УДК 517.91(075)

Н. В. Дементьева, В. А. Чуркин

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: churkin@math.nsc.ru

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОРНЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе излагается метод построения фундаментальной матрицы решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами на основе корневого базиса, детальное описание которого отсутствует в учебниках по дифференциальным уравнениям. В первом разделе, помимо доказательства теоремы о корневом разложении, описан эффективный алгоритм поиска корневых векторов. Второй раздел содержит необходимые сведения о фундаментальных матрицах и матричной экспоненте, а также обоснование предложенного метода построения фундаментальной матрицы. В целом дается новое, более компактное изложение теории линейных систем с постоянными коэффициентами. Соответствующий изложению способ решения задач значительно легче осваивается студентами.

Ключевые слова: линейные системы дифференциальных уравнений, фундаментальная матрица решений, корневой базис, ядерно-образное разложение, матричная экспонента.

1. Корневое разложение

1.1. Образ и ядро

Пусть A – линейный оператор векторного пространства V над полем K. В данной работе поле K – это множество вещественных либо комплексных чисел с естественными операциями сложения и умножения, векторное пространство V – пространство n-мерных арифметических векторов $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Множества $\operatorname{Ker} A = \{v \in V \mid Av = 0\}$ и $\operatorname{Im} A = AV = \{Av \mid v \in V\}$ называются соответственно *ядром* и *образом* оператора A. Легко проверить, что ядро и образ – подпространства из V, и потому каждое из них вполне задается выбором базиса. Размерности ядра и образа называются соответственно *дефектом* и *рангом* оператора A и обозначаются $\operatorname{def} A$ и $\operatorname{rank} A$.

Из алгебры известна следующая

Теорема 1.1. *Сумма дефекта и ранга линейного оператора равна размерности пространства, т. е.* $\operatorname{def} A + \operatorname{rank} A = n$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – столбцы единичной матрицы E, и оператор $A\colon x \mapsto Ax,\ x \in V$, задан в стандартном базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицей $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} e_1 \cdots e_n \\ Ae_1 \cdots Ae_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix},$$

элементы которой – векторы. Она является A-слойной – под каждым элементом-вектором стоит его образ относительно A. Покажем, как с помощью матрицы $\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix}$ можно *вычислить одновременно базисы ядра и образа оператора* A. Прежде всего заметим, что элементарные преобразования столбцов A-слойной матрицы сохраняют A-слойность:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ Au & Av \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} u+v & v \\ Au+Av & Av \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u & v \\ Au & Av \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} \lambda u & v \\ \lambda(Au) & Av \end{pmatrix}.$$

Приведем элементарными преобразованиями столбцов матрицу $\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix}$ к виду $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, где *B* и *C* – матрицы порядка *n*, причем *C* – ступенчатая по столбцам.

Утверждается, что система ненулевых столбцов $w_1, \ldots, w_r$ *матрицы C образует базис* Im *A, а система столбцов* $u_1, \ldots, u_d$ *матрицы B, имеющих нулевое продолжение в матрице C, образует базис* Ker *A*.

$$\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{эл.пр.столбцов}} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & .. & v_r & u_1 & .. & u_d \\ w_1 & .. & w_r & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ является *A*-слойной, поэтому $Au_1 = 0, \ldots, Au_d = 0$, $Av_1 = w_1, \ldots, Av_r = w_r$. Столбцы матрицы *B* образуют базис пространства *V*, так как система столбцов *B* получилась элементарными преобразованиями системы столбцов невырожденной матрицы *E*. Обозначим линейную оболочку системы векторов (множество их всевозможных линейных комбинаций) символом $\langle ... \rangle$. Тогда

$$AV = A\langle u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle Au_1, \ldots, Au_d, Av_1, \ldots, Av_r \rangle = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle.$$

Но система векторов $w_1, \ldots, w_r$ линейно независима по причине ступенчатости матрицы *C*. Следовательно, она образует базис образа оператора *A*. С другой стороны, система $u_1, \ldots, u_d$ линейно независима как часть системы столбцов матрицы *B*, содержится в ядре оператора *A* и, следовательно, является его базисом, если учесть, что размерность ядра равна $n - r = d$ по теореме 1.1.

