближений при $l>0$ далее, как было обещано, мы получим рекуррентную формулу, позволяющую сразу при заданном k вычислить приближения $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ при $l>0$ через найденное уже по формуле (26) приближение $\widehat{H}_\tau^k(0)$. В силу (13), (14) и (25) имеет место

$$\begin{aligned}\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) = \Big(Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big)^* Y_\tau^*(t_{2(l-1)}) \widehat{H}_\tau^k(t_{2(l-1)}) Y_\tau(t_{2(l-1)}) Y_\tau^{-1}(t_{2l}) -{}&\\ - 2\tau\Big(Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big)^* Y_\tau^*(t_{2l-1}) Y_\tau(t_{2l-1}) Y_\tau^{-1}(t_{2l}) +{}&\\ + 2\tau\Big(Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big)^* \Big(Y_\tau^{2^k}(T)\Big)^* Y_\tau^*(t_{2l-1}) Y_\tau(t_{2l-1}) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l}).&\end{aligned}$$

Отсюда и из (20) вытекает рекуррентная формула

$$\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) = e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-2}^*} \widehat{H}_\tau^k(t_{2(l-1)}) e^{-\tau A_{2l-2}} e^{-\tau A_{2l-1}} - 2\tau e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-1}} + \\ + 2\tau B_k(t_{2l})^* e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-1}} B_k(t_{2l}), \quad l = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1, \quad (27)$$

где $B_k(t_{2l}) = Y_\tau(t_{2l}) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t_{2l})$.

Отметим, что, как следует из (20),

$$B_k(t_{2l}) = e^{\tau A_{2l-1}} e^{\tau A_{2l-2}} B_k(t_{2l-2}) e^{-\tau A_{2l-2}} e^{-\tau A_{2l-1}}, \quad l = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1,$$
$$B_k(0) = B_{k-1}^2$$

(алгоритм вычисления $e^{\tau A_j}$ см., например, в [10; 11]).

Используя формулу (27), в силу равенства $H(T) = H(0)$ можно организовать итерационный процесс для вычисления $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ при $l > 0$ таким образом, что он будет начинаться с двух концов отрезка $[0, T]$. Обозначим через $[r]$ целую часть числа r. При $l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{4}\right] - 1$ мы будем вычислять матрицы $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ по рекуррентной формуле

$$\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) = e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-2}^*} \widehat{H}_\tau^k(t_{2(l-1)}) e^{-\tau A_{2l-2}} e^{-\tau A_{2l-1}} - 2\tau e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-1}} + \\ + 2\tau B_k(t_{2l})^* e^{-\tau A_{2l-1}^*} e^{-\tau A_{2l-1}} B_k(t_{2l}), \quad l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{4}\right] - 1, \quad (28)$$

где

$$B_k(t_{2l}) = e^{\tau A_{2l-1}} e^{\tau A_{2l-2}} B_k(t_{2l-2}) e^{-\tau A_{2l-2}} e^{-\tau A_{2l-1}}, \quad l = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{4}\right] - 1,$$
$$B_k(0) = B_{k-1}^2,$$

а при $l = \left[\frac{m}{4}\right], \left[\frac{m}{4}\right] + 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1$ мы будем вычислять матрицы $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ по формуле

$$\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) = e^{\tau A_{2l}^*} e^{\tau A_{2l+1}^*} \widehat{H}_\tau^k(t_{2(l+1)}) e^{\tau A_{2l+1}} e^{\tau A_{2l}} + 2\tau e^{\tau A_{2l}^*} e^{\tau A_{2l}} - \\ - 2\tau B_k(t_{2l})^* e^{\tau A_{2l}^*} e^{\tau A_{2l}} B_k(t_{2l}), \quad l = \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} - 2, \ldots, \left[\frac{m}{4}\right], \quad (29)$$

где

$$B_k(t_{2l}) = e^{-\tau A_{2l}} e^{-\tau A_{2l+1}} B_k(t_{2(l+1)}) e^{\tau A_{2l+1}} e^{\tau A_{2l}}, \quad l = \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} - 2, \ldots, \left[\frac{m}{4}\right],$$
$$B_k(T) = B_k(0),$$

считая $\widehat{H}_\tau^k(T) = \widehat{H}_\tau^k(0)$. Таким образом, вычислив $\widehat{H}_\tau^k(0)$ по формуле (26), из формул (28), (29) мы найдем все остальные приближения $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ для $l > 0$.

Выпишем оценку скорости сходимости приближений $\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})$ к интегралу $H(t_{2l})$.

Теорема 3. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и* τ *удовлетворяет неравенствам* (17) *и*

$$M\tau h < 1, \quad (30)$$

где $h = \max_{t \in [0,T]} \|H(t)\|$. *Тогда выполнена оценка*

$$\left\| H(t_{2l}) - \widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) \right\| \le \Big[M\tau h + \frac{1}{1 - \Delta} \exp\Big(-2^k (1 - M\tau h) \int_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds \Big) +$$

$$+ \frac{\Delta}{1-\Delta}\Big] \frac{1}{1-M\tau h} \|H(t_{2l})\|, \quad l = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1,$$

k — целое неотрицательное число.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 6 из работы [9], учитывая, что выполнена формула (25) и имеет место теорема 2.

