УДК 517.9

Ю. Е. Аниконов, М. В. Нещадим

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАНТОВОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*

В работе для квантового кинетического уравнения получено дифференциальное тождество, на основе которого доказана теорема единственности обратной задачи определения решения и правой части по краевой и начальной информации. Также рассмотрены задача восстановления решения и потенциала и задача построения решения в виде квазиполиномов.

Ключевые слова: квантовое кинетическое уравнение, обратная задача, дифференциальные тождества.

Первые результаты исследования обратных задач для кинетических уравнений можно найти в работах [1; 2]. В данной работе рассматривается обратная задача определения потенциала и правой части для приближенного квантового уравнения. При некоторых, достаточно общих, предположениях доказываются теоремы существования и единственности.

Квантовое кинетическое уравнение имеет вид [3; 4]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial w}{\partial x_j} - \\ - \frac{i}{(2\pi)^n \hbar} \int\limits_{R^{2n}} \left(\Phi\Big(x - \frac{\hbar}{2} y, t\Big) - \Phi\Big(x + \frac{\hbar}{2} y, t\Big) \right) e^{iy(p^{'} - p)} w(x, p^{'}, t)\, dy dp^{'} = \\ = \lambda(x, p, t), \qquad (1)$$

где $p = (p_1, \dots, p_n) \in R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset R^n$, $n \geq 1$, D — область с гладкой границей ∂D вещественного евклидова пространства R^n, $t \geq 0$, $\Phi(x,t)$ — потенциал, $w(x,p,t)$ — квантовая функция распределения — функция Вигнера, $\lambda(x,p,t)$ — функция источников, возможно функционально-интегрально зависящая от w при наличии столкновительных явлений, $\hbar$ — постоянная Планка.

Отметим, что функция Вигнера была введена в работе [5], уравнение ее эволюции для случая квантования классического гамильтониана $p^2/2 + \Phi(x)$ содержится, например, в [3] и применяется она, например, для моделирования работы таких устройств, как квантовый туннельный диод [6; 7] и вообще связана с проблемой квантовых измерений [8].

Предполагая наличие всех производных функций $w(x,p,t)$, $\Phi(x,t)$, разложением подынтегрального выражения уравнения (1) в ряд Тейлора по $\hbar$ получают квантовое

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 06–01–00439) и Интеграционного гранта СО РАН (проекты № 48, 2.15 – 2006)

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 13–22

кинетическое уравнение бесконечного порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m a_m\sum_{j_1,..,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\dots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{2m-1}}}=\lambda(x,p,t),\quad(2)$$

где $a_m=\dfrac{\hbar^{2m-2}}{(2m-1)!2^{2m-2}}$. Конечные приближения уравнения, в том случае и классические ($N=1$), следуют из (2) стандартным способом — отбрасыванием бесконечного числа слагаемых:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\sum_{j_1,\dots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p_{j_1}\dots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{2m-1}}}=\lambda(x,p,t).\quad(3)$$

При $N=1$ уравнение (3) классическое:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}=\lambda.$$

Оказывается специфика уравнения (3) позволяет получить тождество, на основе которого исследуются вопросы единственности и устойчивости решения обратных задач для уравнения (3), в частности, задачи поиска функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ при некоторых ограничениях на $\lambda(x,p,t)$. Это тождество так же, как и в ранее известном случае при $N=1$ содержит дивергентные слагаемые (которые исчезают при интегрировании в исследовании вопроса единственности решения) и формы четных степеней относительно частных производных функции $w(x,p,t)$. При ограничении типа выпуклости на потенциал эти формы оказываются положительно определенными, что и приводит к единственности решения обратной задачи.

Сформулируем сначала результат в одномерном случае.

Лемма 1. *Пусть функции $w(x,p,t)$, $\Phi(x,t)$ дифференцируемы достаточное число раз. Тогда имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+p\frac{\partial w}{\partial x}+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m\frac{\partial^{2m-1}w}{\partial p^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}a_m\left(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\right)^2\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}}+\mathrm{div},\quad(4)$$

где

$$\mathrm{div}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial p}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial p}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+$$
$$+\sum_{m=1}^{N}(-1)^m\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial p}\left(a_m\frac{\partial^k w}{\partial p^{k-1}\partial x}\frac{\partial^{2m-k}w}{\partial p^{2m-k}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{m=1}^{N}a_m\left(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\right)^2\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\right).$$

Замечание 1. При условии сходимости рядов имеет смысл и предельный случай $N\to\infty$, т. е. тождество для уравнения (2).