Замечание. Векторы $u_1, \ldots, u_d$, $w_1, \ldots, w_r$, $d + r = n$ из базисов ядра и образа оператора *A* могут не составлять базис всего пространства *V*. Если же оператор *A* обладает свойством $A^2V = AV$, то $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$ (см. п. 1.2, шаг 2)).

Пример 1.1. Ведущие элементы при элементарных преобразованиях системы столбцов в матрицах будем выделять рамкой. Пусть $A : x \mapsto Ax,\ x \in \mathbb{R}^4$, и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & \boxed{3} & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В последней матрице столбцы, расположенные внизу и слева, образуют базис образа Im *A*, а столбцы вверху и справа – базис ядра Ker *A*.

1.2. Ядерно-образное и корневое разложение

Обозначим через $\chi_A(\lambda)$ характеристический многочлен линейного оператора *A* (матрицы *A*): $\chi_A(\lambda) = |A - \lambda E|$.

Множество корней характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ называется *спектром* оператора A и обозначается $\mathrm{Sp}\, A$.

Подпространство U векторного пространства V называется *инвариантным* относительно линейного оператора A пространства V, если $AU \subseteq U$.

Предположим, что *все корни* характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ линейного оператора A конечномерного векторного пространства V принадлежат полю скаляров K, т. е. $\mathrm{Sp}\, A \subseteq K$. Случай кратных корней не исключается, различных корней s. Наша цель – разложить пространство в прямую сумму s ненулевых подпространств, инвариантных относительно оператора

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s, \quad AV_i \subseteq V_i .$$

При $s > 1$ действие A на V однозначно задается действием A на каждом слагаемом V_i, $1 \le i \le s$, *меньшей* размерности.

Следующая лемма позволяет найти инвариантные подпространства.

Лемма 1.1. *Если два линейных оператора коммутируют, то ядро и образ одного оператора всегда инвариантны относительно второго*:

$$PQ = QP \Rightarrow P(\mathrm{Ker}\ Q) \subseteq \mathrm{Ker}\ Q, \quad P(\mathrm{Im}\ Q) \subseteq \mathrm{Im}\ Q .$$

В частности, это верно, когда P и Q – многочлены от оператора A.

Доказательство почти очевидно:

1) если $v \in \mathrm{Ker}\ Q$, то $Q(Pv) = P(Qv) = P0 = 0, \quad Pv \in \mathrm{Ker}\ Q$;

2) если $Qv \in \mathrm{Im}\ Q$, то $P(Qv) = Q(Pv) \in \mathrm{Im}\ Q$ для всех $v \in V$.

Следующая лемма характеризует расщепление спектра оператора при расщеплении пространства в сумму инвариантных подпространств.

Лемма 1.2. *Пусть векторное пространство $V = U \oplus W$ – прямая сумма ненулевых подпространств U и W, инвариантных относительно линейного оператора A. Обозначим через B и C сужения оператора A на U и W соответственно. Тогда*

$$\chi_A = \chi_B \cdot \chi_C, \quad \mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, B \cup \mathrm{Sp}\, C .$$

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_k$ – базис U, $e_{k+1}, ..., e_n$ – базис W. Тогда $e_1, ..., e_k$, $e_{k+1}, ..., e_n$ – базис V. Пусть B_e, C_e, A_e – матрицы операторов B, C, A в соответствующих базисах. Ввиду инвариантности подпространств матрица A_e клеточно-диагональна с клетками B_e и C_e. Поэтому $|A_e - \lambda E| = |B_e - \lambda E| \cdot |C_e - \lambda E|$. Это означает, что спектр оператора A является объединением спектров B и C.

Предполагая, что спектр расщепляется, т. е. характеристический многочлен имеет по крайней мере два корня, разложим пространство в сумму ненулевых инвариантных подпространств. Разобьем решение на следующие шаги.