Из теоремы 3 и оценки

$$h \le \Big(1 + aT\Big)\varkappa + 0{,}5\,T = \chi, \tag{31}$$

где $a = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$, полученной в [9], вытекает более подходящее к применению на практике простое следствие.

Следствие 3. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и τ удовлетворяет неравенствам* (17) *и*

$$M\tau\chi < 1, \tag{32}$$

где χ определено в (31)*. Тогда выполнена оценка*

$$\Big\|H(t_{2l}) - \widehat{H}^k_\tau(t_{2l})\Big\| \le \Big[M\tau\chi + \frac{1}{1-\Delta}\exp\Big(-2^k(1-M\tau\chi)\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big) +$$

$$+ \frac{\Delta}{1-\Delta}\Big] \frac{1}{1-M\tau\chi} \|H(t_{2l})\|, \quad l = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1,$$

k — целое неотрицательное число.

При расчетах все-таки лучше использовать чуть более грубую оценку.

Следствие 4. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и τ удовлетворяет неравенствам* (22) *и*

$$M\tau\chi \le 0{,}5\,, \tag{33}$$

где χ определено в (31)*. Тогда выполнена оценка*

$$\Big\|H(t_{2l}) - \widehat{H}^k_\tau(t_{2l})\Big\| \le 2\Big[M\tau\chi +$$

$$+ 2\exp\Big(-2^{k-1}\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big) + 2\Delta\Big] \|H(t_{2l})\|, \quad l = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2} - 1,$$

k — целое неотрицательное число.

На этом мы заканчиваем излагать способ построения приближений к $H(t)$ в точках

$$t_p = p\frac{T}{m} = p\tau, \quad p = 0, 1, \ldots, m-1,$$

с четными номерами равномерного разбиения отрезка $[0, T]$ с шагом τ и переходим к способу построения приближений к характеристике (4).

Приближения к характеристике (4) будем строить следующим образом:

$$\widehat{\varkappa}^k_\tau = 2a\max\Big\{\big\|\widehat{H}^k_\tau(0)\big\|,\ \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\big\|\widehat{H}^k_\tau(t_{2l})\big\| \cdot 2\tau\Big\}. \tag{34}$$

В следующей теореме мы укажем скорость сходимости приближений (34) к характеристике (4).

Теорема 4. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и* τ *удовлетворяет неравенству* (17) *и* (30). *Тогда выполнена оценка*

$$\Big|\varkappa - \widehat{\varkappa}_\tau^k\Big| \le \Big[M\tau h + \frac{1}{1-\Delta}\exp\Big(-2^k(1-M\tau h)\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big) + \frac{\Delta}{1-\Delta}\Big] \times$$
$$\times \frac{1}{1-M\tau h}\Big((1+2a\tau)\varkappa + a\tau\Big) + 2a\tau\varkappa + a\tau. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\widehat{\theta}_\tau^k = \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})\Big\|\cdot 2\tau. \quad (36)$$

Напомним, что
$$\theta = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|H(t)\|\,dt.$$

Ниже мы докажем оценку

$$\Big|\theta - \widehat{\theta}_\tau^k\Big| \le \Big[M\tau h + \frac{1}{1-\Delta}\exp\Big(-2^k(1-M\tau h)\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}ds\Big) + \frac{\Delta}{1-\Delta}\Big] \times$$
$$\times \frac{1}{1-M\tau h}\Big((1+2a\tau)\theta + \frac{\tau}{2}\Big) + 2a\tau\theta + \frac{\tau}{2}, \quad (37)$$

из которой в силу теоремы 3 при $l=0$ непосредственно вытекает (35).

Введем обозначение
$$\theta_\tau = \sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\|H(t_{2l})\|\cdot 2\tau.$$

Для доказательства (37) рассмотрим очевидное неравенство

$$\big|\theta - \widehat{\theta}_\tau^k\big| \le |\theta-\theta_\tau| + \big|\theta_\tau - \widehat{\theta}_\tau^k\big| \quad (38)$$

и оценим по очереди каждое из слагаемых в сумме.

Оценим первое слагаемое. Положим, что $H(t) = H(t+T)$ при $-T \le t \le 0$ и $t_{-1} = -\tau$. Тогда поскольку
$$|\,\theta - \theta_\tau| \le \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l+1}}\|H(t)-H(t_{2l})\|\,dt,$$

то

$$|\,\theta-\theta_\tau| \le \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l}}\int\limits_{t}^{t_{2l}}\Big\|\frac{d}{dt}H(s)\Big\|\,ds\,dt + \int\limits_{t_{2l}}^{t_{2l+1}}\int\limits_{t_{2l}}^{t}\Big\|\frac{d}{dt}H(s)\Big\|\,ds\,dt\Big) =$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l}}(s-t_{2l-1})\Big\|\frac{d}{dt}H(s)\Big\|\,ds + \int\limits_{t_{2l}}^{t_{2l+1}}(t_{2l+1}-s)\Big\|\frac{d}{dt}H(s)\Big\|\,ds\Big).$$