Замечание 2. Если $\dfrac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}} \le 0$, то выражение

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} a_m \Big(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\Big)^2 \frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}} \ge 0,$$

и это может быть использовано при поиске функций $\lambda(x,p,t)$ таких, что $\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x \partial p} = 0$.

Доказательство леммы существенно использует специфику уравнения (2) и равенства

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial p} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial p}\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial p}\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\Big),\\
&\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\Big(p\frac{\partial w}{\partial x}\Big) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\Big(p\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2,\\
&(-1)^m a_m \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^{2m} w}{\partial p^{2m}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} =\\
&\qquad = -\frac{1}{2}a_m\Big(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\Big)^2\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x^{2m}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(a_m\Big(\frac{\partial^m w}{\partial p^m}\Big)^2\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\Big) +\\
&\qquad\qquad + (-1)^m\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial p}\Big(a_m\frac{\partial^k w}{\partial p^{k-1}\partial x}\frac{\partial^{2m-k} w}{\partial p^{2m-k}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\Big).
\end{aligned}$$

В многомерном случае справедлива

Лемма 2. *Пусть функции $w(x,p,t)$, $\Phi(x,t)$ дифференцируемы достаточное число раз. Тогда имеет место тождество*

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\partial w}{\partial x_j} +\\
&\quad + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m \sum_{j_1,\dots,j_{2m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{2m-1} w}{\partial p_{j_1}\dots\partial p_{j_{2m-1}}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{2m-1}}}\Big) = \frac{1}{2}\big|\mathrm{grad}_x w\big|^2 -\\
&\qquad - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{j_1,\dots,j_{2m}=1}^{n}\frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1}\dots\partial p_{j_m}}\frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}}\dots\partial p_{j_{2m}}}\frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{2m}}} + \mathrm{div}, \qquad (5)
\end{aligned}$$

где $\big|\mathrm{grad}_x w\big|^2 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x_j}\Big)^2$ *и под* div *понимаются дивергентные слагаемые по переменным x, p, t.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во первых, заметим, что справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big) =\\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial w}{\partial p_s}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_s}\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial p_s}\Big) + \frac{\partial}{\partial p_s}\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x_s}\Big)\Big] +\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j\ne s}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(p_j\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial w}{\partial p_s}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_s}\Big(p_j\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial p_s}\Big) + \frac{\partial}{\partial p_s}\Big(p_j\frac{\partial w}{\partial x_s}\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)\Big] +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\big|\mathrm{grad}_x w\big|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\Big(p_j\Big(\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big)^2\Big).
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим произведение

$$A = (-1)^m \frac{\partial w}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial p_s} \left(\frac{\partial^{2m-1} w}{\partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} \right).$$

Так как функция Φ не зависит от переменных p, то

$$A = (-1)^m \frac{\partial w}{\partial x_s} \frac{\partial^m}{\partial p_s \partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{m-1}}} \left(\frac{\partial^m w}{\partial p_{j_m} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \right) \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}}.$$

Отсюда следуют равенства

$$A = \frac{\partial^{m+1} w}{\partial x_s \partial p_s \partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{m-1}}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_m} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} + \mathrm{div},$$

$$A = \frac{\partial^{m+1} w}{\partial x_s \partial p_{j_m} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^m w}{\partial p_s \partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{m-1}}} \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} + \mathrm{div},$$

где div — дивергентные слагаемые по переменным p. Следовательно,

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial^m w}{\partial p_s \partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{m-1}}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_m} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \right) \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} + \mathrm{div} =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial^m w}{\partial p_s \partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{m-1}}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_m} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^{2m} \Phi}{\partial x_s \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} + \mathrm{div}\,.$$

Отсюда и из приведенного выше замечания следует доказываемое тождество.

