УДК 510.51

А. А. Ревенко

АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМАТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОРДИНАЛОВ И ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ НИЗКОГО РАНГА*

В [10] показано, что автоматные линейные порядки имеют конечный FC-ранг. В этой работе дан положительный ответ на вопрос о существовании вычислимого изоморфизма между автоматными представлениями ординалов и линейных порядков FC-ранга не выше 2. Приведены примеры автоматных линейных порядков с достаточно сложной структурой. Доказывается теорема о том, что любой автоматный линейный порядок определим формулами первого порядка с дополнительным квантором $\exists^{\infty}$ в подходящем автоматном линейном порядке FC-ранга 1.

Ключевые слова: конечные автоматы, автоматные структуры, вычислимый изоморфизм, автоматные представления, линейные порядки, ранг линейного порядка.

Введение

В этой работе речь пойдет о структурах, задаваемых конечными автоматами. Интерес в изучении таких структур вызван различными причинами, которые обобщает одна — некоторые алгоритмические проблемы таких структур являются вычислимыми.

Автоматная структура — это структура с конечным числом n-арных отношений, для которой основное множество и все отношения распознаются подходящими конечными автоматами [7]. Автомат, распознающий отношение, работает синхронно на n-ках слов (записанных друг под другом и выравненных по левому краю, для выравнивания справа на пустые места записывается специальный символ), переходы в таких автоматах осуществляются по n-арным буквам, i-ые координаты которых являются соответствующими символами слова, являющегося i-й координатой отношения. Далее, структуры изоморфные некоторой автоматной структуре, т. е. автоматно-представимые, также будем называть автоматными.

N-арные отношения образуют класс n-арных регулярных языков. Эффективная замкнутость класса n-арных регулярных языков относительно объединения, дополнения и проекции, а также эффективная разрешимость проблемы пустоты языка обеспечили разрешимость теории первого порядка для автоматных структур. Тем самым доказательство разрешимости теории первого порядка структуры сводится к нахождению автоматного представления для этой структуры. Таким образом, из автоматности структур $(N, +)$ и $(Q, \leq)$ следует разрешимость их теорий первого порядка [6].

Интересным оказался тот факт, что такие простые структуры, как $(N, \times)$ или безатомная булева алгебра не имеют автоматного представления.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4413.2006.1).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 76–88

Автоматные структуры могут иметь множество автоматных представлений. Отсюда вытекает следующий вопрос:

Вопрос 1. Будут ли два автоматных представления автоматной структуры вычислимо изоморфны?

Здесь будет сделана попытка ответить на этот вопрос для автоматных линейных порядков.

В области автоматных линейных порядков было получено немало интересных результатов [4; 5; 8; 11]. Деломе в 2001 г. было доказано, что наименьший ординал, не имеющий автоматного представления, есть ω^ω [4]. В дальнейшем этот результат был обобщен Рубиным и Хусаиновым [10] в 2005 г.: если факторизовать произвольный линейный порядок по отношению эквивалентности «между x и y конечное число элементов», то наименьшее число факторизаций, за которое мы получим линейный порядок **1** (порядок, состоящий из одного элемента) или плотный линейный порядок, назовем FC-рангом линейного порядка. И тогда FC-ранг автоматного линейного порядка конечен.

Удалось получить положительный ответ на вопрос об автоустойчивости линейных порядков относительно автоматных представлений для всех автоматных ординалов и для разреженных линейных порядков имеющих FC-ранг не выше 2. Под автоустойчивостью относительно автоматных представлений здесь понимается свойство, описанное в вопросе 1.

Кроме того, был получен еще один интересный результат, об определимости любого автоматного линейного порядка в подходящем автоматном линейном порядке ранга 1. А также построено несколько примеров автоматных линейных порядков, имеющих достаточно сложную структуру.

§ 1. Основные понятия и предварительные сведения

Мы будем работать с конечными автоматами и структурами, задаваемыми ими.

Пусть Σ — конечный набор символов, называемый алфавитом, конечная последовательность символов алфавита называется словом алфавита, пустая последовательность есть пустое слово — e, множество всех слов алфавита Σ обозначим Σ^* (Σ^+ — множество непустых слов алфавита Σ). Языком алфавита Σ будем называть любое $L \subseteq \Sigma^*$.

Определение 1. Недетерминированным конечным автоматом над алфавитом Σ называется четверка (Q, i, Δ, F), где Q — конечное множество состояний, $i \in Q$ — выделенное начальное состояние, $\Delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q$ — отношение перехода и $F \subseteq Q$ — множество заключительных состояний.

Пусть дан недетерминированный конечный автомат $\mathcal{A} = (Q, i, \Delta, F)$, будем говорить, что язык $L \subseteq \Sigma^*$ распознается автоматом $\mathcal{A}$, если для любого слова $\omega \in L$, где ω есть последовательность $a_1 a_2 \dots a_n$ букв алфавита Σ, существует последовательность переходов $(i, a_1, q_1) \in \Delta, (q_1, a_1, q_2) \in \Delta, \dots, (q_{n-1}, a_n, q_n) \in \Delta$, $q_n \in F$, и любое слово из Σ^* с таким свойством лежит в L.

Итак, пусть Σ — конечный алфавит и $\perp \notin \Sigma$, обозначим через $\Sigma_\perp$ алфавит $\Sigma \cup \{\perp\}$.

Определение 2. Назовем конволюцией кортежа $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in (\Sigma^*)^n$ кортеж $(\omega_1, \ldots, \omega_n)_\perp \in (\Sigma_\perp^*)^n$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов ω_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.

Конволюция отношения $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ — это отношение $R_\perp \subseteq (\Sigma_\perp^*)^n$, полученное как множество конволюций всех кортежей отношения R.

Определение 3. Структура $(A, R_1, \ldots, R_k)$ называется автоматной над алфавитом Σ, если ее носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и конволюции всех отношений $R_i \subseteq (\Sigma_\perp^*)^{n_i}$ распознаются некоторыми конечными автоматами над алфавитом Σ.