В силу того, что $H(t)$ является решением краевой задачи (3) и $H(t) = H(t+T)$, при $-T \le t \le 0$ имеем

$$|\,\theta-\theta_\tau|\le\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l}}(s-t_{2l-1})\Big(2a\|H(s)\|+1\Big)\,ds+$$

$$+\int\limits_{t_{2l}}^{t_{2l+1}}(t_{2l+1}-s)\Big(2a\|H(s)\|+1\Big)\,ds\Big)\le\frac{1}{T}\Big(\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}2a\tau\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l+1}}\|H(s)\|\,ds+$$

$$+\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\int\limits_{t_{2l-1}}^{t_{2l}}(s-t_{2l-1})\,ds+\int\limits_{t_{2l}}^{t_{2l+1}}(t_{2l+1}-s)\,ds\Big)\Big)=2a\tau\theta+\frac{\tau}{2}\,.\qquad(39)$$

Оценку второго слагаемого сразу получим из (39) и теоремы 3:

$$|\,\theta_\tau-\widehat{\theta}^k_\tau|\le\Big[M\tau h+\frac{1}{1-\Delta}\exp\Big(-2^k(1-M\tau h)\int\limits_0^T\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big)+\frac{\Delta}{1-\Delta}\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{1-M\tau h}\Big((1+2a\tau)\,\theta+\frac{\tau}{2}\Big).$$

Учитывая (38) и (39), приходим к (37).

Теорема доказана.

Из теоремы 4 и оценки (31) получаем более подходящее к применению на практике простое следствие.

Следствие 5. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и* τ *удовлетворяет неравенству* (17) *и* (32). *Тогда выполнена оценка*

$$|\varkappa-\widehat{\varkappa}^k_\tau|\le\Big[M\tau\chi+\frac{1}{1-\Delta}\exp\Big(-2^k(1-M\tau\chi)\int\limits_0^T\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big)+\frac{\Delta}{1-\Delta}\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{1-M\tau\chi}\Big((1+2a\tau)\varkappa+a\tau\Big)+2a\tau\varkappa+a\tau,$$

причем

$$\widehat{\varkappa}^k_\tau\le\frac{1}{1-\Delta}\frac{1}{1-M\tau\chi}\Big((1+2a\tau)\varkappa+\frac{\tau}{2}\Big).\qquad(40)$$

Отметим, что оценку (40) нетрудно получить из доказательства теоремы 3, используя очевидное неравенство

$$\big\|H^k_\tau(t_{2l})\big\|\le\|H_\tau(t_{2l})\|,\quad l=0,1,\dots,\frac{m}{2}-1.$$

При расчетах все-таки лучше использовать чуть более грубую оценку.

Следствие 6. *Пусть нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво и* τ *удовлетворяет неравенству* (22) *и* (33). *Тогда выполнена оценка*

$$|\varkappa-\widehat{\varkappa}^k_\tau|\le2\Big[M\tau\chi+2\exp\Big(-2^{k-1}\int\limits_0^T\frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big)+2\Delta\Big]\Big((1+2a\tau)\varkappa+a\tau\Big)+2a\tau\varkappa+a\tau.$$

§ 2. Алгоритм для численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1)

Как уже было отмечено во введении, при решении конкретных задач естественно считать процесс, описываемый системой (1), практически неустойчивым, если характеристика (4) достаточно велика. Тогда, задавшись некоторым большим числом $\varkappa^*$, естественно при проведении численных расчетов либо получить асимптотическую устойчивость с указанием ее качества — вычисленной характеристики (4), для которой $\varkappa < \varkappa^*$, либо установить справедливость неравенства $\varkappa \geq \varkappa^*$, и в этом случае будем говорить о практической неустойчивости. В данном параграфе мы опишем реализацию этой схемы.

Отметим, что логика рассуждений по решению конкретных задач о наличии или отсутствии асимптотической устойчивости у нулевого решения системы (1), описанная выше, повторяет логику рассуждений из [7; 8] для случая постоянных коэффициентов.

До конца параграфа мы будем работать только с нормированной матрицей $A(t)$: $\frac{A(\frac{t}{2a})}{2a}$. Константа Липшица для такой матрицы будет равна $\frac{M}{4a^2}$, период — $2aT$ и максимум ее нормы на периоде — 0,5. Для простоты изложения мы сохраним за ней обозначение $A(t)$, T — ее период, M — константа Липшица, $a = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(t)\| = 0{,}5$. За всеми остальными величинами, построенными по матрице $A(t)$, мы также сохраним свои обозначения.

Прежде чем перейти к изложению указанной схемы, мы докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $\varkappa^* > 10$, $0 < \varepsilon \leq 0,5$ — произвольные числа, m — минимальное четное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\tau = \frac{T}{m} \leq 0{,}1\,\varepsilon \min\Big\{\frac{1{,}8}{M\chi^*},\ 2\Big\}, \tag{41}$$

где

$$\chi^* = \big(1 + 0{,}5\,T\big)\varkappa^* + 0{,}5\,T, \tag{42}$$

и $k \geq 0$ — минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\exp\Big(-2^k \frac{0{,}9\,T}{\varkappa^*}\Big)\frac{\varkappa^*}{0{,}9}(1 + 0{,}6\,T)^2 \leq 0,2\,\varepsilon. \tag{43}$$

Если по таким $\tau = \frac{T}{m}$ и k мы вычислим величины

$$\Big\|Y_\tau^{2^k}(T)\Big\|, \quad \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big\| \cdot 2\tau \tag{44}$$

