УДК 517.95

*Н. В. Неустроева*

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ*

В работе исследуется вариационная задача, описывающая контакт упругой пластины с тонкой упругой балкой. Предполагается, что область контакта заранее неизвестна и подлежит определению. Данная модель описывается задачей минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений или эквивалентным ей вариационным неравенством для оператора четвертого порядка. При этом ограничение на перемещение задано на множестве, размерность которого меньше размерности области решения. Исследованы различные формулировки задачи и их эквивалентность, найдены краевые условия, выполняющиеся на множестве возможного контакта, и их точная интерпретация.

*Ключевые слова:* контактная задача, пластина Кирхгофа-Лява, условия Синьорини.

## Введение

В работе рассматривается модель Кирхгофа–Лява упругой пластины, находящейся в равновесии под действием внешней нагрузки и контактирующая с тонкой упругой балкой. Балка интерпретируется как тонкое упругое препятствие для пластины. В недавно опубликованной работе [5] рассматривается случай, когда пластина является однородной и изотропной. В данной работе исследуется более общий случай, когда пластина — неоднородная и анизотропная. Задача относится к классу задач со свободной границей. Допускаем, что область контакта заранее неизвестна и подлежит определению. В области контакта выполняется условие непроникания.

Вариационный подход, используемый для описания контактного взаимодействия двух тел с неизвестной областью контакта, является сравнительно новым, и оказался очень эффективным. Классическим примером является контактная задача Синьорини о равновесии упругого тела, соприкасающегося без трения с абсолютно жестким основанием. Вопросы разрешимости задачи Синьорини исследованы в [1]. Дальнейшее обобщение и развитие контактных задач получены в [2–3; 10–11]. В частности, двумерные и трехмерные контактные задачи с краевыми условиями типа Синьорини, а также задачи о контакте пластин и оболочек рассматриваются в [10–11]. Тонкое жесткое препятствие для пластин анализировалось в [4; 12]. Данная работа относится к изучению задач об одностороннем контакте двух упругих тел [5; 6]. Подобные задачи были изучены в целом ряде работ технического характера (см. библиографию работы [6]).

## § 1. Вариационная постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma$, $\gamma = (0,1) \times \{0\} \subset \Omega$. Область $\Omega$ отвечает срединной поверхности пластины, а $\gamma$ — тонкому упругому препят-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00209)

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 60–75

ствию (балка). Внешнюю нормаль к $\Gamma$ обозначим через $n = (n_1, n_2)$. Введем пространства Соболева

$$H_0^2(\Omega) = \{\omega \in H^2(\Omega) |\ \omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\},$$
$$H_0^2(\gamma) = \{u \in H^2(\gamma) |\ u = u_x = 0 \quad \text{на} \quad \partial\gamma\}.$$

Определим функционал энергии на $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$:

$$\Pi(w, u) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} d_{ijkl} w_{,kl} w_{,ij} - \int\limits_{\Omega} f w + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma} a u_{xx}^2 - \int\limits_{\gamma} g u, \tag{1}$$

где $w_{,i} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, $(x_1, x_2) \subset \Omega$; $u_x = \frac{du}{dx}$, $x = x_1$; $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\gamma), a \in L^\infty(\gamma)$ — заданные функции, $a \geq c_0 > 0$, $c_0 = \mathrm{const}$; $d_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ — заданный тензор, удовлетворяющий условиям симметрии и положительной определенности

$$d_{ijkl} = d_{jikl} = d_{klij},$$
$$d_{ijkl} \xi_{ji} \xi_{kl} \geq C|\xi|^2, \quad \forall \xi_{ji} = \xi_{ij},\ C > 0,\ i, j, k, l = 1, 2.$$

По повторяющимся индексам проводится суммирование. Функции, заданные только на $\gamma$, будем отождествлять с функциями одной переменной $x$.

Физический смысл функций, входящих в вариационное неравенство (4), следующий: $w$ — перемещение точек срединной поверхности пластины вдоль вертикали, $u$ — перемещение точек тонкого упругого препятствия вдоль вертикали, $f, g$ — заданные внешние нагрузки, $d_{ijkl}$ — тензор модулей упругости пластины, $a$ — коэффициент упругости балки.

Рассмотрим множество допустимых перемещений

$$K = \{(w, u) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma) |\ \ w - u \geq 0 \text{ на } \gamma\}. \tag{2}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что множество $K$ является замкнутым и выпуклым. Отсюда следует, что $K$ будет слабо замкнутым в $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\gamma)$ множеством. Решаем задачу минимизации функционала энергии $\Pi(w, u)$ на заданном множестве $K$:

$$\Pi(\bar{w}, \bar{u}) = \inf_{(w,u) \in K} \Pi(w, u). \tag{3}$$

В силу коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала $\Pi(w, u)$ задача минимизации (3) имеет решение. Используя дифференцируемость и выпуклость функционала энергии, можно показать эквивалентность задачи (3) и следующего вариационного неравенства:

$$(w, u) \in K, \quad \int\limits_{\Omega} d_{ijkl} w_{,kl} (\bar{w}_{,ij} - w_{,ij}) - \int\limits_{\Omega} f (\bar{w} - w) +$$
$$+ \int\limits_{\gamma} a u_{xx} (\bar{u}_{xx} - u_{xx}) - \int\limits_{\gamma} g (\bar{u} - u) \geq 0 \quad \forall (\bar{w}, \bar{u}) \in K. \tag{4}$$

Более того, можно показать, что оно единственно. Предположим, что два набора функций $(w^1, u^1)$, $(w^2, u^2)$ являются решениями вариационной задачи (4). В вариационное неравенство (4) для первого решения $(w^1, u^1)$ подставим $(\bar{w}, \bar{u}) = (w^2, u^2)$, а для второго решения $(w^2, u^2)$ в качестве тестовой подставим $(\bar{w}, \bar{u}) = (w^1, u^1)$. Складывая полученные соотношения, получим

$$\int\limits_{\Omega} d_{ijkl}(w^1_{,kl} - w^2_{,kl})(w^1_{,ij} - w^2_{,ij}) + \int\limits_{\gamma} a(u^1_{xx} - u^2_{xx})^2 \leq 0.$$

С другой стороны, из условий положительной определенности коэффициентов $d_{ijkl}$ и $a$ следует, что

$$\int\limits_{\Omega} d_{ijkl}(w^1_{,kl} - w^2_{,kl})(w^1_{,ij} - w^2_{,ij}) + \int\limits_{\gamma} a(u^1_{xx} - u^2_{xx})^2 \geq 0.$$

Пришли к противоречию. Откуда и следует единственность решения.