Будем говорить, что структура имеет автоматное представление, если она изоморфна автоматной структуре над некоторым алфавитом. Иногда будем теми же буквами обозначать и носитель самой структуры, и носитель изоморфной ей автоматной структуры, так же будем поступать и с отношениям. Иногда будем говорить, что отношение распознается автоматом, подразумевая, что автоматом распознается конволюция отношения.

Далее опишем некоторые порядки на Σ^*.

Определение 4. Пусть Σ — конечный алфавит и $x, y \in \Sigma^*$. Будем говорить, что x является префиксом y и писать $x \preceq_p y$, если для некоторого $z \in \Sigma^*$ $y = xz$. Если z — непустое слово, то x есть собственный префикс y, $x \prec_p y$.

Отношение $\prec_p$ — частичный порядок на Σ^*.

Зафиксировав линейный порядок $<$ на Σ, определим лексикографический порядок $<_{lex}$ следующим образом: для $x, y \in \Sigma^*$ $\;x <_{lex} y$, если $x \prec_p y$, или $x = uav, y = ubw$, где $u, v, w \in \Sigma^*$, $a, b \in \Sigma$ и $a < b$. Отношение $<_{lex}$ — линейный порядок на Σ^*.

Опишем еще один линейный порядок на Σ^*, для которого $x <_{llex} y$, если $|x| < |y|$, или $|x| = |y|$ и $x <_{lex} y$, где $|x|$ — длина слова x. Этот порядок, очевидно, является полным.

Отношение $<_{llex}$ — лексикографический порядок с учетом длины. Используя теорему Клини о том, что язык регулярен (распознается конечным автоматом) в том и только в том случае, когда он получен из букв алфавита применением конечного числа раз операций объединения, конкатенации и звездочки Клини, получим, что $<_{lex}$ и $<_{llex}$ — автоматные порядки над $\Sigma = \{0, 1\}$ с $0 < 1$. Будем отождествлять запись регулярного выражения с языком, задаваемым им.

$$
\begin{aligned}
((\Sigma^*)^2)_\perp &= (\Sigma^2)^*\Big([\left(\begin{smallmatrix}\perp\\0\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}\perp\\1\end{smallmatrix}\right)]^*|[\left(\begin{smallmatrix}0\\\perp\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}1\\\perp\end{smallmatrix}\right)]^*\Big),\\
(<_{lex})_\perp &= [\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]^*\,[[\left(\begin{smallmatrix}\perp\\0\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}\perp\\1\end{smallmatrix}\right)]^+|\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)((\Sigma^*)^2)_\perp],\\
(<_{llex})_\perp &= \Big[[\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]^*\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)(\Sigma^2)^*\Big]\Big|\Big[(\Sigma^2)^*(\left(\begin{smallmatrix}\perp\\0\end{smallmatrix}\right)|\left(\begin{smallmatrix}\perp\\1\end{smallmatrix}\right))^+\Big].
\end{aligned}
$$

Для небинарных алфавитов регулярные выражения записываются аналогично.

Отсюда также видно, что для произвольного алфавита Σ n-местное отношение $(\Sigma^*)^n$ на Σ^* распознается автоматом.

Мы показали, что $(\Sigma^*, <_{lex})$ и $(\Sigma^*, <_{llex})$ — автоматные структуры. Структуры $(A, <_{lex}^A)$ и $(A, <_{llex}^A)$, где $A \subseteq \Sigma^*$ тоже являются автоматными, так как $A_\perp^2$ — автоматна (см. [10] или далее этот факт будет получен следствием одной из теорем) и $(<^A_{lex})_\perp = A^2_\perp \cap (<_{lex})_\perp$, $(<^A_{llex})_\perp = A^2_\perp \cap (<_{llex})_\perp$. Понятно также, что и нестрогие порядки будут автоматны: $(\leq_{lex})_\perp = (<_{lex})_\perp \cup [\binom{0}{0}|\binom{1}{1}]^*$, $(\leq_{llex})_\perp = (<_{llex})_\perp \cup [\binom{0}{0}|\binom{1}{1}]^*$.

Заметим также, что для произвольного регулярного множества A произвольного алфавита Σ отношение равенства на A будет автоматным отношением.

Структуры сигнатуры $\sigma = \{\leq^2\}$, в которых выполнены аксиомы рефлексивности, транзитивности и антисимметричности для отношения $\leq^2$, будем называть порядками и обозначать рукописными буквами, основное множество порядка будем обозначать (там, где не введены другие обозначения) той же заглавной буквой, а порядок на нем — значком $\leq$ с индексом основного множества, например, $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$.

Линейный порядок $\mathcal{L} = (L, \leq)$ называется *плотным*, если для любых $x, y \in L$ и $x < y$ существует $z \in L$ такое, что $x < z < y$. Линейный порядок называется *разреженным*, если он не содержит нетривиального плотного подпорядка.

Пример 1. Порядки $(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq)$ и $(\mathbb{Q}, \leq)$ являются автоматными.

Пусть $\Sigma = \{1\}$, тогда $(1^*, \leq_{lex}) \cong (\mathbb{N}, \leq)$.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и $0 < 1$, тогда $(0^*1|1^*1, \leq_{lex}) \cong (\mathbb{Z}, \leq)$.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}$ и $0 < 1$, тогда $(\Sigma^*1, \leq_{lex}) \cong (\mathbb{Q}, \leq)$. □

Введем квантор $\exists^\infty$, обозначающий «существует бесконечно много», и для $k, m \in N$, $0 \leq k < m$, $m > 1$ квантор $\exists^{(k,m)}$, обозначающий «существует k по модулю m много».

Теорема 1. *Если $\mathcal{A}$ — автоматна над алфавитом Σ, то существует алгоритм, строящий по отношению R, определимому в $\mathcal{A}$ формулой первого порядка с дополнительными кванторами, автомат, распознающий $R_\perp$. Следовательно, теория первого порядка с дополнительными кванторами для $\mathcal{A}$ разрешима.*

Эта теорема была доказана в различных формулировках (с кванторами и без) такими авторами, как Ходгсон, Хусаинов, Нейроуд, Блюменсат, Градел, Рубин, Стефан. Первым для случая с квантором $\exists^\infty$ ее доказал Блюменсат [3]. Приведем доказательство этой теоремы только для случая формулы первого порядка с дополнительным квантором $\exists^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводим индукцией по сложности формулы Φ, определяющей n-местное отношение R.