§ 1. Обратная задача определения правой части

Рассмотрим обратную задачу поиска бесконечно дифференцируемых функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$, $x \in D \subset R^n$, $p \in \widetilde{D} \subset R^n$, $0 \le t \le T$, таких, что

1) $$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^N (-1)^m a_m \sum_{j_1,\dots,j_{2m-1}=1}^n \frac{\partial^{2m-1} w}{\partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_{2m-1}}} \frac{\partial^{2m-1} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m-1}}} = \lambda(x,p,t);$$

2) $w|_{\partial D} = v(s,p,t), \ \ s \in \partial D;$

$w|_{t=0} = w_0(x,p), \ \ w|_{t=T} = w_T(x,p);$

3) $D_p^\alpha w|_{\partial \widetilde{D}} = w_\alpha(x,s',t), \ \ s' \in \partial \widetilde{D}, \ \ |\alpha| \le N-1,$

где D_p^α — дифференцирование по переменным p, α — мультииндекс.

Теорема 1. *Если* $\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_j \partial x_j} = 0$ *и квадратичные формы*

$$-\sum_{j_1,\dots,j_{2m}=1}^n \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1} \dots \partial p_{j_m}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}} \dots \partial p_{j_{2m}}} \frac{\partial^{2m} \Phi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{2m}}}$$

положительно определены, $m = 1,\dots,N$, то обратная задача 1)–3) поиска функций $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ в области $\Omega = D \times \widetilde{D} \times [0,T]$ имеет не более одного бесконечно дифференцируемого решения $(w(x,p,t), \lambda(x,p,t))$ в замыкании $\overline{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть данные 2), 3) обратной задачи нулевые. Тогда, интегрируя тождество (5) по области Ω, получим соотношение

$$\int\limits_D \int\limits_{\widetilde{D}} \int\limits_0^T \Big(\frac{1}{2}|\mathrm{grad}_x w|^2 - \\ - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{j_1,\ldots,j_{2m}=1}^{n} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_1}\ldots\partial p_{j_m}} \frac{\partial^m w}{\partial p_{j_{m+1}}\ldots\partial p_{j_{2m}}} \frac{\partial^{2m}\Phi}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{2m}}}\Big)\, dx\, dp\, dt = \\ = \int\limits_D \int\limits_{\widetilde{D}} \int\limits_0^T \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial \lambda}{\partial p_j}\, dx\, dp\, dt = -\int\limits_D \int\limits_{\widetilde{D}} \int\limits_0^T w \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_j \partial p_j}\, dx\, dp\, dt = 0.$$

Отсюда в области Ω получаем равенства $\dfrac{\partial w}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. С учетом нулевых данных это приводит к соотношению $w = 0$ в Ω. Из (1) следует, что $\lambda = 0$ в Ω. Теорема доказана.

Возникает вопрос о существовании аналогичных тождеств в случае более общей функции Гамильтона $H(x,p,t)$. Если предположить, что H зависит от всего набора переменных x, p, t, то квантовое кинетическое уравнение имеет вид [3. С. 453]

$$\frac{\partial w(x,p,t)}{\partial t} - \frac{i}{\hbar(2\pi)^{6n}} \int \Big[H\Big(x' - \frac{1}{2}\,\hbar\gamma, p' + \frac{1}{2}\,\hbar\tau, t\Big) - H\Big(x' + \frac{1}{2}\,\hbar\gamma, p' - \\ - \frac{1}{2}\,\hbar\tau, t\Big)\Big] w(x',p',t)\exp\Big\{i\tau(p'-p) + i\gamma(x'-x)\Big\}\, d\tau\, d\gamma\, dx'\, dp' = \lambda(x,p,t). \quad (6)$$

Из (6) разложением подынтегральной функции в ряд Тейлора можно получить дифференциальное уравнение бесконечного порядка аналогичное уравнению (2) и конечные уравнения аналогичные (3). Например, при $N = 3$ получим [9. С. 248] уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial p_j}\Big) + \\ + \frac{1}{24}\sum_{i,k,l=1}^{n}\Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l} - 3\frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_k \partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i \partial p_k \partial x_l} + \\ + 3\frac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial p_k \partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial p_i \partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_l}\frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}\Big) = \lambda(x,p,t). \quad (7)$$

Если функция $H(x,p,t)$ имеет представление

$$H(x,p,t) = H_0(x,t) + H_1(p,t), \quad (8)$$

то для уравнения (7) справедливо тождество

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} + \frac{\partial w}{\partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 H_0}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial w}{\partial p_i}\frac{\partial w}{\partial p_j} + \\ + \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^4 H_1}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k \partial p_l}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^4 H_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}\frac{\partial^2 w}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 w}{\partial p_k \partial p_l} + \mathrm{div}\,. \quad (9)$$

Возникает вопрос о существовании тождества аналогичного тождеству (9), но без предположения (8). В общем случае получить такое тождество, по-видимому, нельзя. В одномерном случае тождество существует, как показывает ниже следующий пример, но знакоопределенность квадратичной формы требует дополнительных условий на функцию H.