и окажется, что верно неравенство

$$\bigg(\Big\|Y_\tau^{2^k}(T)\Big\| + T\frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}\Big(\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big\| \cdot 2\tau\Big)\bigg)^2 \geq$$
$$\geq \exp\Big(-2^k\frac{0{,}9\,T}{\varkappa^*}\Big)\frac{\varkappa^*}{0{,}9}(1 + 0{,}6\,T)^2, \tag{45}$$

то тогда имеет место $\varkappa \geq \varkappa^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем от противного. Пусть $\varkappa < \varkappa^*$. Для доказательства нам понадобятся две оценки из работы [9]. Пусть нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и τ удовлетворяет неравенству (30), тогда в [9] было показано, что краевая задача (9) однозначно разрешима, имеет место оценка на норму разности решений краевых задач (3), (9)

$$\|H(t) - H_\tau(t)\| \le \frac{M\tau h}{1 - M\tau h}\|H(t)\|, \quad t \in [0, T],$$

и имеет место оценка

$$\left\|\Big(Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t)\Big)^* H_\tau(t)Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t)\right\| \le \exp\Big(-2^k \int\limits_0^T \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}\,ds\Big)\|H_\tau(t)\|,$$

где $t \in [0, T]$, k — целое неотрицательное число.

Заметим, что

$$\left\|H_\tau^{-1}(t)\right\| \le 2 \max_{t\in[0,T]} \|A_\tau(t)\| \le 2a = 2 \cdot 0,5 = 1.$$

Эта оценка доказана в [5] для решения $H(t)$ краевой задачи (3) при непрерывной матрице $A(t)$, но, очевидно из доказательства в [5], она имеет место и для решения $H_\tau(t)$ краевой задачи (9) при кусочно-постоянной матрице $A_\tau(t)$. Тогда мы получим, что если τ удовлетворяет (30), то при $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$\left\|Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t)\right\|^2 \le \exp\Big(-2^k(1 - M\tau h)\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big)\frac{1}{1 - M\tau h}\|H(t)\|.$$

Из очевидной цепочки неравенств

$$T = \int\limits_0^T \frac{1}{\sqrt{\|H(s)\|}}\sqrt{\|H(s)\|}\,ds \le \Big(\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(T\theta\Big)^{\frac{1}{2}}$$

вытекает

$$\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds \ge \frac{T}{\varkappa}.$$

Поэтому в силу оценки (31) будем иметь, что если τ удовлетворяет (32), то при $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$\left\|Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t)\right\|^2 \le \exp\Big(-2^k(1 - M\tau\chi)\frac{T}{\varkappa}\Big)\frac{1}{1 - M\tau\chi}\|H(t)\|. \tag{46}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| = \|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{l-1}\Big(\|Y_\tau(t_{2(j+1)})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2(j+1)})\| - \|Y_\tau(t_{2j})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2j})\|\Big) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=l}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\|Y_\tau(t_{2(j+1)})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2(j+1)})\| - \|Y_\tau(t_{2j})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2j})\|\Big) \le\end{aligned}$$

$$\leq \|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1} \|Y_\tau(t_{2(l+1)})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2(l+1)}) - Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\|,$$

то из (20) вытекает

$$\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| \leq \|Y_\tau^{2^k}(T)\| +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1} \|e^{\tau A_{2l+1}}e^{\tau A_{2l}}Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})e^{-\tau A_{2l}}e^{-\tau A_{2l+1}} -$$
$$- Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| \leq \|Y_\tau^{2^k}(T)\| +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\|\Big(e^{\tau A_{2l+1}}e^{\tau A_{2l}} - I\Big)Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})e^{-\tau A_{2l}}e^{-\tau A_{2l+1}}\| +$$
$$+ \|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big(e^{-\tau A_{2l}}e^{-\tau A_{2l+1}} - I\Big)\|\Big).$$

Ввиду очевидных неравенств

$$\|e^{-\tau A_i}e^{-\tau A_j}\| \leq e^{2a\tau} = e^\tau, \quad i,\, j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

и

$$\|e^{\pm\tau A_i}e^{\pm\tau A_j} - I\| \leq \|e^{\pm\tau A_i} - I\|\|e^{\pm\tau A_j}\| + \|e^{\pm\tau A_j} - I\| \leq$$
$$\leq (e^{a\tau}-1)(e^{a\tau}+1) = e^{2a\tau} - 1 = e^\tau - 1, \quad i,\, j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

получим

$$\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| \leq \|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\Big(\Big(e^\tau - 1\Big) \times$$
$$\times \|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\|e^\tau + \|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\|\Big(e^\tau - 1\Big)\Big) =$$
$$= \|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| \cdot 2\tau. \quad (47)$$

Тогда из (46), (47) и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$\Big(\|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\| \cdot 2\tau\Big)^2 \leq$$
$$\leq \exp\Big(-2^k(1-M\tau\chi)\frac{T}{\varkappa}\Big)\frac{1}{1-M\tau\chi}\Big(\sqrt{\|H(0)\|} + \frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\sqrt{\|H(t_{2l})\|}\cdot 2\tau\Big)^2 \leq$$
$$\leq \exp\Big(-2^k(1-M\tau\chi)\frac{T}{\varkappa}\Big)\frac{1}{1-M\tau\chi}\Big(\sqrt{\|H(0)\|} + \frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\|H(t_{2l})\| \cdot 2\tau}\Big)^2.$$