## § 2. Дифференциальная постановка задачи

Для того чтобы сформулировать дифференциальную постановку задачи, приведем сначала следующие вспомогательные выкладки. Для этого будем предполагать, что кривую $\gamma$ можно продолжить до замкнутой кривой $\Sigma$ класса $C^{1,1}$, содержащейся в области $\Omega$. При этом $\Omega$ разбивается на две подобласти: внутреннюю $\Omega_1$ и внешнюю $\Omega_2$. Границей области $\Omega_1$ будет служить кривая $\Sigma$, внешнюю нормаль к которой обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, а границей области $\Omega_2$ служит $\Sigma \cup \Gamma$, такая что $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$. Пусть $\Omega_\gamma = \Omega \backslash \bar{\gamma}$, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}$ (рис. 1).

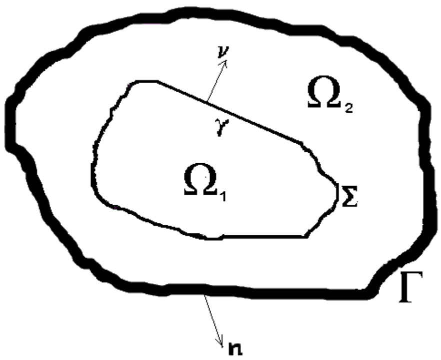


Рис. 1

Рассмотрим пространство функций

$$V = \{m = \{m_{ij}\} \in L^2(\Omega_1) |\ m_{ij,ij} \in L^2(\Omega_1)\}$$

с нормой

$$\|m\|^2_V = \|m\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|m_{ij,ij}\|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

и введем обозначения

$$m_\nu = m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad t^\nu(m) = m_{ij,k}s_k s_j \nu_i + m_{ij,j}\nu_i, \quad s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1).$$

Введем также пространства $H^{i/2}(\Sigma),\ i = 1, 3$, с нормами

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Sigma)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\Sigma)} + \int_\Sigma \int_\Sigma \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy\ ,$$

$$\|\varphi\|^2_{H^{3/2}(\Sigma)} = \|\varphi\|^2_{H^1(\Sigma)} + \int_\Sigma \int_\Sigma \frac{|\nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy \ .$$

Обозначим через $H^{-1/2}(\Sigma), H^{-3/2}(\Sigma)$ пространства, сопряженные к $H^{1/2}(\Sigma), H^{3/2}(\Sigma)$ соответственно. Отметим, что для $m \in V$ можно определить след $m_\nu^\pm$ на $\Sigma$ как элемент пространства $H^{-1/2}(\Sigma)$, и при этом оператор взятия следа непрерывен. Кроме того, можно определить $t^\nu(m)^\pm \in H^{-3/2}(\Sigma)$, так что справедлива формула Грина интегрирования по частям [10]

$$\int\limits_{\Omega_1} w m_{ij,ij} = \int\limits_{\Omega_1} m_{ij} w_{,ij} + \langle t^\nu(m)^-, w\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle m_\nu^-, \frac{\partial w}{\partial \nu}\rangle_{1/2,\Sigma} \ \ \forall w \in H^2(\Omega_1), \tag{5}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{i/2,\Sigma}$ обозначают двойственность между пространствами $H^{i/2}(\Sigma)$ и $H^{-i/2}(\Sigma)$, $i = 1, 3$, соответственно. Формула, аналогичная (5), имеет место и для области $\Omega_2$. В этом случае граница области $\Omega_2$ состоит из компонент $\Sigma$ и $\Gamma$. Будем использовать также пространства

$$H_{00}^{k-1/2}(\gamma) = \{\varphi \in H_0^{k-1/2}(\gamma) |\ \rho^{-1/2} D^\alpha \varphi \in L^2(\gamma), 0 \le |\alpha| \le k-1\}, \ \ k = 1, 2,$$

с нормами

$$\|\varphi\|^2_{H_{00}^{k-1/2}(\gamma)} = \|\varphi\|^2_{k-1/2,\gamma} + \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} \|\rho^{-1/2} D^\alpha \varphi\|^2_{0,\gamma},$$

где $\rho(x) = dist(x, \partial\gamma)$.

Прежде всего, заметим, что в области $\Omega_\gamma$ выполнено уравнение равновесия

$$(d_{ijkl} w_{,kl})_{,ij} = f \tag{6}$$

в смысле распределений. Действительно, возьмем произвольную бесконечно дифференцируемую и имеющую компактный носитель в $\Omega_\gamma$ функцию $\xi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Рассмотрим тестовые функции вида $(\bar{w}, \bar{u}) = (w \pm \xi, u)$, которые при выбранных условиях на $\xi$ являются элементами множества $K$. После подстановки выбранных значений $(\bar{w}, \bar{u})$ в (4) в качестве пробных функций получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} d_{ijkl} w_{,kl} \xi_{,ij} = \int\limits_{\Omega_\gamma} f\xi, \tag{7}$$

откуда следует уравнение равновесия (6).

Теперь выведем краевые условия на внутренней границе $\gamma$ в области $\Omega_\gamma$. Предположим, что решение $(w, u) \in K$ задачи (4) является достаточно гладкой функцией. Выберем в (4) тестовые функции в виде $(\bar{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u)$, где $\varphi \in H_0^2(\Omega)$, $\varphi \ge 0$ на $\gamma$. Получим

$$\int\limits_{\Omega} d_{ijkl} w_{,kl} \varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega} f\varphi \ge 0. \tag{8}$$

Заменяя область интегрирования $\Omega$ на $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и применяя формулу Грина вида (5) и уравнение (7), из (8) найдем

$$-\langle m_\nu^+ - m_\nu^-, \varphi_\nu\rangle_{1/2,\Sigma} + \langle t^\nu(m)^+ - t^\nu(m)^-, \varphi\rangle_{3/2,\Sigma} \ge 0. \tag{9}$$