1. *Поиск инвариантных слагаемых*. Выберем собственное значение λ. Тогда оператор $A - \lambda E$ вырожден и, следовательно, $V \supset (A - \lambda E)V$ по теореме 1.1 о сумме ранга и дефекта. Применяя $A - \lambda E$ несколько раз, получим убывающую *цепочку образов*

$$V \supset (A - \lambda E)V \supset \ldots \supset (A - \lambda E)^h V = (A - \lambda E)^{h+1} V = \ldots,$$

которая выравнивается на конечном шаге $h = h(\lambda)$ ввиду конечномерности пространства V. Соответствующая *цепочка ядер*

$$0 \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda E) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^h = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h+1} = \ldots,$$

выравнивается ввиду теоремы 1.1 о сумме ранга и дефекта.

Обозначим $P = (A - \lambda E)^h$. Подпространство $V^\lambda = \mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)^{h(\lambda)}$, на котором выровнялась цепочка ядер, состоит из всевозможных решений уравнений $(A - \lambda E)^k x = 0$, $k = 1, 2, \ldots,$ в пространстве V, и называется *корневым подпространством*, отвечающим собственному значению λ оператора *A*. Отметим стразу, что размерность V^{λ} не меньше, чем число скачков $h = h \;\lambda$ в цепочке ядер:

$$\dim V^{\lambda} \geq h \;\lambda\; . \qquad (*)$$

Обозначим через $W = \mathrm{Im}\, P = \;A - \lambda E\; ^{h} V$ подпространство, на котором выровнялась цепочка образов. Ввиду леммы 1.1 оба подпространства V^{λ} и *W* инвариантны относительно *A*.

2. *Отщепление корневого подпространства*. Покажем, что пространство *V* – прямая сумма V^{λ} и *W*, а оператор *P* «проецирует» *V* на *W* параллельно V^{λ}, т. е.

$$PV^{\lambda} = 0,\; PV = W,\; PW = W,\; V = V^{\lambda} \oplus W\,.$$

Действительно, первое и второе равенства сразу следуют из определений, третье – из выравнивания цепочки образов. Поскольку *P* невырожден на *W*, то его ядро нулевое, т. е. $\mathrm{Ker}\, P\; \cap W = V^{\lambda} \cap W = 0$. Теперь четвертое равенство следует из сравнения размерностей *V* и $V^{\lambda} \oplus W$ с учетом теоремы 1.1 о сумме ранга и дефекта для оператора *P* на пространстве *V*.

3. *Расположение других корневых подпространств*. Покажем, что остальные корневые подпространства $V^{\lambda'}$ при $\lambda' \neq \lambda$ содержатся во втором слагаемом *W*. Достаточно доказать, что $A - \lambda E\; V^{\lambda'} = V^{\lambda'}$, поскольку тогда $A - \lambda E\; ^{h} V^{\lambda'} = V^{\lambda'}$, $V^{\lambda'} \subset \mathrm{Im}\, P = W$. Включение $A - \lambda E\; V^{\lambda'} \subseteq V^{\lambda'}$ вытекает из инвариантности ввиду леммы 1.1 всех корневых подпространств относительно многочленов от *A*. Равенство следует из того, что ядро оператора $A - \lambda E$ на $V^{\lambda'}$ нулевое. Действительно, пусть $Av = \lambda v$ и $A - \lambda' E\; ^{k} v = 0$. Тогда $Av - \lambda' v = \lambda v - \lambda' v$, $A - \lambda' E\; v = \;\lambda - \lambda'\; v$, $A - \lambda' E\; ^{k} v = \;\lambda - \lambda'\; ^{k} v = 0$, $\lambda' \neq \lambda$, поэтому $v = 0$.

Отсюда вытекает, что спектр сужения *A* на V^{λ} состоит только из λ: ввиду леммы 1.2 он содержится в спектре *A*, но собственные векторы, отвечающие другим собственным значениям, содержатся в *W*.

4. *Отщепление других корневых подпространств*. Выбирая $\lambda' \neq \lambda$, можно продолжить аналогичный процесс отщепления корневых подпространств уже от пространства *W* или использовать индукцию по размерности пространства:

$$W = W^{\lambda'} \oplus W',\; W^{\lambda'} = V^{\lambda'},\; V = V^{\lambda} \oplus V^{\lambda'} \oplus W',$$

и т. д.