Поэтому из (4), (39) и $a = 0{,}5$ следует

$$\Big(\|Y_\tau^{2^k}(T)\| + \frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1}\|Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\|\cdot 2\tau\Big)^2 \leq$$

$$\leq \exp\Big(-2^k\Big(1-M\tau\chi\Big)\frac{T}{\varkappa}\Big)\frac{1}{1-M\tau\chi}\Big(\sqrt{\varkappa}+\frac{e^{2\tau}-1}{4\tau}T\sqrt{(1+\tau)\varkappa+\frac{\tau}{2}}\Big)^2.$$

Отсюда согласно $\varkappa < \varkappa^*$, определению χ в (31), неравенствам (41) и $\varkappa^* > 10$, обозначению (42) сразу получаем, что неравенство (45) не выполнено. Мы получили противоречие. Следовательно, если неравенство (45) выполнено, то $\varkappa \geq \varkappa^*$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\varkappa^*$, ε, m и k удовлетворяют условиям леммы* 1. *Если по таким $\tau = \frac{T}{m}$ и k мы вычислим приближение* (34) *и окажется, что верно неравенство*

$$\widehat{\varkappa}_\tau^k \geq 0{,}65\,\varkappa^*, \tag{48}$$

то тогда имеет место $\varkappa \geq \frac{\varkappa^*}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$\chi_{\frac{1}{2}}^* = \Big(1+0{,}5\,T\Big)\frac{\varkappa^*}{2} + 0{,}5\,T. \tag{49}$$

Проведем доказательство от противного, т. е. будем полагать, что $\varkappa < \frac{\varkappa^*}{2}$. В силу $\tau \leq 0{,}2\,\varepsilon$ и $a = 0{,}5$ из (18) имеем

$$\Delta = \frac{e^\tau-\tau-1}{\tau} \leq \frac{e^{0{,}2\varepsilon}-0{,}2\,\varepsilon-1}{0{,}2\,\varepsilon} < \frac{0{,}2\,\varepsilon}{2}\Big(1+\frac{e^{0{,}2\varepsilon}-1}{3}\Big) \leq 0{,}1\,\varepsilon\frac{2+e^{0{,}2\cdot 0{,}5}}{3} < 0{,}11\,\varepsilon. \tag{50}$$

Тогда из оценки (40), неравенств $\varkappa < \frac{\varkappa^*}{2}$, (41) и $\chi_{\frac{1}{2}}^* < \chi^*$, определения χ в (31) и обозначения (49) следует неравенство

$$\widehat{\varkappa}_\tau^k < \frac{(1+\tau)\frac{\varkappa^*}{2}+\frac{\tau}{2}}{(1-M\tau\chi_{\frac{1}{2}}^*)(1-0{,}11\varepsilon)}.$$

Отсюда в силу $\varkappa^* > 10$ и $\tau \leq 0{,}2\,\varepsilon$

$$\widehat{\varkappa}_\tau^k < \frac{(1+0{,}2\,\varepsilon+\frac{0{,}2\varepsilon}{10})\frac{\varkappa^*}{2}}{(1-M\tau\chi_{\frac{1}{2}}^*)(1-0{,}11\,\varepsilon)}.$$

Заметим, что неравенство

$$2\chi_{\frac{1}{2}}^* < \frac{12}{11}\chi^*$$

непосредственно вытекает из $\varkappa^* > 10$, (49) и (42). Поэтому ввиду $\varepsilon \leq 0{,}5$ и $M\tau\chi^* \leq 0{,}18\,\varepsilon$ получим

$$\widehat{\varkappa}_\tau^k < \frac{(1+0{,}2\,\varepsilon+\frac{0{,}2\varepsilon}{10})\frac{\varkappa^*}{2}}{(1-\frac{12}{22}\cdot 0{,}18\,\varepsilon)(1-0{,}11\varepsilon)} \leq \frac{(1+0{,}2\cdot 0{,}5+\frac{0{,}2\cdot 0{,}5}{10})\frac{\varkappa^*}{2}}{(1-\frac{12}{22}\cdot 0{,}18\cdot 0{,}5)(1-0{,}11\cdot 0{,}5)} < 0{,}65\,\varkappa^*.$$

Мы получили противоречие, которое доказывает, что в этом случае $\varkappa \geq \frac{\varkappa^*}{2}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\varkappa^*$, ε, m *и* k *удовлетворяют условиям леммы* 1. *Если по таким* $\tau = \frac{T}{m}$ *и* k *мы вычислим* (44), *приближение* (34) *и окажется, что для посчитанных величин не выполнены неравенства* (45) *и* (48), *то нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво, характеристика* (4) *вычислена с относительной точностью, не превосходящей числа* ε,

$$\left|\varkappa - \widehat{\varkappa}_\tau^k\right| < \varepsilon\varkappa, \tag{51}$$

а также выполнена оценка

$$\varkappa < \varkappa^*. \tag{52}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть неравенства (45) и (48) не выполнены. Из того, что неравенство (45) не выполнено, из (43) получаем для натурального n:

$$\left\|Y_\tau^{2^k n}(T)\right\| \le \left\|Y_\tau^{2^k}(T)\right\|^n < (\sqrt{0{,}2\,\varepsilon}\,)^n.$$

Поэтому при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$\left\|Y_\tau^{2^k n}(T) r\right\| \to 0.$$

А это означает, что все собственные значения матрицы монодромии для системы (6) лежат в единичном круге γ, т. е. по спектральному критерию нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво.