Поскольку $\varphi_\nu$ являются произвольными функциями на $\Sigma$, то из неравенства (9) следует, что

$$\langle [m_\nu], \varphi\rangle_{1/2,\Sigma} = 0 \ \ \forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma), \tag{10}$$

$$\langle [t^\nu(m)], \varphi\rangle_{3/2,\Sigma} \geq 0, \ \ \forall \varphi \in H_0^2(\Omega), \ \ \varphi \geq 0 \ \text{ на } \ \gamma, \tag{11}$$

где $[v] = v^+ - v^-$, а $v^\pm$ соответствует значениям $v$ на $\Sigma^\pm$ согласно выбранному направлению нормали $\nu$. Отметим, что в соотношении (10) в качестве пробных функций можно выбрать $\bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ — продолжение нулем на $\Sigma$ функций $\varphi$ из пространства $H_{00}^{1/2}(\gamma)$, $\varphi \geq 0$ на $\gamma$. Известно, что $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi} \in H^{1/2}(\Sigma)$ [10]. Далее, подставляя в (4) пробные функции вида $(\bar{w}, \bar{u}) = (w, u + \psi)$, $\psi \in H_0^2(\gamma)$, $\psi \leq 0$ на $\gamma$, найдем

$$\int\limits_\gamma (a u_{xx})\psi_{xx} - \int\limits_\gamma g\psi \ \geq \ 0.$$

Следовательно,

$$(a u_{xx})_{xx} - g \leq 0 \text{ в смысле } H^{-2}(\gamma), \tag{12}$$

где $H^{-2}(\gamma)$ — пространство, сопряженное к $H_0^2(\gamma)$. Возьмем $(\bar{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u + \psi)$, $(\varphi, \psi) \in K$ в качестве пробных функций в неравенстве (4). Получим соотношение

$$\int\limits_\Omega d_{ijkl} w_{,kl} \varphi_{,ij} - \int\limits_\Omega f\varphi + \int\limits_\gamma a u_{xx}\psi_{xx} - \int\limits_\gamma g\psi \ \geq \ 0.$$

Также предварительно разбив область $\Omega$ на $\Omega_1$ и $\Omega_2$, применяя формулу Грина и условие (10), будем иметь

$$\langle [t^\nu(m)], \varphi\rangle_{3/2,\Sigma} + \langle (a u_{xx})_{xx} - g, \psi\rangle_{2,\gamma} \geq 0 \ \ \forall (\varphi, \psi) \in K, \tag{13}$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot\rangle_{2,\gamma}$ обозначают двойственность между $H^{-2}(\gamma)$ и $H_0^2(\gamma)$. Заметим, что условия (11), (12) вытекают из (13). Если последовательно выбрать в (4) тестовые функции вида $(\bar{w}, \bar{u}) = (0, 0)$, $(\bar{w}, \bar{u}) = 2(w, u)$, то получим

$$\int\limits_\Omega d_{ijkl} w_{,kl} w_{,ij} - \int\limits_\Omega f w + \int\limits_\gamma a u_{xx}^2 - \int\limits_\gamma g u = 0,$$

откуда следует равенство

$$\langle [t^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} + \langle (a u_{xx})_{xx} - g, u\rangle_{2,\gamma} = 0. \tag{14}$$

Отметим следствие из (13). Пусть функция $\psi$ определена на $\gamma$. Обозначим через $\varphi$ продолжение $\psi$ нулем вне $\gamma$, т. е.

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{на } \ \Sigma \setminus \gamma, \\ \psi & \text{на } \ \gamma, \end{cases}$$

тогда из (13) следует

$$\langle [t^\nu(m)], \varphi\rangle_{3/2,00,\gamma} + \langle (a u_{xx})_{xx} - g, \varphi\rangle_{2,\gamma} = 0, \tag{15}$$

где $\langle \cdot, \cdot\rangle_{3/2,00,\gamma}$ обозначает двойственность между $H_{00}^{-3/2}(\gamma)$ и $H_{00}^{3/2}(\gamma)$. Заметим, что $H^{-2}(\gamma)$ есть пространство, сопряженное к $H_0^2(\gamma)$, $H_0^2(\gamma) = H_{00}^2(\gamma)$, а вложение $H_{00}^2(\gamma) \subset$ $\subset H_{00}^{3/2}(\gamma)$ плотно и непрерывно, поэтому из (15) вытекает равенство

$$[t^\nu(m)] = -(a u_{xx})_{xx} + g \ \text{ на } \ \gamma. \tag{16}$$

Полученные выше формулы позволяют выписать дифференциальную постановку задачи (3), (4). Именно, требуется найти функции $w$, $u$, заданные на $\Omega_\gamma$ и $\gamma$, такие, что

$$(d_{ijkl}w_{,kl})_{,ij} = f \ \text{ в } \ \Omega_\gamma, \tag{17}$$

$$m_{ij} = -d_{ijkl}w_{,kl} \ \text{ в } \ \Omega_\gamma, \tag{18}$$

$$w = w_n = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{19}$$

$$w - u \geq 0, \ [w] = [w_\nu] = 0, \ [m_\nu] = 0 \text{ на } \ \gamma, \tag{20}$$

$$[t^\nu(m)] \geq 0, \ [t^\nu(m)](w-u) = 0 \text{ на } \ \gamma, \tag{21}$$

$$[t^\nu(m)] = -(au_{xx})_{xx} + g \text{ на } \ \gamma, \tag{22}$$

$$u = u_x = 0 \text{ на } \ \partial\gamma. \tag{23}$$

При этом (17) суть уравнение равновесия, (18) — уравнение состояния; $m_\nu$ — изгибающий момент, $t^\nu(m)$ — перерезывающая сила на границе. Соотношения (19), (23) обеспечивают защемление пластины на $\Gamma$ и балки на $\partial\gamma$. Первое условие в (20) описывает взаимное непроникание пластины и балки. Условие (22) задает уравнение балки. Последнее условие из (20) выполнено в смысле (10), первое условие из (21) вместе с условием (22) — в смысле неравенства (13), а второе условие из (21) — в смысле (14). Заметим, что в указанных выше формулах $\Sigma$ является произвольной замкнутой кривой класса $C^{1,1}$, содержащей $\gamma$.

Система краевых условий (19)–(23) является полной, в частности, из (17)–(23) можно вывести вариационное неравенство (3), (4).