5. *Подведение итога.* Предположим, что

$$\mathrm{Sp}\, A = \;\lambda_1, \ldots, \lambda_s\; \subseteq K,\; \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j\,.$$

Тогда

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s,\; V_i = V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\; A - \lambda_i E\; ^{h_i}.$$

Если A_i – сужение *A* на V_i, то $\mathrm{Sp}\, A_i = \;\lambda_i\;$, $\chi_{A_i} = \pm\; \lambda - \lambda_i\; ^{k_i}$, где $k_i = \dim V_i$. С другой стороны, $\chi_A = \prod \chi_{A_i} = \pm \prod\; \lambda - \lambda_i\; ^{k_i}$ по лемме 1.2. Следовательно, размерность корневого подпространства совпадает с кратностью соответствующего собственного значения как корня характеристического многочлена.

Отметим еще, что $k_i = \dim V_i \geq h_i$ (см. $(*)$). Следовательно, *можно определить корневое подпространство* V_i как ядро оператора $A - \lambda_i E\; ^{k_i}$ или, равносильно, как пространство решений одной системы линейных уравнений $A - \lambda_i E\; ^{k_i} x = 0$, где k_i – кратность собственного значения λ_i как корня характеристического многочлена $|A - \lambda E|$.

Таким образом, доказана

Теорема 1.2. (о корневом разложении). *Пусть A – линейный оператор конечномерного векторного пространства V над полем* $K=\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$. *Предположим, что характеристический многочлен оператора разлагается над полем K на линейные множители:*

$$|A-\lambda E|=\pm\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{k_i},\ \lambda_i\in K,\ \lambda_i\neq\lambda_j\ \text{при}\ i\neq j,\ 1\le i,j\le s.$$

Тогда

1) *пространство разлагается в прямую сумму корневых подпространств*

$$V=V_1\oplus\ldots\oplus V_s,\quad V_i=V^{\lambda_i}=\operatorname{Ker}(A-\lambda_i E)^{k_i},$$

причем все слагаемые инвариантны относительно оператора A;

2) *размерность корневого подпространства совпадает с кратностью соответствующего собственного значения как корня характеристического многочлена*

$$\dim V_i=k_i,\ 1\le i\le s.$$

Пример 1.2. Найдем спектр и корневые подпространства оператора $A: x\mapsto Ax$, $x\in V=\mathbb{R}^3$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\-3&-7&-7\\4&8&7\end{pmatrix}.$$

Легко выписать $\chi_A(\lambda)=-(\lambda-3)(\lambda+1)^2$, $\operatorname{Sp}A=\{3,-1\}\subset\mathbb{R}$. Поэтому $V=V^3\oplus V^{-1}$, $V^3=\operatorname{Ker}(A-3E)$, $V^{-1}=\operatorname{Ker}(A+E)^2$, $\dim V^3=1$, $\dim V^{-1}=2$. Мы можем найти базисы этих подпространств, отыскивая фундаментальные системы решений для однородных систем линейных уравнений $(A-3E)x=0$, $(A+E)^2x=0$. Поскольку возведение матрицы в степень – трудоемкая операция, то лучше воспользуемся доказательством теоремы 1.2 о корневом разложении, согласно которому при отщеплении корневого подпространства $V^3=\operatorname{Ker}(A-3E)=\operatorname{Ker}(A-3E)^2$ другое корневое подпространство V^{-1} попадает в образ $\operatorname{Im}(A-3E)$, а так как третьего корневого подпространства нет, то и совпадает с этим образом. Применим способ одновременного поиска ядра и образа для оператора $A-3E$

$$\begin{pmatrix}E\\A-3E\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\\hline -2&4&6\\-3&-10&-7\\\boxed{4}&8&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\\\hline -2&8&8\\-3&\boxed{-4}&-4\\4&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1&-2&-1\\0&1&-1\\0&0&1\\\hline -2&8&0\\-3&-4&0\\4&0&0\end{array}\right).$$

В итоге вектор $f_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ образует базис корневого подпространства V^3, а векторы $f_2=(-2,-3,4)^{\mathrm{T}}$, $f_3=(2,-1,0)^{\mathrm{T}}$ – базис V^{-1}.