Покажем, что и нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Для доказательства нам понадобится один результат из работы [5], в которой было показано, что если краевая задача (3) имеет единственное эрмитово положительно определенное решение $H(t)$ и $A_1(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица такая, что

$$\delta = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\| < 1,$$

то краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V + V(A(t) + A_1(t)) + (A(t) + A_1(t))^* V = -I, \quad 0 < t < T, \\ V(0) = V(T), \end{cases}$$

имеет единственное эрмитово положительно определенное решение, и выполнена оценка

$$\|H(t) - V(t)\| \le \frac{\delta}{1-\delta}\|H(t)\|.$$

Из доказательства, приведенного в [5], легко получить справедливость этого результата для случая кусочно-непрерывных матриц. Отсюда согласно теореме 1 и оценке

$$\max_{t\in[0,T]} \|A_\tau(t) - A(t)\| \le \frac{M\tau}{2}, \tag{53}$$

полученной в [9], где M — константа Липшица из неравенства (2), для того, чтобы показать, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, достаточно доказать неравенство

$$M\tau h_\tau = M\tau \max_{t\in[0,T]} \|H_\tau(t)\| < 1. \tag{54}$$

Докажем (54). Для этого рассмотрим следующие две оценки:

$$h_\tau \le \|H_\tau(0)\| + 0,5T\widetilde{\theta}_\tau + 0,5T, \tag{55}$$

где

$$\widetilde{\theta}_\tau = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|H_\tau(t)\|dt,$$

и

$$\left|\widetilde{\theta}_\tau - \overline{\theta}_\tau\right| \le \tau\widetilde{\theta}_\tau + \frac{\tau}{2}, \tag{56}$$

где

$$\overline{\theta}_\tau = \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{\frac{m}{2}-1} \|H_\tau(t_{2l})\| \cdot 2\tau.$$

Эти оценки для решения $H_\tau(t)$ краевой задачи (9) при кусочно-постоянной матрице $A_\tau(t)$ непосредственно вытекают соответственно из доказательств оценок (31) в [9] и (39) в настоящей работе, полученных для решения $H(t)$ краевой задачи (3) при непрерывной матрице $A(t)$. Из (55) и (56) имеем

$$h_\tau \le \|H_\tau(0)\| + 0,5T\frac{\overline{\theta}_\tau + \frac{\tau}{2}}{1-\tau} + 0,5T < \frac{1}{1-\tau}\Big(\|H_\tau(0)\| + 0,5T\overline{\theta}_\tau + 0,5T\Big). \tag{57}$$

Далее мы оценим сверху $\|H_\tau(t_{2l})\|$ через $\left\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})\right\|$ (напомним, что при такой записи l — произвольное целое число от 0 до $\frac{m}{2}-1$). Из (8), (10), (24), (43), (45), (47) будем иметь неравенство

$$\left\|H_\tau(t_{2l}) - H_\tau^k(t_{2l})\right\| = \Big\|\int\limits_{2^kT}^{\infty} (Y_\tau^{-1}(t_{2l}))^* Y_\tau^*(\xi + t_{2l}) Y_\tau(\xi + t_{2l}) Y_\tau^{-1}(t_{2l}) d\xi\Big\| =$$
$$= \left\|\Big(Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\Big)^* \int\limits_0^{\infty} (Y_\tau^{-1}(t_{2l}))^* Y_\tau^*(\xi + t_{2l}) Y_\tau(\xi + t_{2l}) Y_\tau^{-1}(t_{2l}) d\xi \circ \right.$$
$$\left. \circ\, Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})\right\| < 0,2\varepsilon\|H_\tau(t_{2l})\|. \tag{58}$$

А также учитывая (13), (14), (23), (25), (50) и оценку (21), положив в ней матрицы $S_j = Y_\tau(t_{2l})Y_\tau^j(T)Y_\tau^{-1}(t_{2l})$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, и $S_j = 0$, $j = 2^k, 2^k + 1, 2^k + 2, \ldots$, получим

$$\left\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l}) - H_\tau^k(t_{2l})\right\| < 0,11\varepsilon\left\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})\right\|. \tag{59}$$

Поэтому справедлива оценка сверху

$$\|H_\tau(t_{2l})\| < \frac{1 + 0,11\varepsilon}{1 - 0,2\varepsilon}\left\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})\right\|. \tag{60}$$

Из доказанного ранее неравенства (57) и полученной оценки сверху (60) мы имеем

$$h_\tau < \frac{1 + 0,11\,\varepsilon}{(1-\tau)(1 - 0,2\,\varepsilon)}\Big((1 + 0,5\,T)\widehat{\varkappa}_\tau^k + 0,5\,T\Big),$$

где $\widehat{\varkappa}_\tau^k$ определено в (34). Поскольку по условию теоремы не выполнено неравенство (48), то справедливо

$$h_\tau < \frac{1+0,11\,\varepsilon}{(1-\tau)(1-0,2\,\varepsilon)}\Big((1+0,5\,T)\cdot 0,65\varkappa^* + 0,5\,T\Big).$$