Действительно, пусть $(w,u)$ — гладкая функция, принадлежащая множеству $K$. Умножим уравнение равновесия (17) на $\bar{w} - w$, а (22) на $\bar{u} - u$, где $(\bar{w}, \bar{u}) \in K$, проинтегрируем по $\Omega_1$ и $\Omega_2$ соответственно и сложим. Получим

$$\int\limits_\Omega d_{ijkl}w_{,kl}(\bar{w}_{,ij} - w_{,ij}) - \langle [t^\nu(m)], \bar{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma} + \langle [m_\nu], \bar{w}_\nu - w\rangle_{1/2,\Sigma} -$$
$$- \int\limits_\Omega f(\bar{w} - w) + \int\limits_\gamma [t^\nu(m)](\bar{u} - u) + \int\limits_\gamma au_{xx}(\bar{u}_{xx} - u_{xx}) - \int\limits_\gamma g(\bar{u} - u) = 0.$$

Для получения вариационного неравенства (4) легко доказывается, что

$$\langle [t^\nu(m)], \bar{w} - w\rangle_{3/2,\Sigma} - \langle [m_\nu], \bar{w}_\nu - w\rangle_{1/2,\Sigma} - \int\limits_\gamma [t^\nu(m)](\bar{u} - u) \geq 0.$$

Поскольку в предположении гладкости решения $(w,u)$ из вариационного неравенства (4) выведены краевые условия (19)–(22), а из уравнения равновесия (17) и из (22) с учетом краевых условий (19)–(22) получено неравенство (4), получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Задачи* (3), (4) *и* (17)–(23) *эквивалентны, кроме того, существует единственное решение* $(w,u)$ *задачи* (3), *которое является решением задачи* (4) *и* (17)–(23) *соответственно.*

## § 3. Смешанная постановка задачи

В этом разделе приведем еще одну эквивалентную формулировку задачи (17)–(23), которая по современной терминологии называется смешанной [7; 8]. Решение будет определяться в области с разрезом в более широком пространстве функций.

Введем в рассмотрение дополнительную функцию $M = au_{xx} - G$, где $G$ является решением краевой задачи

$$G_{xx} = g \text{ на } \gamma, \; G = 0 \text{ на } \partial\gamma.$$

Рассмотрим пространство функций [10]

$$H(\Omega_\gamma) = \{(m, M) | m = \{m_{ij}\}, i, j = 1, 2, \; M; \; m, m_{ij,ij} \in L^2(\Omega_\gamma), M \in L^2(\gamma)\} \tag{24}$$

с нормой

$$\|(m, M)\|^2_{H(\Omega_\gamma)} = \|m\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \|m_{ij,ij}\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \|M\|^2_{L^2(\gamma)}.$$

Задачу (17)–(23) перепишем в виде

$$-m_{ij,ij} = f \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{25}$$

$$m_{ij} = -d_{ijkl} w_{,kl} \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{26}$$

$$w = w_n = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{27}$$

$$w - u \geq 0, \; [w] = [w_\nu] = 0, \; [m_\nu] = 0 \text{ на } \gamma, \tag{28}$$

$$[t^\nu(m)] \geq 0, \; [t^\nu(m)](w - u) = 0 \text{ на } \gamma, \tag{29}$$

$$[t^\nu(m)] = -M_{xx} \text{ на } \gamma, \tag{30}$$

$$(M + G)a^{-1} = u_{xx} \text{ на } \gamma, \tag{31}$$

$$u = u_x = 0 \text{ на } \partial\gamma. \tag{32}$$

По аналогии с рассуждениями, которые проводились ранее, рассмотрим точную интерпретацию краевых условий задачи (25)–(32). Выберем в (4) тестовые функции в виде $(\bar{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u)$, где $\varphi \in H^2_0(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ на $\gamma$. Отсюда следует неравенство

$$\int\limits_\Omega m_{ij}\varphi_{,ij} - \int\limits_\Omega f\varphi \geq 0. \tag{33}$$

Используя формулу Грина вида (5) в неравенстве (33), в силу уравнения (25) имеем

$$-\langle [m_\nu], \varphi_\nu \rangle_{1/2,\Sigma} + \langle [t^\nu(m)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} \geq 0. \tag{34}$$

Из неравенства (34) следует, что последнее условие из (28) выполнено в смысле

$$\langle [m_\nu], \varphi \rangle_{1/2,\Sigma} = 0 \;\; \forall \varphi \in H^{1/2}(\Sigma). \tag{35}$$

Выберем в (4) пробные функции в виде $(\bar{w}, \bar{u}) = (w + \varphi, u + \psi)$, $(\varphi, \psi) \in K$. Первое условие из (29) вместе с (30) выполнено в виде неравенства

$$\langle [t^\nu(m)], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} + \langle M_{xx}, \psi \rangle_{2,\gamma} \geq 0 \;\; \forall (\phi, \psi) \in K. \tag{36}$$

Если последовательно выбрать в (4) тестовые функции вида $(\bar{w}, \bar{u}) = (0, 0)$, $(\bar{w}, \bar{u}) = 2(w, u)$, то получим

$$\langle [t^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} + \langle M_{xx}, u\rangle_{2,\gamma} = 0. \tag{37}$$

Второе условие из (29) выполнено в смысле равенства (37). Отметим также следствие из (36). Если

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{на } \Sigma \setminus \gamma, \\ \psi & \text{на } \gamma, \end{cases}$$

то из (36) следует

$$\langle [t^\nu(m)], \varphi\rangle_{3/2,00,\gamma} + \langle M_{xx}, \varphi\rangle_{2,\gamma} = 0, \tag{38}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{3/2,00,\gamma}$ обозначает двойственность между $H_{00}^{-3/2}(\gamma)$ и $H_{00}^{3/2}(\gamma)$. Заметим, что $H_0^2(\gamma) = H_{00}^2(\gamma)$, а вложение $H_{00}^2(\gamma) \subset H_{00}^{3/2}(\gamma)$ плотно и непрерывно, поэтому из (36) вытекает равенство

$$[t^\nu(m)] = -M_{xx} \text{ в смысле } H^{-2}(\gamma). \tag{39}$$

Теперь сформулируем смешанную постановку задачи. Для этого введем множество допустимых моментов

$$K(\Omega_\gamma) = \{(\bar m, \bar M) |\ \bar m = \{\bar m_{ij}\}, i,j = 1,2; \bar m, \bar m_{ijkl} \in L^2(\Omega_\gamma), \bar M \in L^2(\gamma);$$
$$[\bar m_\nu] = 0, [t^\nu(\bar m)] \geq 0, [t^\nu(\bar m)] = -\bar M_{xx} \text{ на } \gamma\}, \tag{40}$$