Пример 1. Пусть $n = 1$. Тогда (7) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial p^3} - 3\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial p^2} + \right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial p^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial p} - \frac{\partial^3 H}{\partial p^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) = \lambda(x,p,t).$$

Имеет место тождество

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{24}\left[\frac{\partial^4 H}{\partial p^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial^4 H}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x^3 \partial p} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial p}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 H}{\partial x \partial p^3}\right].$$

Здесь использовать знак сравнения «$\equiv$» для того, чтобы показать, что равенство выполнено по модулю дивергентных слагаемых. Полученная квадратичная форма относительно производных $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial p}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}$ не может быть знакоопределенной без дополнительного предположения на функцию H. Таким предположением является естественно требование

$$\frac{\partial^4 H}{\partial x^3 \partial p} = \frac{\partial^4 H}{\partial x \partial p^3} = 0,$$

т. е.

$$H = H_0(x,t) + H_1(p,t) + axp^2 + bxp + cx^2 p,$$

где a, b, c — некоторые константы.

§ 2. Обратная задача восстановления потенциала

Потенциал $\Phi(x,t)$ содержит важную информацию о внутренней структуре исследуемого объекта, о силах межмолекулярного взаимодействия. Поэтому в работах по теоретической физике задаче определения потенциала придается большое значение. Например, в работе [9. С. 241–256] рассматривается задача о получении уравнения на потенциал и интегрирования полученного уравнения.

В данной работе не предполагается наличие явной зависимости потенциала от функции распределения.

Уравнение (3) в случае $n = 1$ и $\Phi = \Phi(x,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p\frac{\partial w}{\partial x} + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m \frac{\partial^{2m-1} w}{\partial p^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} = \lambda(x,p,t). \tag{10}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу определения функций $w(x,p,t)$, $\Phi = \Phi(x,t)$ удовлетворяющих уравнению (10) при условии, что

1) Функции $w(x,p,t)$ и $\lambda(x,p,t)$ аналитичны по переменным p, x, t в окрестности точки $p = x = t = 0$. Функция $\Phi(x,t)$ аналитична по переменным x, t в окрестности точки $x = t = 0$.

2) Функции $w(x,p,t)$ и $\Phi(x,t)$ удовлетворяют следующим начальным данным

$$
\begin{aligned}
&w|_{x=0} = \varphi_0(p,t),\\
&\left.\frac{\partial^r \Phi}{\partial x^r}\right|_{x=0} = \Phi_r(t), \quad r = 0,1,\ldots,2N-2,
\end{aligned}
$$

где $\varphi_0(p,t)$ аналитична по переменным p, t в окрестности точки $p = 0$.

Справедлива

Теорема 2. *Задача определения функций* $\Phi(x,t)$, $w(x,p,t)$, *удовлетворяющих уравнению* (10), *при выполнении условий* 1), 2) *имеет не более одного решения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что функции $w(x,p,t)$, $\lambda(x,p,t)$ аналитичны по переменной p в окрестности точки $p = 0$, получаем разложения

$$
w = \sum_{s=0}^{\infty} w_s(x,t)p^s, \quad \lambda = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s(x,t)p^s, \tag{11}
$$

Подставим эти разложения в уравнение (10):

$$
\sum_{s=0}^{\infty} p^s \frac{\partial w_s}{\partial t} + \sum_{s=0}^{\infty} p^{s+1}\frac{\partial w_s}{\partial x} + \sum_{m=1}^{N}(-1)^m a_m \frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}}{\partial p^{2m-1}}\Big(\sum_{s=0}^{\infty} p^s w_s\Big) = \sum_{s=0}^{\infty}\lambda_s(x,t)p^s.
$$