Тогда, учитывая оценку

$$11\cdot 0{,}5\,T < \chi^*,$$

которая непосредственно вытекает из (42) и $\varkappa^* > 10$, получим

$$M\tau h_\tau < M\tau\frac{1+0{,}11\,\varepsilon}{(1-\tau)(1-0{,}2\,\varepsilon)}\Big(0{,}65\,\chi^* + 0{,}35\cdot 0{,}5\,T\Big) <$$
$$< M\tau\chi^*\frac{1+0{,}11\,\varepsilon}{(1-\tau)(1-0{,}2\,\varepsilon)}\Big(0{,}65+\frac{0{,}35}{11}\Big).$$

Поэтому ввиду неравенств $M\tau\chi^* \le 0{,}18\,\varepsilon$ и $\tau \le 0{,}2\,\varepsilon$

$$M\tau h_\tau < 0{,}18\,\varepsilon\frac{1+0,11\varepsilon}{(1-0{,}2\,\varepsilon)^2}\Big(0{,}65+\frac{0{,}35}{11}\Big).$$

Отсюда, учитывая $\varepsilon \le 0{,}5$, имеем

$$M\tau h_\tau < 0{,}18\varepsilon\frac{1+0{,}11\cdot 0{,}5}{(1-0{,}2\cdot 0{,}5)^2}\Big(0{,}65+\frac{0{,}35}{11}\Big) < 0{,}16\,\varepsilon, \tag{61}$$

т. е. (54) доказано.

Из оценки (54), как уже отмечалось, следует, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Теперь докажем выписанные в условии теоремы оценки (51) и (52). Заметим, что для доказательства (51) достаточно показать справедливость неравенств

$$\Big|\|H(0)\| - \Big\|\widehat{H}_\tau^k(0)\Big\|\Big| < \varepsilon\|H(0)\| \tag{62}$$

и

$$\Big|\theta - \widehat{\theta}_\tau^k\Big| < \varepsilon\theta, \tag{63}$$

где $\widehat{\theta}_\tau^k$ определено в (36).

Докажем (62). Доказательство (63) проводится аналогично. Сначала отметим, что в силу указанного выше результата из работы [5], (53) и (61) оценка нормы разности решений краевой задачи (3) и (9) имеет вид

$$\|H_\tau(t) - H(t)\| \le \frac{M\tau h_\tau}{1-M\tau h_\tau}\|H_\tau(t)\| < \frac{0{,}16\,\varepsilon}{1-0{,}16\,\varepsilon}\|H_\tau(t)\|. \tag{64}$$

Отсюда в силу (58) и (59) получим

$$\Big\|H(0) - \widehat{H}_\tau^k(0)\Big\| < \frac{0{,}16\,\varepsilon}{1-0{,}16\,\varepsilon}\|H_\tau(0)\| + 0{,}2\,\varepsilon\|H_\tau(0)\| + 0{,}11\,\varepsilon\Big\|\widehat{H}_\tau^k(0)\Big\|.$$

А поскольку из (8), (10) и (59) непосредственно вытекает неравенство

$$\Big\|\widehat{H}_\tau^k(t_{2l})\Big\| < \frac{1}{1-0{,}11\,\varepsilon}\|H_\tau(t_{2l})\|,$$

то будем иметь

$$\left\|H(0)-\widehat{H}_\tau^k(0)\right\| < \frac{0{,}16\,\varepsilon}{1-0{,}16\,\varepsilon}\|H_\tau(0)\| + 0{,}2\,\varepsilon\|H_\tau(0)\| + 0{,}11\,\varepsilon\frac{1}{1-0{,}11\,\varepsilon}\|H_\tau(0)\| =$$

$$= \frac{0{,}47\,\varepsilon - 0{,}0892\,\varepsilon^2 + 0{,}00352\,\varepsilon^3}{\Big(1-0{,}16\,\varepsilon\Big)\Big(1-0{,}11\,\varepsilon\Big)}\|H_\tau(0)\| < \frac{0{,}47\,\varepsilon}{\Big(1-0{,}16\,\varepsilon\Big)\Big(1-0{,}11\,\varepsilon\Big)}\|H_\tau(0)\|.$$

Окончательно, учитывая (64) и $\varepsilon \le 0{,}5$, приходим к

$$\Big|\|H(0)\| - \left\|\widehat{H}_\tau^k(0)\right\|\Big| \le \left\|H(0)-\widehat{H}_\tau^k(0)\right\| < \frac{0{,}47\,\varepsilon}{\Big(1-0{,}11\,\varepsilon\Big)\Big(1-0{,}32\,\varepsilon\Big)}\|H(0)\| < \varepsilon\|H(0)\|.$$

Для того чтобы доказать оценку (52), достаточно показать, что имеют место неравенства

$$\|H(0)\| < \varkappa^* \tag{65}$$

и

$$\theta < \varkappa^*. \tag{66}$$

Докажем (65). Доказательство оценки (66) проводится аналогично. Из (60) и (64) следует оценка

$$\|H(0)\| < \frac{1}{1-0{,}16\,\varepsilon}\,\frac{1+0{,}11\,\varepsilon}{1-0{,}2\,\varepsilon}\left\|\widehat{H}_\tau^k(0)\right\|.$$

В силу $\varepsilon \le 0{,}5$ и того, что неравенство (48) не выполнено, имеем

$$\|H(0)\| < \frac{0{,}65\,\varkappa^*}{1-0{,}16\,\varepsilon}\,\frac{1+0{,}11\,\varepsilon}{1-0{,}2\,\varepsilon} \le \frac{0{,}65\,\varkappa^*}{1-0{,}16\cdot 0{,}5}\,\frac{1+0{,}11\cdot 0{,}5}{1-0{,}2\cdot 0{,}5} < \varkappa^*,$$

т. е. оценка (65) доказана.