где краевые условия на $\gamma$ для $\bar m, \bar M$ выполнены в смысле (35), (36). Здесь следует заметить, что если $\bar m, \bar m_{ij,ij} \in L^2(\Omega)$, то скачки $[\bar m_\nu], [t^\nu(\bar m)]$ определены на $\Sigma$ как элементы $H^{-1/2}(\Sigma)$ и $H^{-3/2}(\Sigma)$ соответственно. При этом можно показать, что множество $K(\Omega_\gamma)$ является замкнутым и выпуклым, следовательно, слабо замкнутым в пространстве $H(\Omega_\gamma)$.

Запишем уравнение состояния (26) относительно $w_{,ij}$, тогда имеем

$$w_{,ij} = -b_{ijkl} m_{kl}, \quad i,j,k,l = 1,2, \tag{41}$$

где тензор $b_{ijkl}$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям тензора $d_{ijkl}$.

Умножим уравнение состояния (41) на элемент вида $\bar m - m$, а (31) — на $\bar M - M$, где $(\bar m, \bar M) \in K(\Omega_\gamma)$, проинтегрируем по $\Omega_\gamma$ и $\gamma$ с использованием формулы Грина (5) соответственно и сложим. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w(\bar m_{ij,ij} - m_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl}(\bar m_{ij} - m_{ij}) - \langle [t^\nu(\bar m)] - [t^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} +$$
$$+ \left\langle [\bar m_\nu] - [m_\nu], \frac{\partial w}{\partial \nu}\right\rangle_{1/2,\Sigma} + \int\limits_\gamma a^{-1}(M+G)(\bar M - M) - \int\limits_\gamma u_{xx}(\bar M - M) = 0. \tag{42}$$

Из (37) и определения множества $K(\Omega_\gamma)$ следует неравенство

$$-\langle [t^\nu(\bar m)] - [t^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} - \int\limits_\gamma u_{xx}(\bar M - M) \leq 0,$$

поэтому из (42) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w(\bar m_{ij,ij} - m_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl}(\bar m_{ij} - m_{ij}) + \int\limits_\Omega a^{-1}(M+G)(\bar M - M) \geq 0.$$

Таким образом, приходим к следующей смешанной постановке вариационной задачи (3), (4). Найти функции $w$, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, $M$, такие, что

$$w \in L^2(\Omega_\gamma), \quad (m, M) \in K(\Omega_\gamma), \tag{43}$$

$$-m_{ij,ij} = f \ \text{ в } \ \Omega_\gamma, \tag{44}$$

$$\int\limits_{\Omega\gamma} w(\bar{m}_{ij,ij} - m_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl}(\bar{m}_{ij} - m_{ij}) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} a^{-1}(M + G)(\bar{M} - M) \geq 0 \quad \forall (\bar{m}, \bar{M}) \in K(\Omega_\gamma). \tag{45}$$

Если задача (43)–(45) решена, то функцию $u$ однозначно восстанавливаем из (30)–(32), причем $u \in H_0^2(\gamma)$. Следует отметить, что перемещения пластин и балки в этой постановке формально находятся из достаточно широких классов функций, поэтому никаких краевых условий для перемещений данная задача не содержит. Тем не менее все краевые условия содержатся в предлагаемой формулировке задачи (доказательство см. ниже).

Целью дальнейших рассуждений является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 2.** *Существует единственное решение задачи* (43) – (45).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общая схема доказательства существования решения будет следующая. Рассмотрим регуляризованную задачу, решение которой зависит от положительного параметра $\varepsilon$. Затем установим разрешимость этой вспомогательной задачи и получим априорные оценки, равномерные по указанному параметру. В заключение осуществим переход к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства существования решения нам понадобится функция $(m^0, M^0) \in$ $\in K(\Omega_\gamma)$, которая удовлетворяет уравнению равновесия в смысле распределений

$$-m^0_{ij,ij} = f \ \text{ в } \ \Omega_\gamma. \tag{46}$$

Такую функцию можем найти из вариационного неравенства (4) с учетом уравнения состояния (26).

Пусть $\varepsilon$ — положительный параметр, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Рассмотрим регуляризованную задачу для нахождения функций $w^\varepsilon, m^\varepsilon, M^\varepsilon$ таких, что

$$w^\varepsilon \in L^2(\Omega_\gamma), (m^\varepsilon, M^\varepsilon) \in K(\Omega_\gamma), \tag{47}$$

$$\varepsilon w^\varepsilon - m^\varepsilon_{ij,ij} = f \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{48}$$

$$\int\limits_{\Omega\gamma} w^\varepsilon(\bar{m}_{ij,ij} - m^\varepsilon_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m^\varepsilon_{kl}(\bar{m}_{ij} - m^\varepsilon_{ij}) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} a^{-1}(M^\varepsilon + G)(\bar{M} - M^\varepsilon) \ \geq \ 0 \quad \forall (\bar{m}, \bar{M}) \in K(\Omega_\gamma). \tag{49}$$

Для доказательства разрешимости задачи (47)–(49) получим сначала априорные оценки решения. Предполагая, что решение $w^\varepsilon$ достаточно гладкое, умножим (48) на $w^\varepsilon$, проинтегрируем по области $\Omega_\gamma$. Тогда из (47)–(49) с учетом того, что $(m^0, M^0) \in K(\Omega_\gamma)$, получим

$$\int\limits_{\Omega\gamma} \varepsilon w^\varepsilon w^\varepsilon - \int\limits_{\Omega\gamma} m^\varepsilon_{ij,ij} w^\varepsilon = \int\limits_{\Omega\gamma} f w^\varepsilon,$$

$$-\int\limits_{\Omega\gamma} w^\varepsilon (m^0_{ij,ij} - m^\varepsilon_{ij,ij}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m^\varepsilon_{kl} (m^0_{ij} - m^\varepsilon_{ij}) - \int\limits_{\Omega} a^{-1}(M^\varepsilon + G)(M^0 - M^\varepsilon) \le 0$$