В предыдущем примере всего два корневых подпространства, причем одно из них одномерно. Как избежать трудоемкой операции возведения матрицы в степень, если все корни характеристического многочлена кратные? Следующий алгоритм [Чуркин, 1991] вычисляет базисы корневых подпространств в общем случае. Он опирается на теорему 1.2 и многократное одновременное вычисление ядер и образов относительно операторов $N=A-\lambda E$.

Алгоритм

Пусть B_0 – единичная или любая невырожденная матрица порядка *n*. Важно только, что столбцы B_0 образуют базис пространства *V*. Пусть $N=A-\lambda E$, где λ – собственное значение матрицы *A*.

1. Элементарными преобразованиями столбцов N-слойную матрицу $\begin{pmatrix} B_0 \\ NB_0 \end{pmatrix}$ привести к виду $\begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$, где C_1 – матрица, ступенчатая по столбцам. Здесь важно только, что ненулевые столбцы матрицы C_1 линейно независимы.

2. Вычислить произведение NC_1 и элементарными преобразованиями столбцов N^2-слойную матрицу $\begin{pmatrix} B_1 \\ NC_1 \end{pmatrix}$ привести к виду $\begin{pmatrix} B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$, где C_2 – матрица, ступенчатая по столбцам.

3. Вычислить произведение NC_2 и т. д.

Вычисления закончить на матрице $\begin{pmatrix} B_h \\ C_h \end{pmatrix}$, если ранги матриц C_h и NC_h совпадают или, равносильно, если число нулевых столбцов в C_h равно кратности $k(\lambda)$ корня λ в характеристическом многочлене матрицы A. В этом случае система столбцов матрицы B_h, имеющих нулевое продолжение в матрице C_h, образует базис корневого подпространства $V^{\lambda}(A)$, а ненулевые столбцы матрицы C_h образуют базис пространства $W = \operatorname{Im}(A-\lambda E)^{h(\lambda)}$, содержащего остальные корневые подпространства.

Теперь пусть новая матрица B_0 получается из матрицы C_h удалением нулевых столбцов и пусть $N := A-\lambda' E$, где λ' – другое собственное значение матрицы A. Вернемся к началу алгоритма и продолжим вычисления в соответствии с указанными правилами. Тогда получим базис корневого подпространства $V^{\lambda'}(A)$ и базис пространства $W = \operatorname{Im}(A-\lambda' E)^{h(\lambda')}|_W$, содержащего все корневые подпространства, кроме $V^{\lambda}(A)$ и $V^{\lambda'}(A)$. Продолжая вычисления, найдем в итоге базисы всех корневых подпространств.

Пример 1.3. Пусть $A: x \mapsto Ax,\ x \in V = \mathbb{R}^4$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,\ V = \operatorname{Ker}(A-E)^2 \oplus \operatorname{Ker}(A+E)^2,\ \operatorname{Ker}(A+E)^2 = \operatorname{Im}(A-E)^2.$$

Чтобы отыскать базисы этих подпространств и не вычислять квадрат $N = A-E$, найдем одновременно базисы ядра и образа относительно $N = A-E$, а потом применим оператор N еще раз к базису образа. В соответствии с алгоритмом

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ NC_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку кратность корня 1 равна двум, то вычисления следует закончить, векторы $f_1 = (1, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $f_2 = (0, 1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ образуют базис $\operatorname{Ker}(A - E)^2$, а векторы $f_3 = (3, -5, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $f_4 = (2, -3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ образуют базис второго корневого подпространства $\operatorname{Ker}(A + E)^2$.

2. Применение корневого разложения для решения линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

2.1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Фундаментальная матрица решений однородной системы

Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка n называют систему уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t) + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции; a_{ij} – заданные числа, называемые коэффициентами системы; $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ – заданные функции, называемые свободными членами системы.