Расщепляя по переменной p, получим систему типа Коши–Ковалевской по переменной x на функции Φ, w_s, $s = 0,1,\ldots,\infty$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{2N-1}\Phi}{\partial x^{2N-1}} &= \frac{(-1)^N}{(2N-1)!a_N w_{2N-1}}\Big[\lambda_0 - \frac{\partial w_0}{\partial t} - \sum_{m=1}^{N-1}(-1)^m a_m \frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}}(2m-1)!w_{2m-1}\Big],\\
\frac{\partial w_s}{\partial x} &= \lambda_{s+1} - \frac{\partial w_{s+1}}{\partial t} + C_{s+2N}^{2N-1}\frac{w_{s+2N}}{w_{2N-1}}\Big(\frac{\partial w_0}{\partial t} - \lambda_0\Big) + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N-1}(-1)^m(2m-1)!a_m \frac{\partial^{2m-1}\Phi}{\partial x^{2m-1}} \times\\
&\quad \times \frac{1}{w_{2N-1}}\Big[C_{s+2N}^{2N-1}w_{s+2N}w_{2m-1} - C_{s+2m}^{2m-1}w_{s+2m}w_{2N-1}\Big],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $s = 0,1,\ldots,\infty$ и $C_m^l = \dfrac{m!}{l!(m-l)!}$ — число сочетаний из m по l.

Начальные данные для этой системы определяются из условия 2) обратной задачи

$$
\begin{aligned}
&w_s|_{x=0} = \frac{1}{s!}\left.\frac{\partial^s\varphi_0(p,t)}{\partial p^s}\right|_{p=0},\\
&\left.\frac{\partial^r\Phi}{\partial x^r}\right|_{x=0} = \Phi_r(t), \qquad r = 0,1,\ldots,2N-2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, функции w, Φ однозначно восстанавливаются. Теорема доказана.

Замечание 3. Вместо бесконечной системы (12) можно составить, оказывается, систему эволюционных интегро-дифференциальных уравнений, к которым могут быть применены методы Ниренберга–Овсянникова, основанные на шкалах банаховых пространств. Данная система эволюционных по x уравнений типа Коши–Ковалевской имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2N-1}\Phi(x,t)}{\partial x^{2N-1}} = R,\\
&\frac{\partial w(x,p,t)}{\partial x} = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} - \lambda(x,y,t) + \right.\\
&\qquad\qquad + \sum_{m=1}^{N-1}(-1)^m a_m \frac{\partial^{2m-1}\Phi(x,t)}{\partial x^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}w(x,y,t)}{\partial y^{2m-1}} + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^{2N-1}w(x,y,t)}{\partial y^{2N-1}}R\right]_{y=pz} dz,
\end{aligned}
$$

где введено обозначение

$$
R = \left.\frac{\lambda(x,y,t) - \dfrac{\partial w(x,y,t)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{m=1}^{N-1}(-1)^m a_m \frac{\partial^{2m-1}\Phi(x,t)}{\partial x^{2m-1}}\frac{\partial^{2m-1}w(x,y,t)}{\partial y^{2m-1}}}{(-1)^N a_N \dfrac{\partial^{2N-1}w(x,y,t)}{\partial y^{2N-1}}}\right|_{y=0}.
$$

§ 3. Построение решения в виде квазиполиномов

Представляют интерес результаты существования решений обратных задач, при условии, что данные обратной задачи есть квазиполиномы [10].

Рассмотрим вопрос о построении решения для уравнения

$$
\frac{\partial w}{\partial t} + p\frac{\partial w}{\partial x} - a_1\frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2\frac{\partial^3 w}{\partial p^3}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = \lambda(x,p,t), \tag{13}
$$

где $w = w(x,p,t)$, $\Phi = \Phi(x,t)$, $x, p \in R^1$, в виде квазиполиномов

$$
w = e^{-p^2}\sum_{k=0}^{N} w_k(x,t)p^k, \qquad \lambda = e^{-p^2}\sum_{k=0}^{M}\lambda_k(x,t)p^k, \tag{14}
$$

если начальные данные имеют вид

$$
w|_{x=0} = e^{-p^2}\sum_{k=0}^{N} w_k(t)p^k, \quad \left.\frac{\partial^r\Phi}{\partial x^r}\right|_{x=0} = \Phi_r(t), \quad r = 0,1,2. \tag{15}
$$