Складывая эти соотношения, имеем

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega_\gamma} w^\varepsilon w^\varepsilon - \int\limits_{\Omega_\gamma} w^\varepsilon (m^0_{ij,ij} - m^\varepsilon_{ij,ij}) - \int\limits_{\Omega_\gamma} m^\varepsilon_{ij,ij} w^\varepsilon - \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m^\varepsilon_{kl} (m^0_{ij} - m^\varepsilon_{ij}) -$$
$$- \int\limits_{\Omega_\gamma} f w^\varepsilon - \int\limits_{\Omega_\gamma} a^{-1}(M^\varepsilon + G)(M^0 - M^\varepsilon) \le 0.$$

Учитывая, что $m^0_{ij}$ удовлетворяют уравнению (46) и оценивая с помощью неравенства Коши, получим равномерную по $\varepsilon$ оценку

$$\varepsilon \|w^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \|m^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} + \|M^\varepsilon\|^2_{L^2(\gamma)} \le C. \qquad (50)$$

Поскольку из (48) вытекает справедливость уравнения

$$m^\varepsilon_{ij,ij} = \varepsilon w^\varepsilon - f \ \text{ в } \ \Omega_\gamma,$$

в силу (50) получим

$$\|m_{ij,ij}\|^2_{L^2(\Omega_\gamma)} \le C. \qquad (51)$$

Тогда из (50) и (51) имеем

$$\|(m^\varepsilon, M^\varepsilon)\|_{H(\Omega_\gamma)} \le C. \qquad (52)$$

Покажем, что для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует решение задачи (47)–(49). Из (48) выразим $w^\varepsilon$ и подставим в неравенство (49). В результате получим вариационное неравенство

$$(m^\varepsilon, M^\varepsilon) \in K(\Omega_\gamma),$$
$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\Omega_\gamma} (f + m^\varepsilon_{ij,ij})(\bar{m}_{ij,ij} - m^\varepsilon_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m^\varepsilon_{kl} (m_{ij} - m^\varepsilon_{ij}) +$$
$$+ \int\limits_{\gamma} a^{-1}(M^\varepsilon + G)(\bar{M} - M^\varepsilon) \ge 0 \ \ \forall (\bar{m}, \bar{M}) \in K(\Omega_\gamma). \qquad (53)$$

Легко видеть, что вариационное неравенство (53) эквивалентно задаче минимизации слабо полунепрерывного снизу и коэрцитивного функционала на слабо замкнутом множестве $K(\Omega_\gamma)$. Сформулируем это в виде теоремы.

**Теорема 3.** *Неравенство* (53) *эквивалентно задаче минимизации функционала*

$$F(m, M) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\Omega_\gamma} (m_{ij,ij})^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\Omega_\gamma} f m_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl} m_{ij} + \int\limits_{\gamma} a^{-1}(M + G) M$$

*на слабо замкнутом множестве* $K(\Omega_\gamma)$. *Решение данной задачи существует и единственно. При этом решение вариационного неравенства* (53) *существует при фиксированных* $\varepsilon > 0$. *Следовательно, существует решение регуляризованной задачи* (47)–(49) *при фиксированных* $\varepsilon$.

Далее из неравенства (49) заключаем, что в смысле распределений выполнено уравнение

$$w^{\varepsilon}_{,ij} = -b_{ijkl}m^{\varepsilon}_{kl}. \tag{54}$$

Для этого достаточно в (49) в качестве пробных функций выбрать $(\bar{m}, \bar{M}) = (m^{\varepsilon} \pm \pm\varphi, M^{\varepsilon})$, где $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_\gamma)$. Имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w^{\varepsilon}\varphi_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl}m^{\varepsilon}_{kl}\varphi_{ij} = 0. \tag{55}$$

Применяя формулу Грина (5) для областей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и принимая во внимание финитность функции $\varphi$ в области $\Omega_\gamma$, получим уравнение (54). Из уравнения (54) имеем, что $w^{\varepsilon}_{,ij} \in \in L^2(\Omega_\gamma)$, следовательно, $w^{\varepsilon} \in H^2(\Omega_\gamma)$, где

$$H^2(\Omega_\gamma) = \{w | w \in L^2(\Omega_\gamma),\ w_{,ij} \in L^2(\Omega_\gamma)\}.$$

Поскольку $\bar{m}_\nu$ и $t^\nu(\bar{m})$ принимают произвольные значения на внешней границе $\Gamma$ при $(\bar{m}, \bar{M}) \in K(\Omega_\gamma)$, то из (49) вытекает

$$w^{\varepsilon} = w^{\varepsilon}_n = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Отсюда следует, что $w^{\varepsilon} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)$, где

$$H^2_\Gamma(\Omega_\gamma) = \{w \in H^2(\Omega_\gamma) | w = w_n = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Можно воспользоваться неравенством [9]

$$\|w^{\varepsilon}\|_{H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)} \le C(\Omega_\gamma)\|w^{\varepsilon}_{,ij}\|_{L^2(\Omega_\gamma)} \tag{56}$$

с постоянной $C(\Omega_\gamma)$, зависящей лишь от области $\Omega_\gamma$, что приведет к равномерной по $\varepsilon$ оценке

$$\|w^{\varepsilon}\|_{H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)} \le C. \tag{57}$$

Оценки (52) и (57) дают возможность выбрать из последовательности $w^{\varepsilon}$, $m^{\varepsilon}$, $M^{\varepsilon}$ подпоследовательности, для которых сохраним прежние обозначения, такие, что при $\varepsilon \to 0$

$$w^{\varepsilon} \to w \text{ слабо в } H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \tag{58}$$

$$w^{\varepsilon} \to w \text{ сильно в } L^2(\Omega_\gamma), \tag{59}$$

$$(m^{\varepsilon}, M^{\varepsilon}) \to (m, M) \text{ слабо в } H(\Omega_\gamma). \tag{60}$$

Полученные сходимости позволяют осуществить предельный переход в (47)–(49), что приводит к следующей задаче. Найти функции $w$, $m = \{m_{ij}\},\ i, j = 1, 2,\ M$ такие, что

$$\begin{aligned}
& w \in L^2(\Omega_\gamma),\ (m, M) \in K(\Omega_\gamma),\\
& -m_{ij,ij} = f \text{ в } \Omega_\gamma,\\
& \int\limits_{\Omega_\gamma} w(\bar{m}_{ij,ij} - m_{ij,ij}) + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl}m_{kl}(\bar{m}_{ij} - m_{ij}) +\\
& \qquad\qquad + \int\limits_{\gamma} a^{-1}(M + G)(\bar{M} - M) \ge 0 \quad \forall(\bar{m}, \bar{M}) \in K(\Omega_\gamma),
\end{aligned}$$

т. е. к задаче (43)–(45). Существование решения доказано.