Если обозначить через $\mathbf{y}$ вектор $(y_1(t), \ldots, y_n(t))^T$, а через $\mathbf{f}(t)$ вектор $(f_1(t), \ldots, f_n(t))^T$, то рассматриваемая система записывается в векторной форме

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \tag{2.1.1}$$

где **A**-матрица (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

Система дифференциальных уравнений (2.1.1) называется *однородной*, если $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$, т. е.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{2.1.2}$$

и *неоднородной*, если $\mathbf{f}(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Задача Коши для системы (2.1.1) записывается в виде

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{2.1.3}$$

где $\mathbf{y}_0$ – заданный числовой вектор.

Решить задачу Коши на отрезке $[t_1, t_2]$ – значит найти вектор-функцию $\mathbf{y}(t)$, являющуюся решением уравнения (2.1.1) и удовлетворяющую начальному условию $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ для $t_0 \in [t_1, t_2]$. Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть компоненты* $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ *вектор-функции* $\mathbf{f}(t)$ *непрерывны на отрезке* $[t_1, t_2]$. *Тогда решение задачи Коши* (2.1.3) *при* $t_0 \in [t_1, t_2]$ *существует и единственно на всем отрезке* $[t_1, t_2]$.

Замечание. Теорема 2.1 является следствием теоремы о решении задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Доказательство см., например, в [Эльсгольц, 1969].

Из теоремы 2.1 следует, что задача Коши для однородной системы

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

однозначно разрешима на всей числовой оси.

Наряду с векторным уравнением (2.1.2) мы будем рассматривать матричное уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y},$$

неизвестные которого объединяются в матрицу

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Записав матричное уравнение покомпонентно

$$\frac{dy_{ip}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{jp}(t), \quad i, p = 1, \ldots, n,$$

мы видим, что эти равенства можно рассматривать как систему из n одинаковых систем для неизвестных вектор-функций $\mathbf{y}_k(t)$:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Каждая из этих n систем состоит из n уравнений. Таким образом, матричная система размерности n может быть переписана в виде векторной системы размерности n^2:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2. *На решениях* $\mathbf{Y}(t)$ *матричного дифференциального уравнения* $\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$ *выполнено соотношение*

$$\det \mathbf{Y}(t) = e^{tr\mathbf{A}\cdot(t-t_0)} \det \mathbf{Y}(t_0),$$

называемое формулой Остроградского – Лиувилля.

Доказательство теоремы 2.2 см., например, в [Годунов, 1983].

Из формулы Остроградского – Лиувилля следует, что если в какой-нибудь точке $t = t_0$ определитель матрицы $\mathbf{Y}(t)$ отличен от нуля, то он будет отличен от нуля при всех t. Если же он в некоторой точке обращается в нуль, то он равен нулю всюду.

Любая матрица $\mathbf{Y}(t)$, являющаяся решением матричного уравнения $\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$ и такая, что хотя бы при одном $t = t_0$ $\det \mathbf{Y}(t_0) \neq 0$, называется *фундаментальной матрицей решений* системы (или векторного уравнения) $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Столбцы фундаментальной матрицы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ являются линейно независимыми решениями векторного уравнения $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ и называются *фундаментальной системой решений* (ФСР) этого уравнения.

Теорема 2.3. *Любое решение* $\mathbf{y}(t)$ *однородной системы* (*2.1.2*) *может быть представлено как линейная комбинация столбцов фундаментальной матрицы решений* $\mathbf{Y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$.

Доказательство теоремы 2.3 можно найти в [Годунов, 1983].

Из теоремы 2.3 следует, что множество всех решений однородной системы (2.1.2) образует линейное пространство размерности *n*, а вектор-функции $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ составляют базис этого пространства.

Функцию вида $\mathbf{y}_1(t, c_1, \ldots, c_n) = c_1\mathbf{y}_1 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$ естественно назвать *общим решением* линейной однородной системы (2.1.2).