Пусть Φ атомарная, тогда она является одним из отношений R_i в автоматной структуре $\mathcal{A}$, и искомый автомат — автомат, распознающий конволюцию соответствующего отношения.

Если $\Phi(\overline{x}) = \Phi_1(\overline{x}) \diamondsuit \Phi_2(\overline{x})$ $(\diamondsuit \in \{\&, \vee\})$, тогда по предположению индукции можем построить автомат $\mathcal{A}_1 = (Q_1, i_1, \Delta_1, F_1)$, распознающий $(\Phi_1(\overline{x}))_\perp$ и автомат $\mathcal{A}_2 = (Q_2, i_2, \Delta_2, F_2)$, распознающий $(\Phi_2(\overline{x}))_\perp$. Далее строим автомат для $(\Phi(\overline{x}))_\perp$ следующим образом: $\mathcal{A}_\diamondsuit = (Q_1 \times Q_2, i, \Delta, F_\diamondsuit)$, где $i = (i_1, i_2)$ и $\Delta((p, q), a) = (\Delta_1(p, a),\ \Delta_2(q, a))$. Для $\diamondsuit \in \{\&, \vee\}$ определим $F_\diamondsuit$ как: $(F_1 \times Q_2)\ \overline{\diamondsuit}\ (Q_1 \times F_2)$, где $\overline{\&} = \cap$ и $\overline{\vee} = \cup$. Легко видеть, что так определенные автоматы будут распознавать соответствующие конволюции отношений.

Если $\Phi(\overline{x}) = \neg\Phi_2(\overline{x})$, тогда по предположению индукции можем построить автомат $\mathcal{A}_2 = (Q_2, i_2, \Delta_2, F_2)$, распознающий $(\Phi_2(\overline{x}))_\perp$. А также можем построить автомат $\mathcal{A}_1 =$

$= (Q_1, i_1, \Delta_1, F_1)$, распознающий отношение $((\Sigma^*)^n)_\perp$. Тогда автомат $\mathcal{A} = (Q_1 \times Q_2, i, \Delta, F)$, где $i = (i_1, i_2)$, $\Delta((p,q), a) = (\Delta_1(p,a), \Delta_2(q,a))$ и $F = (F_1 \times Q_2) \setminus (Q_1 \times F_2)$, будет распознавать отношение, задаваемое $\Phi(\overline{x})$.

Случай с импликацией можно не рассматривать, так как формула вида $\Phi_1(\overline{x}) \to \Phi_2(\overline{x})$ эквивалентна формуле $\neg\Phi_1(\overline{x}) \vee \Phi_2(\overline{x})$.

В случае $\Phi(\overline{x}) = \exists y \Phi_1(y, \overline{x})$ по предположению индукции можно построить автомат $\mathcal{A}_1 = (Q_1, i_1, \Delta_1, F_1)$, распознающий $(\Phi_1(y, \overline{x}))_\perp$. Теперь по этому автомату конструируем автомат $\mathcal{A} = (Q_1, i_1, \Delta, F)$ для распознавания $\Phi(\overline{x})$ следующим образом: $q \in \Delta(p, (a_1, \ldots, a_n))$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1(p, (a_0, a_1, \ldots, a_n)) = q$ для некоторого $a_0 \in \Sigma_\perp$, а F определим как множество состояний, из которых в автомате $\mathcal{A}_1$ существует путь по слову $(x, e, \ldots, e)_\perp$ в заключительное состояние. Полученный автомат будет распознавать слово $(x_1, \ldots, x_n)_\perp$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}_1$ существует путь вдоль слова $(y_1, x_1, \ldots, x_n)_\perp$ из начального состояния в некоторое состояние q, и существует путь по слову $(y_2, e, \ldots, e)_\perp$ из q в заключительное состояние, т. е. тогда и только тогда, когда для некоторых слов y_1, y_2 автоматом $\mathcal{A}_1$ распознается слово $(y_1 \cdot y_2, x_1, \ldots, x_n)_\perp$. Таким образом, $L(\mathcal{A}) = \{\overline{x}_\perp \mid (\exists y)(y, \overline{x})_\perp \in (\Phi_1)_\perp)\} = (\{\overline{x} \mid (\exists y)(y, \overline{x}) \in \Phi_1\})_\perp$.

Случай с квантором всеобщности можно не рассматривать, так как формула вида $\forall x\, \Phi(\overline{x})$ эквивалентна формуле $\neg\, \exists x\, \neg\, \Phi(\overline{x})$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\Phi(\overline{x}) = (\exists^\infty y)\Phi_1(y, \overline{x})$. Для этого расширим структуру лексикографическим порядком с учетом длины, который автоматен, тогда $\Phi(\overline{x})$ эквивалентна формуле первого порядка: $(\forall z)(\exists y)\, [z <_{llex} y \,\&\, \Phi_1(y, \overline{x})]$. Таким образом, Φ определима в расширенной автоматной структуре формулой первого порядка без дополнительных кванторов, и из ранее рассмотренных случаев следует, что можно эффективно построить автомат, распознающий задаваемое Φ отношение. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{L}_1 = (L_1, \leq_1)$ и $\mathcal{L}_2 = (L_2, \leq_2)$ — автоматные линейные порядки, тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ — автоматный линейный порядок.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ_1 — алфавит автоматного представления $\mathcal{L}_1$, Σ_2 — алфавит $\mathcal{L}_2$. Можно предполагать, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Рассмотрим автоматную структуру $\{(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*, \leq_1, \leq_2, L_1, L_2\}$. В этой структуре формульно определимо множество $L = L_1 \times L_2$: $L(x, y) \risingdotseq L_1(x) \,\&\, L_2(y)$, следовательно, это множество распознается КА (в алфавите $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^2_\perp$); также формульно определим порядок $\leq (x_1, y_1, x_2, y_2) \risingdotseq (x_1 <_1 y_1) \vee ((x_1 = y_1) \,\&\, (x_2 \leq_2 y_2))$, который тоже будет распознаваться КА в том же алфавите. Отношение равенства, использованное в последней формуле, как ранее было отмечено, является автоматным, а строгий порядок может быть записан формулой: $< (x, y) \risingdotseq (x \leq y) \,\&\, \neg\, (x = y)$.