Единственность. Предположим, что два набора функций $(w^1, m^1, M^1)$, $(w^2, m^2, M^2)$ являются решениями задачи. Тогда из (45) получим, что $m^1 = m^2$, $M^1 = M^2$. Так как

$$w^i_{,ij} + d_{ijkl} m^i_{kl} = 0 \text{ в } \Omega_\gamma,\ i = 1, 2,$$

имеем $w^1_{,ij} - w^2_{,ij} = 0$. В силу неравенства (56) получим, что $w^1 = w^2$. Теорема 2 полностью доказана.

**Теорема 4.** *Смешанная формулировка* (43)–(45) *с условиями* (30)–(32) *и вариационная формулировка* (3), (4) *задачи* (17)–(23) *эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку смешанная формулировка получена из (17)–(23), достаточно проверить, что решение смешанной задачи (43)–(45) обладает необходимой гладкостью и удовлетворяет всем нужным краевым условиям. Выберем пробные функции $(\bar m, \bar M) = (m \pm \tilde m, M)$, где $\tilde m \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Тогда $(\bar m, \bar M) \in K(\Omega_\gamma)$ и из (45) следует уравнение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w \tilde m_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl} \tilde m_{ij} = 0.$$

Применяя формулу Грина для областей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и принимая во внимание финитность функции $\tilde m$ в области $\Omega_\gamma$, получим, что в смысле распределений выполнено уравнение

$$w_{,ij} = -b_{ijkl} m_{kl}. \tag{61}$$

Отсюда заключаем, что $w_{,ij} \in L^2(\Omega_\gamma)$, следовательно, $w \in H^2(\Omega_\gamma)$. Поскольку $\tilde m_\nu$ и $t^\nu(\tilde m)$ принимают произвольные значения на внешней границе $\Gamma$ при $(\bar m, \bar M) \in K(\Omega_\gamma)$, то из (45) вытекает, что

$$w = w_n = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Отсюда следует $w \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)$.

Покажем, что

$$[w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma. \tag{62}$$

В области $\Omega_\gamma$ будем решать следующую краевую задачу. Именно, требуется найти функцию $\tilde w$ такую, что

$$(d_{ijkl} \tilde w_{,kl})_{,ij} = f \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{63}$$

$$\tilde m_{ij} = -d_{ijkl} \tilde w_{,kl} \text{ в } \Omega_\gamma, \tag{64}$$

$$\tilde w = \tilde w_n = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{65}$$

$$\tilde m_\nu = \varphi,\ t^\nu(\tilde m) = \psi \text{ на } \gamma^\pm. \tag{66}$$

Здесь $\varphi, \psi$ — произвольные функции из $L^2(\gamma)$.

Задача (63)–(66) допускает вариационную постановку. Можно решить задачу минимизации функционала энергии

$$\inf_{\tilde w \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma} d_{ijkl} \tilde w_{,kl} \tilde w_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f \tilde w - \int\limits_\gamma \psi [\tilde w] + \int\limits_\gamma \varphi \Big[ \frac{\partial \tilde w}{\partial \nu} \Big] \right\} \tag{67}$$

в пространстве $H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)$ и записать в виде следующего тождества:

$$\tilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl}\upsilon_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\upsilon - \int\limits_\gamma t^\nu(\tilde{m})[\upsilon] + \int\limits_\gamma \tilde{m}_\nu\Big[\frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\Big] = 0 \quad \forall\upsilon \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)\,. \quad (68)$$

Очевидно, тождество (68) имеет (единственное) решение, поскольку функционал обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу.

Далее заметим, что решение вариационной задачи (68) обладает свойством

$$[t^\nu(\tilde{m})] = 0 \text{ в смысле } H^{-3/2}(\Sigma),$$
$$[\tilde{m}_\nu] = 0 \text{ в смысле } H^{-1/2}(\Sigma).$$

Возьмем в (45) тестовые функции вида $(\bar{m}, \bar{M}) = (m \pm \tilde{m}, M)$, где $\tilde{m} = \{\tilde{m}_{ij}\}$, $\tilde{w}_{,ij} = -b_{ijkl}\tilde{m}_{kl}$, $i,j = 1,2$. Подставляя, получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w\tilde{m}_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl}m_{kl}\tilde{m}_{ij} = 0.$$

Применяя формулу Грина (5), находим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w_{,ij}\tilde{m}_{ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl}m_{kl}\tilde{m}_{ij} + \big\langle [t^\nu(\tilde{m})], w\big\rangle_{3/2,\Sigma} - \Big\langle [\tilde{m}_\nu], \frac{\partial w}{\partial\nu}\Big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0,$$

из которого в силу уравнения (61) следует, что

$$\big\langle [t^\nu(\tilde{m})], w\big\rangle_{3/2,\Sigma} - \Big\langle [\tilde{m}_\nu], \frac{\partial w}{\partial\nu}\Big\rangle_{1/2,\Sigma} = 0.$$

Из (68) получим равенство

$$\big\langle [t^\nu(\tilde{m})], w\big\rangle_{3/2,\Sigma} - \Big\langle [\tilde{m}_\nu], \frac{\partial w}{\partial\nu}\Big\rangle_{1/2,\Sigma} = \int\limits_\gamma \psi[w] - \int\limits_\gamma \varphi\Big[\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big] \quad \forall w \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma).$$

Следовательно,

$$\int\limits_\gamma \psi[w] - \int\limits_\gamma \varphi\Big[\frac{\partial w}{\partial\nu}\Big] = 0.$$

Так как $\varphi, \psi$ — произвольные функции, то отсюда убеждаемся в справедливости краевых условий (62). В частности, получаем, что $w \in H^2_0(\Omega)$.