Пусть $\mathbf{Y}(t)$ – фундаментальная матрица решений системы (2.1.2) ($\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$, $\det \mathbf{Y}(t) \neq 0$) и $\mathbf{B}$ – любая невырожденная постоянная матрица того же порядка. Тогда $\mathbf{Y}(t)\mathbf{B}$ тоже будет фундаментальной матрицей для системы (2.1.2). Действительно,

$$\det(\mathbf{Y}(t)\mathbf{B}) = \det \mathbf{Y}(t) \det \mathbf{B} \neq 0, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{Y}(t)\mathbf{B}) = (\mathbf{AY}(t)) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{B}).$$

Среди всех фундаментальных матриц рассматриваемой однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}$, выделяются фундаментальные матрицы $\mathbf{Y}(t)$ такие, что $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{E}$. При заданном параметре t_0 такая фундаментальная матрица $\mathbf{Y}(t)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Y}(t)) = \mathbf{AY}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{E}.$$

В дальнейшем будет показано, что единственное решение этой задачи может быть представлено в виде матричного ряда Тейлора:

$$\mathbf{E} + \frac{t - t_0}{1!}\mathbf{A} + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots$$

Этот ряд Тейлора напоминает ряд Тейлора для экспоненты

$$e^{ta} = 1 + \frac{t}{1!}a + \frac{t^2}{2!}a^2 + \frac{t^3}{3!}a^3 + \ldots$$

и поэтому его называют *матричной экспонентой* и обозначают следующим образом:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{E} + \frac{t - t_0}{1!}\mathbf{A} + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \ldots \equiv e^{(t - t_0)\mathbf{A}}.$$

2.2. Матричная экспонента

В настоящем параграфе изложены основные свойства матричной экспоненты. Доказательства этих свойств можно найти в [Годунов, 1983; Романко, 2002]. Введем в рассмотрение матричный степенной ряд

$$\mathbf{E} + \frac{t}{1!}\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k + \ldots \tag{2.2.1}$$

Здесь $\mathbf{A}$ – квадратная матрица порядка *n*, $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка *n*, $t \in \mathbb{R}$.

Если обозначить $\mathbf{E} = (e_{ij})$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{A}^2 = (a_{ij}^2)$, …, $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^k)$, ..., где $i, j = 1, \ldots, n$, то любой элемент матричного ряда (2.2.1) имеет вид:

$$e_{ij} + \frac{t}{1!}a_{ij} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \ldots + \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} + \ldots. \tag{2.2.2}$$

Назовем матричный ряд (2.2.1) *сходящимся* (*абсолютно сходящимся*, *равномерно сходящимся*) на отрезке $|t| \leq T$ числовой оси, если степенные ряды (2.2.2) при всех $i, j = 1, \ldots, n$ сходятся (абсолютно сходятся, равномерно сходятся) при $|t| \leq T$.

Лемма 2.1. *Для любой матрицы A на каждом отрезке* $|t| \le T$ *числовой оси матричный ряд* (*2.2.1*) *сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Существует такое число $P > 0$, что $|a_{ij}| \le P$, $i, j = 1, \dots, n$. Так как $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, то $a_{ij}^{(2)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}$ и, следовательно,

$$\left|a_{ij}^{(2)}\right| \le \sum_{l=1}^{n} |a_{il}| \cdot |a_{lj}| \le nP^2, \ i, j = 1, \dots, n .$$

Используя метод математической индукции, легко доказать, что $\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le n^{k-1} P^k$ при любых $k \in \mathbb{N}$ и $i, j = 1, \dots, n$. Значит, для каждого ряда (2.2.2) на отрезке $|t| \le T$ справедлива оценка

$$|e_{ij}| + \frac{|t|}{1!}|a_{ij}| + \ldots + \frac{|t|^k}{k!}\left|a_{ij}^{(k)}\right| + \ldots . \le 1 + \frac{TP}{1!} + \ldots + \frac{T^k n^{k-1} P^k}{k!} + \ldots .$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость при $|t| \le T$ каждого ряда (2.2.2), а значит, и ряда (2.2.1). Лемма 2.1 доказана.