Итак, получили автоматное представление $\mathcal{L} = (L, \leq)$ в алфавите $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^2_\perp$. $\square$

Из доказательства выше можно извлечь доказательство того, что $(L \times L)_\perp = L^2_\perp$ распознается некоторым КА, если L распознается КА.

Пусть $\mathcal{L} = (L, \leq)$ — линейный порядок, определим *конденсацию* c — отображение из L в множество непустых интервалов L, такое, что $c(x) = c(y)$ тогда и только тогда, когда $[x, y]$ — конечный интервал в $\mathcal{L}$. Применив один раз отображение конденсации, получим линейный порядок на непустых интервалах: $c(\mathcal{L}) = (L_1, \leq_1)$, где $L_1 = \{\, c(x) \mid x \in L\,\}$ и для $c(x), c(y) \in L_1$ $c(x) <_1 c(y)$, если $c(x) \neq c(y)$ и $x < y$. Для всех счетных ординалов α определим отображения c^α из L в множество непустых интервалов L и соответствующие порядки $\mathcal{L}_\alpha = c^\alpha(\mathcal{L}) = (L_\alpha, \leq_\alpha)$. Если $\alpha = \beta+1$, то $c^\alpha(x) = c^\alpha(y)$ тогда и только тогда, когда $[c^\beta(x), c^\beta(y)]$ — конечный интервал в $\mathcal{L}_\beta$, если α — предельный, то $c^\alpha(x) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} c^\beta(x)$, порядки определяются аналогично. Исходный порядок можно считать конденсированным 0 раз: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0, c^0(x) = x$.

Определение 5. FC-ранг линейного порядка $\mathcal{L}$ равен наименьшему такому α, что для всех $\beta \geq \alpha$ $c^\beta(\mathcal{L}) = c^\alpha(\mathcal{L})$.

Очевидно, что ранг плотного порядка равен 0, а для разреженного порядка $\mathcal{L}$, $c^\alpha(\mathcal{L}) \simeq \mathbf{1}$ для некоторого α.

Далее введем эквивалентное определение ранга для разреженных линейных порядков. Будем обозначать порядок типа натуральных чисел через ω, порядок типа отрицательных целых чисел — ω^*, типа целых чисел — ζ, типа рациональных чисел — η, конечный линейный порядок — $\mathbf{n}$ (n — число элементов в нем). Соответственно, пустой порядок и порядок из одного элемента будем обозначать через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$.

Определение 6. Пусть $\mathcal{I}$ — линейный порядок. $\mathcal{I}$-суммой порядков $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ назовем порядок $\sum\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i = (L, \leq_L)$, где $L = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, а для $x, y \in L$ $x <_L y$, если $x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$ и $x <_{A_i} y$; или если $x \in A_i, y \in A_j$ для некоторых $i, j \in I$ и $i <_I j$.

Определение 7. Для всех счетных ординалов α определим по индукции множество VD_α, состоящее из разреженных линейных порядков:

(1) $VD_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$,

(2) $VD_\alpha = \{\sum\limits_{i\in I} A_i | A_i \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} VD_\beta, \mathcal{I} \in \{\omega, \omega^*, \zeta\} \cup \{\mathbf{n}\}_{\mathbf{n}<\omega}\}$.

Определим множество $VD = \bigcup\limits_{\alpha} VD_\alpha$.

Теорема 2 (Розенштейн [9]). *Счетный линейный порядок является разреженным тогда и только тогда, когда он лежит в VD.*

Определение 8. VD-ранг счетного разреженного линейного порядка $\mathcal{L}$ — это наименьшее α, такое что $\mathcal{L} \in VD_\alpha$.

Следующая теорема дает эквивалентность определений рангов разреженных линейных порядков.

Теорема 3 (Розенштейн [9]). *VD-ранг разреженного линейного порядка равен его FC-рангу.*

Теперь сформулируем теорему, определяющую ранг автоматных порядков:

Теорема 4 [10]. *Если линейный порядок распознается конечным автоматом, то его FC-ранг конечен.*

Приведем схему доказательства этой теоремы. Более подробное доказательство можно найти в [10]. Для этого понадобится следующий факт.

Теорема 5 (Розенштейн [9]). *Любой счетный линейный порядок может быть представлен в виде* $\sum\limits_{i \in L} \mathfrak{L}_i$, *где* $\mathfrak{L}_i$ *— разреженные линейные порядки, а* $\mathfrak{L}$ *— плотный линейный порядок.*

И следующее утверждение.

Предложение 1 [10]. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *— автоматный линейный порядок, тогда существует* $k \in N$ *такое, что* VD*-ранг любого замкнутого разреженного интервала из* $\mathfrak{L}$ *не больше* k.

Замкнутый интервал здесь — подмножество вида $[a, b] = \{\, x \in L \mid a \le x \le b \,\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k — константа из предыдущего предложения. Пусть $\mathfrak{L}$ — линейный порядок, по теореме 5 он может быть представлен как $\sum\limits_{i \in L} \mathfrak{L}_i$, где $\mathfrak{L}$ — плотный, а каждый $\mathfrak{L}_i$ — разреженный. Для каждого i и $x, y \in L_i$: $c^k(x) = c^k(y)$ и, следовательно, $VD(\mathfrak{L}_i) \le k$. Тогда $FC(\mathfrak{L}) \le k$. □

Следующая теорема связана с автоматными представлениями для линейных порядков, в частности для вполне упорядоченных множеств.

Теорема 6 (Деломе [4]). *Ординал* α *имеет автоматное представление тогда и только тогда, когда* $\alpha < \omega^\omega$.