Далее проверим справедливость

$$[t^\nu(m)](w-u) = 0 \text{ на } \gamma. \quad (69)$$

Подставим в неравенство (45) тестовые функции сначала $(\bar{m}, \bar{M}) = (0,0)$, а затем $(\bar{m}, \bar{M}) = 2(m, M)$. С учетом (31) получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} wm_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl}m_{kl}m_{ij} + \int\limits_\gamma u_{xx}M = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\langle [t^\nu(m)], w\rangle_{3/2,\Sigma} + \langle M_{xx}, u\rangle_{2,\gamma} = 0.$$

Отсюда следует (69).

А теперь докажем, что решение краевой задачи (43)–(45) удовлетворяет краевому условию

$$w - u \geq 0 \ \text{ на } \ \gamma. \tag{70}$$

В области $\Omega_\gamma$ будем решать следующую краевую задачу. Именно, требуется найти функцию $\tilde{w}$ такую, что

$$(d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl})_{,ij} = f \ \text{ на } \ \Omega_\gamma, \tag{71}$$

$$\tilde{m}_{ij} = -d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl} \ \text{ в } \ \Omega_\gamma, \tag{72}$$

$$\tilde{w} = \tilde{w}_n = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{73}$$

$$\tilde{m}_\nu = 0 \ \text{ на } \ \gamma^\pm, \tag{74}$$

$$t^\nu(\tilde{m}) = h \ \text{ на } \ \gamma^+, \ \ t^\nu(\tilde{m}) = 0 \ \text{ на } \ \gamma^-, \tag{75}$$

где $h \geq 0$ — произвольная функция из пространства $L^2(\gamma)$. Задача (71)–(75) также допускает вариационную постановку. Преобразуем задачу (71)–(75) к задаче минимизации функционала энергии в пространстве $H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)$, такой что

$$\inf_{\tilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma)} \Big\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\gamma} d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl}\tilde{w}_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\tilde{w} - \int\limits_{\gamma^+} h\tilde{w} \Big\}.$$

Запишем в виде следующего тождества:

$$\tilde{w} \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma), \quad \int\limits_{\Omega_\gamma} d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl}\varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\varphi - \int\limits_{\gamma^+} h\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H^2_\Gamma(\Omega_\gamma). \tag{76}$$

Очевидно, равенство (76) также имеет (единственное) решение, поскольку функционал обладает свойствами коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу. Положим в (76) $\tilde{m}_{ij} = -d_{ijkl}\tilde{w}_{,kl}, \ \ i,j = 1,2$, тогда получим

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} \tilde{m}_{ij}\varphi_{,ij} - \int\limits_{\Omega_\gamma} f\varphi - \int\limits_{\gamma^+} h\varphi \ = \ 0.$$

Интегрируя, имеем

$$\langle [t^\nu(\tilde{m})], \varphi \rangle_{3/2,\Sigma} = \int\limits_{\gamma} h\varphi \ \ \forall \varphi \in H^2_0(\Omega). \tag{77}$$

Решим еще одну задачу. Найдем функцию $\tilde{u}$:

$$(a\tilde{u}_{xx})_{xx} = -h \ \text{ на } \ \gamma, \tag{78}$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}_x = 0 \ \text{ на } \ \partial\gamma. \tag{79}$$

Решение задачи $\tilde{u}$, очевидно, существует, причем $\tilde{u} \in H^2_0(\gamma)$.

Полагая в (78), (79) $\tilde{M} = a\tilde{u}_{xx}$, находим

$$\langle \tilde{M}_{xx}, \psi \rangle_{2,\gamma} = -\int\limits_{\gamma} h\psi \quad \forall \psi \in H^2_0(\gamma). \tag{80}$$

Складывая (77) и (80), будем иметь соотношение

$$\big\langle [t^\nu(\tilde{m})], \varphi \big\rangle_{3/2,\Sigma} + \big\langle \tilde{M}_{xx}, \psi \big\rangle_{2,\gamma} = \int\limits_{\gamma} h(\varphi - \psi). \tag{81}$$

Если $\varphi - \psi \geq 0$ на $\gamma$, то отсюда получим

$$\big\langle [t^\nu(\tilde{m})], \varphi \big\rangle_{3/2,\Sigma} + \big\langle \tilde{M}_{xx}, \psi \big\rangle_{2,\gamma} \geq 0,$$

поэтому $(\tilde{m}, \tilde{M}) \in K(\Omega_\gamma)$. Следовательно, подстановка $(\bar{m}, \bar{M}) = (m, M) + (\tilde{m}, \tilde{M})$ в (45) является допустимой, что приводит к неравенству

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} w\tilde{m}_{ij,ij} + \int\limits_{\Omega_\gamma} b_{ijkl} m_{kl} \tilde{m}_{ij} + \int\limits_{\gamma} a^{-1}(M+G)\,\tilde{M} \;\geq\; 0.$$

Отсюда получим соотношение

$$\big\langle [t^\nu(\tilde{m})], w \big\rangle_{3/2,\Sigma} + \big\langle \tilde{M}_{xx}, u \big\rangle_{2,\gamma} \geq 0.$$

В силу определения $\tilde{m}, \tilde{M}$ это означает, что

$$\int\limits_{\gamma} h(w-u) \geq 0.$$

Поскольку $h \geq 0$ — произвольная функция на $\gamma$, то отсюда следует $w - u \geq 0$ на $\gamma$, что и требовалось. Таким образом, теорема полностью доказана.

## Список литературы


1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

2. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.

3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

4. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во МГАПИ, 1997.

5. *Хлуднев А. М., Хоффманн К.-Х., Боткин Н. Д.* Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 707–717.

6. *Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И. и др.* Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.

7. *Хлуднев А. М.* Метод гладких областей в задаче о равновесии пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1388–1400.

8. *Хлуднев А. М.* Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи математики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.

9. *Хлуднев А. М.* Регуляризация и существование решений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 670–682.

10. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. WIT Press. Southampton – Boston, 2000.

11. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and Control in Solid Mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1997.

12. *Schild B.* On the Coincidence Set in Biharmonic Variational Inequalities with Thin Obstacles // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. 1986 IV. Ser. 13. Vol. 4. P. 559–616.

*Материал поступил в редколлегию 26.06.2008*

**Адрес автора**
НЕУСТРОЕВА Наталья Валериановна
РОССИЯ, 677000, Якутск
Якутский государственный
университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики
e-mail: NNataliaV@mail.ru