Подставляя представление (14) в уравнение (13), получим, что степени связаны равенством $M = N + 3$. А расщепление по переменной p приводит к конечной системе типа Коши–Ковалевской классического типа (задача Коши имеет единственное решение в классе аналитических функций)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} &= \frac{1}{a_2(w_3-6w_1)}\Big(\lambda_0-\frac{\partial w_0}{\partial t}+a_1w_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big),\\
\frac{\partial w_0}{\partial x} &= \lambda_1-\frac{\partial w_1}{\partial t}+2a_1\big(w_2-w_0\big)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-8a_2B\big(w_0-3w_2+3w_4\big),\\
\frac{\partial w_1}{\partial x} &= \lambda_2-\frac{\partial w_2}{\partial t}+a_1\big(3w_3-2w_1\big)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\\
&\qquad -2a_2B\big(2w_0+10w_1-27w_3+15w_5\big),\\
\frac{\partial w_{k-1}}{\partial x} &= \lambda_k-\frac{\partial w_k}{\partial t}+a_1\Big((k+1)w_{k+1}-2w_{k-1}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-a_2B\Big(4(3k-2)w_{k-1}+\\
&\qquad +4w_{k-2}-8w_{k-3}-6(k+1)^2w_{k+1}+(k+1)(k+2)(k+3)w_{k+3}\Big),\\
&\qquad k=3,\dots,N-1,\\
\frac{\partial w_{N-3}}{\partial x} &= \lambda_{N-2}-\frac{\partial w_{N-2}}{\partial t}+a_1\Big((N-1)\,w_{N-1}-2w_{N-3}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\\
&\qquad -a_2B\big(4(3N-7)w_{N-3}+4w_{N-4}-8w_{N-5}-6(N-1)^2w_{N-1}\big),\\
\frac{\partial w_{N-2}}{\partial x} &= \lambda_{N-1}-\frac{\partial w_{N-1}}{\partial t}+a_1\Big(Nw_N-2w_{N-2}\Big)\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\\
&\qquad -a_2B\big(4(3N-4)w_{N-2}+4w_{N-3}-8w_{N-4}-6N^2w_N\big),\\
\frac{\partial w_{N-1}}{\partial x} &= \lambda_N-\frac{\partial w_N}{\partial t}-2a_1w_{N-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x}-4a_2B\Big((3N-1)w_{N-1}+w_{N-2}-2w_{N-3}\Big),\\
\frac{\partial w_N}{\partial x} &= \lambda_{N+1}-2a_1w_N\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}-4a_2B((3N+2)w_N+w_{N-1}-2w_{N-2}),
\end{aligned}
$$

где введено обозначение

$$
B=\frac{1}{a_2(w_3-6w_1)}\left(\lambda_0-\frac{\partial w_0}{\partial t}+a_1w_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right),
$$

и два дополнительных соотношения для λ_{N+2} и λ_{N+3}:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{N+2}&=4a_2(w_N-2w_{N-1})\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3},\\
\lambda_{N+3}&=-8a_2w_N\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}.
\end{aligned}
$$

Начальные данные для системы получаются из данных (15).

Список литературы

1. *Аниконов Ю. Е.* Об однозначности решения обратной задачи для квантового кинетического уравнения // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 1. С. 68–75.

2. *Anikonov Yu. E.* Multidimentional Inverse and Ill Posed Problems for Differential Equations. VSP. Utrecht. The Netherlands. 1995.

3. *Блохинцев Д. И.* Квантовая механика. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1988.

4. *Климонтович Ю. Я.* Статистическая физика. М.: Наука. 1982.

5. *Wigner E. P.* On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. 1932. Vol. 40. P. 749–759.

6. *Jacoboni C., Bertoni., Bordone P., et al.* Simulation of Wigner Function Transport in Tunneling of Quantum Structures // Technical Proc. of the 2002 Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems NanoTech 2002 — MSM 2002.

7. *Losovik Yu. E., Filinov A. V.* Tunneling Times of Wave Packets: the Method of Quantum Trajectories in the Wigner Representation. Workshop Kadanoff-Baym Equations. Rostock. October 20–24. 1999.

8. *Mancini S., Man'ko V. I., Tombesi P.* Different Realizations of the Tomographic Principle in Quantum State Measurement // J. Modern Optics. 1997. Vol. 44. No. 11–12. P. 2281–2292.

9. *Компанеец А. С.* Физико-химическая и релятивистская газодинамика. М.: Наука. 1977.

10. *Ораевский В. Н., Коников Ю. В., Хазанов Г. В.* Процессы переноса в анизотропной околоземной плазме. М.: Наука. 1985.

Материал поступил в редколлегию 19.10.2007

Адреса авторов

АНИКОНОВ Юрий Евгеньевич
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: anikon@math.nsc.ru

НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: neshch@math.nsc.ru