В [2] можно ознакомиться с понятием вычислимости, и в [1] — с понятиями конструктивности и автоустойчивости моделей.

§ 2. Основные результаты

Теорема 7. *Любые два автоматных представления ординала* $\alpha < \omega^\omega$ *вычислимо изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны два автоматных представления для α: $\mathfrak{L}_1 = (L_1, \le_1)$ и $\mathfrak{L}_2 = (L_2, \le_2)$. Будем строить изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = \omega$. Добавим в структуру $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ отношения непосредственного следования $\lhd_1$ и $\lhd_2$ соответственно. Полученные структуры автоматны по теореме 1, так как $x \lhd_i y$, для $i = 1, 2$, записываются формулами $\neg\,(\exists z)\,((x <_i z) \,\&\, (z <_i y))$.

По автоматному представлению $(L_1, \le_1)$ эффективно строится автомат, распознающий формулу $Lim(x) \leftrightharpoons (\forall y)(x <_1 y)$, которая выделяет предельный (наименьший) элемент. Затем по автоматному представлению $(L_2, \le_2)$ строим аналогичный автомат, распознающий в нем предельный элемент и отображаем предельный элемент из $\mathfrak{L}_1$ в предельный элемент из $\mathfrak{L}_2$.

Далее строим автоматы для обеих структур, распознающие элементы, задаваемые формулами $\Phi_1(x) \leftrightharpoons (\exists y)(Lim(y) \,\&\, (y \lhd_i x))$, для $i = 1, 2$. Отображаем найденный непосредственный последователь предельного элемента из $\mathfrak{L}_1$ в непосредственного последователя предельного элемента в $\mathfrak{L}_2$. Аналогично поступаем на n-ом шаге, используя формулы

$$\Phi_n(x) \leftrightharpoons (\exists y_1)\ldots(\exists y_n)(Lim(y_1) \,\&\, (y_1 \lhd_i y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, (y_{n-1} \lhd_i y_n) \,\&\, (y_n \lhd_i x))$$

для $i = 1, 2$.

Итак, изоморфизм построен, из эффективности построения автоматов, распознающих формулы, следует вычислимость изоморфизма.

Заметим, что для случая, когда $\alpha = \mathbf{n}$, изоморфизм строится аналогично предыдущему случаю.

Пусть $\alpha = \omega^2$, введем предикаты:

$$Lim^1(x) \risingdotseq (\forall y)\Big((y < x) \to (\exists^\infty z)\big((y < z < x)\big)\Big) \text{ — задает предельные элементы первого порядка;}$$

$$Lim^2(x) \risingdotseq Lim^1(x) \,\&\, (\forall y)\Big(\big(Lim^1(y) \,\&\, (y < x)\big) \to (\exists^\infty z)\big(Lim^1(z) \,\&\, \& \,(y < z < x)\big)\Big) \text{— задает предельные элементы второго порядка;}$$

Для $\alpha = \omega^2$ этот предикат будет истинен только на одном элементе.

$$x \lhd_{Lim^1} y \risingdotseq Lim^1(x) \,\&\, Lim^1(y) \,\&\, \neg\,(\exists z)\big(Lim^1(z) \,\&\, (x < z < y)\big) \text{ — задает непосредственное следование на предельных элементах первого порядка.}$$

Рассмотрим набор формул для $k, m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{0,0}(x) &\risingdotseq Lim^2(x);\\
\Phi_{k,0} &\risingdotseq Lim^1(x) \,\&\, (\exists y_0 \dots y_{k-1})\big(Lim^2(y_0) \,\&\, Lim^1(y_1) \,\&\, \dots \,\&\, Lim^1(y_{k-1}) \,\&\\
&\qquad \& \,(y_0 \lhd_{Lim^1} y_1) \,\&\, \dots \,\&\, (y_{k-1} \lhd_{Lim^1} x)\big);\\
\Phi_{0,m}(x) &\risingdotseq (\exists x_0 \dots x_{m-1})\big(Lim^2(x_0) \,\&\, (x_0 \lhd x_1) \,\&\, \dots \,\&\, (x_{m-1} \lhd x)\big);\\
\Phi_{k,m}(x) &\risingdotseq (\exists x_0 \dots x_{m-1})\big(\Phi_{k,0}(x_0) \,\&\, (x_0 \lhd x_1) \,\&\, \dots \,\&\, (x_{m-1} \lhd x)\big).
\end{aligned}$$

Ясно, что любой элемент из $\alpha = \omega^2$ задается одной из приведенных формул, и каждая формула истинна только на одном элементе из $\alpha = \omega^2$.

Для случая $\alpha = \omega^n$ получаем набор формул $\Phi_{a_1,\dots,a_n}$ для $a_1, \dots, a_n \in N$, истинных на единственных элементах из ω^n и задающих каждый элемент ω^n. Для их построения для всех $m \in N, m \geq 1$ вводим предикаты, уже определенные для 1 (частично для 2):

$$Lim^m(x) \risingdotseq Lim^{m-1}(x) \,\&\, (\forall y)\big(\big(Lim^{m-1}(y) \,\&\, (y < x)\big) \to (\exists^\infty z)\big(Lim^{m-1}(z) \,\&\, \& \,(y < z < x)\big)\big) \text{ — задает предельные элементы порядка } m;$$

$$x \lhd_{Lim^m} y \risingdotseq Lim^m(x) \,\&\, Lim^m(y) \,\&\, \neg\,(\exists z)\big(Lim^m(z) \,\&\, (x < z < y)\big) \text{ — задает непосредственное следование на предельных элементах порядка } m.$$

Формулы получаются, как и в предыдущем случае: находим предельные элементы, затем находим предельные среди предельных, повторяем n раз. Найдя предельный элемент n-го порядка, отсчитываем от него с помощью непосредственного следования на предельных элементах $(n-1)$-го порядка a_1-й предельный $(n-1)$-го порядка. Потом находим a_2-й (от только что найденного элемента) предельный $(n-2)$-го порядка, и т. д. до a_n-го непредельного.