Лемма доказана.

Опишем указанную в начале этого параграфа схему.

1. Вначале мы предполагаем, что матрица $A(t)$ такова, что $\varkappa < \varkappa^*$, где $\varkappa^*$ — некоторое большое число. При проведении численных расчетов мы подтвердим или опровергнем это утверждение.

2. Задаем верхнее ограничение $0 < \varepsilon \le 0{,}5$ для относительной точности, с которым нам необходимо вычислить характеристику (4).

3. Находим минимальное четное m, удовлетворяющее неравенству (41), минимальное целое $k \ge 0$, удовлетворяющее неравенству (43).

4. По найденным $\tau = \frac{T}{m}$ и k вычисляем (44) и проверяем выполнено ли для посчитанных величин неравенство (45). Если неравенство выполнено, то по лемме 1 следует, что тогда имеет место $\varkappa \ge \varkappa^*$, т. е. процесс, описываемый системой (1), практически неустойчив. На этом вычисления заканчиваются. Если неравенство не выполнено, то переходим к следующему шагу.

5. Используя формулы (26) и (28), (29), вычисляем приближение (34) и проверяем, выполнено ли для посчитанной величины неравенство (48). Если неравенство не выполнено, то по лемме 3 нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и выполнены оценки (51), (52). Если неравенство выполнено, то мы не можем гарантировать, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво и выполнены неравенства (51),

(52). Однако отметим, что в этом случае по лемме 2 имеет место неравенство $\varkappa \geq \frac{\varkappa^*}{2}$, т. е. характеристика (4) достаточно велика. На этом описание схемы закончено.

Замечание 1. Пусть хотя бы одно из неравенств (45) или (48) оказалось выполненным, т. е. мы не получили справедливость утверждений из леммы 3. Очевидно, что в этом случае характеристика $\varkappa$ либо равна бесконечности, либо является большой, но конечной величиной. Тогда можно попытаться оценить ее значение, задавшись вместо $\varkappa^*$ большим числом $\varkappa^{**}$ и проведя еще раз вычисления по указанной схеме.

Отметим, что логика рассуждений в замечании 1 повторяет логику рассуждений в случае постоянных коэффициентов, описанную в работах С. К. Годунова и А. Я. Булгакова.

Замечание 2. В случае постоянных коэффициентов $A(t) \equiv A$, как уже было отмечено во введении,

$$\varkappa = \|H\|,$$

где $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I.$$

Тогда в силу (13) и (25) (считаем $T = 1$) приближениями к $\varkappa$ будут величины

$$\left\|\widehat{H}_\tau^k\right\| = \left\|\sum_{j=0}^{2^k-1} e^{jA^*}\widehat{H}_\tau^0 e^{jA}\right\|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\widehat{H}_\tau^0 = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-1} e^{(2n+1)\tau A^*} e^{(2n+1)\tau A} \cdot 2\tau$$

(в [7, 8] нулевое приближение строилось иначе), вместо (44) мы вычисляем

$$\left\|e^{2^k A}\right\|.$$

А также нетрудно показать в силу $M = 0$, что если неравенства (41), (43), (45) и (48) заменить соответственно на неравенства

$$\tau \leq 0{,}8\,\varepsilon, \quad \exp\Bigl(-2^k \frac{T}{\varkappa^*}\Bigr)\varkappa^* \leq 0{,}2\,\varepsilon, \quad \left\|e^{2^k A}\right\|^2 < \exp\Bigl(-2^k \frac{T}{\varkappa^*}\Bigr)\varkappa^* \quad \text{и} \quad \left\|\widehat{H}_\tau^k\right\| < \frac{\frac{\varkappa^*}{2}}{1 - 0{,}5\,\varepsilon},$$

то эти изменения не нарушат справедливость замечания 1 и всех утверждений из описанной выше схемы.

Список литературы

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

2. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

3. *Уилксон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

4. *Годунов С. К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002.

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.

7. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск, 1994. Т. 1: Краевые задачи.

8. *Булгаков А. Я.* Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 3. С. 32–41.

9. *Клевцова Ю. Ю.* О численном исследовании асимптотической устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. мат. 2005. Т. 8, № 2 (22). С. 103–115.

10. *Павлов Б. В., Повзнер А. Я.* Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. выч. мат. и мат. физики. 1973. Т. 13, № 4. С. 1056–1059.

11. *Moler C., Van Loan C.* Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-five Years Later // SIAM Rev. 2003. Vol. 45, No. 1. P. 3–49.

12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

Материал поступил в редколлегию 26.04.2006

Адрес автора
КЛЕВЦОВА Юлия Юрьевна
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: yy_klevtsova@ngs.ru