Пусть $\alpha = \omega^n \cdot k$,тогда действуем, как в случае $\alpha = \omega^{n+1}$. Получим набор формул $\Phi_{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}}$ для $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in N$ и $a_{n+1} < k$.

Пусть $\alpha = \omega^{n_1} \cdot k_1 + \ldots + \omega^{n_l} \cdot k_l$, где $n_1, \ldots, n_l$, $k_1, \ldots, k_l \in N$, $k_i \neq 0$ и $n_1 > > \ldots > n_l \geq 0$. Тогда с помощью введенных предикатов находим предельные (n_l+1)-го порядка, среди них наибольший, который является наименьшим элементом для $\omega^{n_l} \cdot k_l$. Дальше действуем так, как действовали бы отдельно для $\omega^{n_l} \cdot k_l$, используя найденный наименьший элемент. Затем аналогично находим предельные $(n_{l-1}+1)$-го порядка и среди них наибольший, он является наименьшим для $\omega^{n_{l-1}} \cdot k_{l-1}$. И так далее, в итоге получим l наборов формул:

$\Phi_{a_1 \ldots a_{n_1}, a_{n_1+1}, 1}$ (где $a_1, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1} \in N$ и $a_{n_1+1} < k_1$),

$\ldots$

$\Phi_{a_1 \ldots a_{n_l}, a_{n_l+1}, l}$ (где $a_1, \ldots, a_{n_l}, a_{n_l+1} \in N$ и $a_{n_l+1} < k_l$),

истинных на единственных элементах из α и задающих каждый элемент α.

В итоге для каждого ординала, меньшего ω^ω, строим вычислимый изоморфизм с помощью формул, выделяющих элементы, как и для случая $\alpha = \omega$. □

Теорема 8. *Любые два автоматных представления линейного разреженного порядка, имеющего FC-ранг не больше 2, вычислимо изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если автоматный линейный порядок имеет ранг 1, тогда он является либо $\mathbf{n}$, либо ω (эти случаи разобраны в предыдущей теореме), либо ω^* (этот случай аналогичен случаю с ω, в формулах, выделяющих элементы, необходимо сменить все знаки меньше на больше), либо ζ (этот случай будет описан ниже).

Добавим в сигнатуру константу, тогда линейный порядок будет иметь вид $(L, \leq, a)$ и останется автоматным, так как конечное множество распознается автоматом.

Пусть $\mathcal{L} = \zeta$, тогда формулы

$$\Phi_0(x) \leftrightharpoons x = a;$$
$$\Phi_{-k}(x) \leftrightharpoons (\exists y_1 \ldots y_{k-1})\big((x \lhd y_{k-1}) \,\&\, \ldots \,\&\, (y_1 \lhd a)\big);$$
$$\Phi_k(x) \leftrightharpoons (\exists y_1 \ldots y_{k-1})\big((a \lhd y_1) \,\&\, \ldots \,\&\, (y_{k-1} \lhd x)\big);$$

выделяют все элементы из $\mathcal{L}$. Таким образом, для линейных порядков ранга 1 все доказано.

Итак, пусть $\mathcal{L} = (L, \leq, a)$ — автоматный линейный разреженный порядок, имеющий FC-ранг 2. Из теорем (2) и (3) следует, что $\mathcal{L} = \sum\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$, где $\mathcal{I}, \mathcal{A}_i \in \{\omega, \omega^*, \zeta\} \cup \{\mathbf{n}\}_{\mathbf{n} < \omega}$.

Определим следующие отношения.

Отношение «между x, y конечное число элементов»:

$$c(x, y) \leftrightharpoons (x < y) \,\&\, \neg\, (\exists^\infty z)(x < z < y).$$

Отношения, определяющие какому типу $\mathcal{A}_i$ принадлежит x:

$$\omega(x) \leftrightharpoons (\exists^\infty y) c(x, y) \,\&\, \neg\, (\exists^\infty y) c(y, x);$$
$$\omega^*(x) \leftrightharpoons \neg\, (\exists^\infty y) c(x, y) \,\&\, (\exists^\infty y) c(y, x);$$
$$\zeta(x) \leftrightharpoons (\exists^\infty y) c(x, y) \,\&\, (\exists^\infty y) c(y, x);$$
$$n(x) \leftrightharpoons \neg\, (\exists^\infty y) c(x, y) \,\&\, \neg\, (\exists^\infty y) c(y, x).$$

Отношения, выделяющие один элемент из каждого $\mathcal{A}_i$:

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}(x) \leftrightharpoons \omega(x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)c(y,x);\\
&\overline{\omega}^*(x) \leftrightharpoons \omega^*(x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)c(x,y);\\
&\overline{\zeta}(x) \leftrightharpoons \zeta(x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)\big((c(x,y) \vee c(y,x)) \mathbin{\&} y <_{llex} x\big);\\
&\overline{n}(x) \leftrightharpoons n(x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)c(y,x).
\end{aligned}$$

Отношение непосредственного следствия:

$$x \lhd y \leftrightharpoons (x < y) \mathbin{\&} \neg\,(\exists z)(x < z < y)).$$

Отношения непосредственного следствия на выделенных из каждого $\mathcal{A}_i$ элементах одного типа:

$$\begin{aligned}
&x \lhd_\omega y \leftrightharpoons (x < y) \mathbin{\&} \overline{\omega}(x) \mathbin{\&} \overline{\omega}(y) \mathbin{\&} \neg\,(\exists z)(\overline{\omega}(z) \mathbin{\&} (x < z < y));\\
&x \lhd_{\omega^*} y \leftrightharpoons (x < y) \mathbin{\&} \overline{\omega}^*(x) \mathbin{\&} \overline{\omega}^*(y) \mathbin{\&} \neg\,(\exists z)(\overline{\omega}^*(z) \mathbin{\&} (x < z < y));\\
&x \lhd_\zeta y \leftrightharpoons (x < y) \mathbin{\&} \overline{\zeta}(x) \mathbin{\&} \overline{\zeta}(y) \mathbin{\&} \neg\,(\exists z)(\overline{\zeta}(z) \mathbin{\&} (x < z < y));\\
&x \lhd_n y \leftrightharpoons (x < y) \mathbin{\&} \overline{n}(x) \mathbin{\&} \overline{n}(y) \mathbin{\&} \neg\,(\exists z)(\overline{n}(z) \mathbin{\&} (x < z < y)).
\end{aligned}$$

Выделение одного элемента определенного типа:

$$\begin{aligned}
&\omega_{1,1}(x) \leftrightharpoons \overline{\omega}(x) \mathbin{\&} (a < x) \mathbin{\&} \neg\, c(a,x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)(\overline{\omega}(y) \mathbin{\&} (a < y < x));\\
&\omega^*_{1,1}(x) \leftrightharpoons \overline{\omega}^*(x) \mathbin{\&} (a < x) \mathbin{\&} \neg\, c(a,x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)(\overline{\omega}^*(y) \mathbin{\&} (a < y < x));\\
&\zeta_{1,1}(x) \leftrightharpoons \overline{\zeta}(x) \mathbin{\&} (a < x) \mathbin{\&} \neg\, c(a,x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)(\overline{\zeta}(y) \mathbin{\&} (a < y < x));\\
&n_{1,1}(x) \leftrightharpoons \overline{n}(x) \mathbin{\&} (a < x) \mathbin{\&} \neg\, c(a,x) \mathbin{\&} \neg\,(\exists y)(\overline{n}(y) \mathbin{\&} (a < y < x)).
\end{aligned}$$

Определение всех элементов типа ω. Для $k > 0$:

$$\begin{aligned}
\omega_{2k,1}(x) \leftrightharpoons{}& \overline{\omega}(x) \mathbin{\&} (\exists x_1,\dots,x_{k-1})\big(\omega_{1,1}(x_1) \mathbin{\&} \overline{\omega}(x_2) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \overline{\omega}(x_2) \mathbin{\&}\\
&\mathbin{\&} (x_1 \lhd_\omega \dots \lhd_\omega x_{k-1} \lhd_\omega x)\big);\\
\omega_{2k+1,1}(x) \leftrightharpoons{}& \overline{\omega}(x) \mathbin{\&} (\exists x_1,\dots,x_{k-1})\big(\omega_{1,1}(x_1) \mathbin{\&} \overline{\omega}(x_2) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} \overline{\omega}(x_2) \mathbin{\&}\\
&\mathbin{\&} (x \lhd_\omega x_{k-1} \lhd_\omega \dots \lhd_\omega x_1)\big).
\end{aligned}$$

Для $t > 0, n > 0$:

$$\omega_{t,n}(x) \leftrightharpoons (\exists x_1,\dots,x_{n-1})\big(\omega_{t,1}(x_1) \mathbin{\&} (x_1 \lhd \dots \lhd x_{n-1} \lhd x)\big).$$

$\omega^*_{2k,1}, \omega^*_{2k+1,1}$ определяются аналогично $\omega_{2k,1}, \omega_{2k+1,1}$ заменой в формулах $\overline{\omega}$ на $\overline{\omega}^*$, $\omega_{1,1}$ на $\omega^*_{1,1}$ и $\lhd_\omega$ на $\lhd_{\omega^*}$. Для $t > 0, n > 0$:

$$\omega^*_{t,n}(x) \leftrightharpoons (\exists x_1,\dots,x_{n-1})\big(\omega^*_{t,1}(x_1) \mathbin{\&} (x \lhd x_{n-1} \lhd \dots \lhd x_1)\big).$$

$n_{2k,1}, n_{2k+1,1}$ и $n_{t,m}$ определяются аналогично $\omega_{2k,1}, \omega_{2k+1,1}$ и $\omega_{t,m}$. $\zeta_{2k,1}, \zeta_{2k+1,1}$ определяются аналогично $\omega_{2k,1}, \omega_{2k+1,1}$. Для $t > 0, n > 0$:

$$\begin{aligned}
&\zeta_{t,2n}(x) \leftrightharpoons (\exists x_1,\dots,x_{n-1})\big(\zeta_{t,1}(x_1) \mathbin{\&} (x_1 \lhd \dots \lhd x_{n-1} \lhd x)\big);\\
&\zeta_{t,2n+1}(x) \leftrightharpoons (\exists x_1,\dots,x_{n-1})\big(\zeta_{t,1}(x_1) \mathbin{\&} (x \lhd x_{n-1} \lhd \dots \lhd x_1)\big).
\end{aligned}$$

Как и в теореме (7), каждый элемент $\mathcal{L}$ определяется одной из формул $\omega_{t,m}$, $\omega^*_{t,m}$, $\zeta_{t,m}$, $n_{t,m}$; и каждая такая формула истинна на не более чем одном элементе из $\mathcal{L}$.

По автомату можно эффективно определить, распознает ли он пустой язык (находится множество достижимых состояний, и, если среди них нет конечных, то автомат распознает пустой язык).

Таким образом, по автоматным представлениям строятся автоматы, распознающие $\omega_{t,m}, \omega^*_{t,m}, \zeta_{t,m}, n_{t,m}$, и выделенные ими элементы одного автоматного представления отображаются в соответствующие выделенные элементы другого автоматного представления. $\square$

Теорема 9. *Любой автоматный линейный порядок определим формулой первого порядка с квантором $\exists^\infty$ в подходящем автоматном линейном порядке, имеющем FC-ранг* 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L} = (L, \leq_L)$ — произвольный автоматный линейный порядок. $(\eta+2)$ — автоматный линейный порядок, так как $((0|1)^*1|(a|aa)), \leq_{lex})$ с $0 < 1 < a$ — его автоматное представление. Тогда $(\eta + 2) \times \mathcal{L}$ по (1) тоже является автоматным. $(\eta + 2) \times \mathcal{L}$ имеет FC-ранг 1, так как уже после первого конденсирования получается плотный линейный порядок.

В $(\eta + 2) \times \mathcal{L}$ определим отношение эквивалентности. Для этого введем некоторые отношения:

$x \lhd y$ — определяется как и ранее.

$$\begin{aligned}
1(x) &\leftrightharpoons (\exists y)(x \lhd y);\\
2(x) &\leftrightharpoons (\exists y)(y \lhd x);\\
\eta(x) &\leftrightharpoons \neg\, (\exists y)((y \lhd x) \vee (x \lhd y));\\
x \leq_{\eta+\mathbf{2}} y &\leftrightharpoons (x \leq y)\ \&\ \big[(x = y) \vee (x \lhd y) \vee\\
&\qquad \vee \big(\eta(x)\ \&\ (1(y) \vee 2(y) \vee \eta(y))\ \&\ \neg\, (\exists z)(2(z)\ \&\ (x < z < y))\big)\big].
\end{aligned}$$

И, наконец, само отношение эквивалентности:

$$x \sim y \leftrightharpoons (x \leq_{\eta+\mathbf{2}} y) \vee (y \leq_{\eta+\mathbf{2}} x).$$

Теперь, если профакторизовать $(\eta + 2) \times \mathcal{L}$ по введенному отношению эквивалентности, то получим порядок, изоморфный исходному. Другими словами, получаем, что любой автоматный линейный порядок определим в автоматном линейном порядке ранга 1. $\square$

§ 3. Примеры автоматных линейных порядков, имеющих достаточно сложную структуру

Определение 9. Назовем линейный порядок $\mathcal{L}$ периодичным, если он представим в виде $\sum\limits_{i\in\omega^*} \mathcal{A}_i + \mathcal{B} + \sum\limits_{i\in\omega} \mathcal{C}_i$, где $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j = \mathcal{A}$ для всех $i \in \omega^*$, $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j = \mathcal{C}$ для всех $i \in \omega$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ — произвольные линейные порядки.

Пример 2. Непериодичный порядок $\sum\limits_{i\in\omega}\mathcal{A}_i$, где $\mathcal{A}_i=\zeta$, если i — нечетное и $\mathcal{A}_i=\mathbf{2}^{\frac{\mathbf{i+2}}{\mathbf{2}}}$, если i — четное, является автоматным.

Этот порядок представим следующим образом:

$$\mathbf{2}+\zeta+\mathbf{4}+\zeta+\ldots+\zeta+\mathbf{2^n}+\zeta+\ldots$$

Изобразим для наглядности, как будет выглядеть его автоматное представление.

$$0<1<(\ldots<1ab<1b<1bb<\ldots)<00<01<10<11<$$
$$<(\ldots<11ab<11b<11bb<\ldots)<\ldots$$

Теперь формально покажем, каким будет искомое автоматное представление $\mathcal{L}=$ $=(L,\leq)$. Пусть $\Sigma_1=\{0,1\}$, $\Sigma_2=\{a,b\}$, $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$. Напомним следующее обозначение: $\Sigma_\perp=\Sigma\cup\{\perp\}$.

$L=\Sigma_1^*\cup 1^+(a^*b|b^*b)$.

$(\leq_1)_\perp=(\leq_{llex})_\perp$ на Σ_1^* с $0<1$ — это отношение задает сравнимость элементов из всех $\mathcal{A}_i$ с четным i.

$(\leq_2')_\perp=(\leq_{lex})_\perp\cap(a^*b|b^*b)^2$, где $\leq_{lex}$ — лексикографический порядок на Σ_2^*, с $a<b$.

$(\leq_2)_\perp=(\binom{1}{1})^+(\leq_2')_\perp$ — это отношение задает сравнимость элементов внутри каждого $\mathcal{A}_i$ с нечетным i.

$$(<_3)_\perp=\Big((\Sigma_1^2)^+\big(\binom{\perp}{1}|\binom{\perp}{a}|\binom{\perp}{b}|\binom{a}{0}|\binom{a}{1}|\binom{b}{0}|\binom{b}{1}\big)(\Sigma_\perp^2)^*\Big)\cap(L^2)_\perp$$

— это отношение дает недостающие сравнимости.

$$(\leq_L)_\perp=(\leq_1)_\perp\cup(\leq_2)_\perp\cup(<_3)_\perp. \qquad \square$$

Можно также привести пример непериодичного неразреженного автоматного линейного порядка

$$\mathbf{2}+\eta+\mathbf{4}+\eta+\ldots+\eta+\mathbf{2^n}+\eta+\ldots$$

Для него в тех же алфавитах $L=\Sigma_1^*\cup 1^+(\Sigma_2^*b)$, а порядок определяется аналогично.

Также можно уменьшить рост конечных кусков, т. е. порядок

$$\mathbf{1}+\eta+\mathbf{2}+\eta+\ldots+\eta+\mathbf{n}+\eta+\ldots$$

является автоматным. Для него $L=1^+0^*\cup 1^+(\Sigma_2^*b)$, порядок тот же, усеченный на L.

Список литературы

1. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

3. *Blumensath A.* Automatic Structures. Diploma thesis, RWTH Aachen, 1999.

4. *Delhomme C.* Non-automaticity of ω^ω, 2001. Manuscript.

5. *Delhomme C., Goranko V., Knapik T.* Automatic Linear Orderings, 2003.

6. *Hodgson B. R.* Théories décidables par automate fini. Phd. thesis. University of Montréal, 1976.

7. *Khoussainov B., Nerode A.* Automatic Presentations of Structures // Lecture Notes in Computer Science. 1995. Vol. 960. P. 367–392.

8. *Khoussainov B., Rubin S., Stephan F.* Automatic Linear Orders and Trees // CDMTCS Technical Report 208. 2003. Department of Computer Science, University of Auckland.

9. *Rosenstein J. G.* Linear Orderings. N.Y.: Academic Press, 1982.

10. *Rubin S.* Automatic Structures. A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy. The University of Auckland, 2004.

11. *Rubin S.* Finite Automata and Well Ordered Sets // New Zealand Journal of Computing. 1999. Vol. 7. No. 2. P. 39–46.

Материал поступил в редколлегию 30.09.2007

Адрес автора

РЕВЕНКО Александра Анатольевна
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: a.a.revenko@gmail.com