Сумма абсолютно и равномерно сходящегося ряда (2.2.1) называется *матричной экспонентой* и обозначается $e^{t\mathbf{A}}$:

$$e^{t\mathbf{A}} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k . \tag{2.2.3}$$

Из определения матричной экспоненты очевидно, что $e^{t\mathbf{0}} = \mathbf{E}$ и $e^{t\mathbf{E}} = e^t \cdot \mathbf{E}$.

Замечание. Вычислять матричную экспоненту $e^{t\mathbf{A}}$ с помощью определения (2.2.3) легко в том случае, когда удается установить закон образования степеней $\mathbf{A}^k$. Пусть, например, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{E} + t\mathbf{A} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k + \ldots = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка n, причем* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. *Тогда справедливо свойство* $e^{t\mathbf{A}} \cdot e^{t\mathbf{B}} = e^{t\mathbf{B}} \cdot e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Используя метод математической индукции и равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, легко доказать формулу матричного бинома

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{B}^{n-k} = n! \sum_{k+m=n} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \cdot \frac{\mathbf{B}^m}{m!} .$$

Тогда

$$e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \cdot \frac{t^m \mathbf{B}^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \cdot \frac{t^m \mathbf{B}^m}{m!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \cdot e^{t\mathbf{B}} = e^{t\mathbf{A}} \cdot e^{t\mathbf{B}} = e^{t\mathbf{B}} \cdot e^{t\mathbf{A}}.$$

Так как двойной ряд для $e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ абсолютно сходится, то сходятся и ряды, полученные перестановкой членов данного ряда. Лемма 2.2 доказана.

Из леммы 2.2 при $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ следует, что матрица $e^{-t\mathbf{A}}$ является обратной к матрице $e^{t\mathbf{A}}$. Значит, матричная экспонента $e^{t\mathbf{A}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ является невырожденной матрицей.

Замечание. Если $\mathbf{AB} \ne \mathbf{BA}$, то утверждение леммы 2.2 может не выполняться. Пусть, например, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Установим закон образования степеней $\mathbf{A}^k$. Имеем

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \cdot \mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{E} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Теперь определим закон образования степеней $\mathbf{B}^k$:

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B},\ \mathbf{B}^3 = \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{B}^k = \mathbf{B}.$$

Следовательно, $e^{t\mathbf{B}} = \mathbf{E} + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Для матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \ldots, \ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^k = \mathbf{A} + \mathbf{B};$$

$$e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = \mathbf{E} + \left(t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k}{k!} + \ldots \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно

$$e^{t\mathbf{A}} \cdot e^{t\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{t(\mathbf{A}+\mathbf{B})}.$$

Лемма 2.3. *Матричная экспонента* $\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}}$ *– фундаментальная матрица решений системы* $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ *такая, что* $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$.

Доказательство. Матрица $e^{t\mathbf{A}}$ имеет производные всех порядков при $t \in \mathbb{R}$. Это следует из возможности почленного дифференцирования степенных рядов (2.2.2).

При этом справедлива формула:

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}}. \tag{2.2.4}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathbf{A}} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{E} + \frac{t}{1!}\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \ldots \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k + \ldots \right) = \mathbf{A} + \frac{t}{1!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^3 + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathbf{A}^k + \ldots =$$

$$= \mathbf{A} e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}.$$

Таким образом, мы получили, что матричная экспонента $e^{t\mathbf{A}}$ – невырожденная матрица, ее элементы являются дифференцируемыми функциями при всех $t \in \mathbb{R}$, и имеет место формула дифференцирования (2.2.4). Кроме того, из определения матричной экспоненты следует, что $e^{0 \cdot \mathbf{A}} = \mathbf{E}$. Значит, $e^{t\mathbf{A}}$ – решение матричного уравнения

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{Y}(t)\big) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$, или, что то же самое, $\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}}$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ такая, что $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{E}$. Лемма 2.3 доказана.

2.3. Построение фундаментальной матрицы решений однородной системы с использованием корневого базиса

Пусть A – линейный оператор конечномерного векторного пространства V над полем $K = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) и пусть $\mathbf{A}$ – матрица оператора A в стандартном базисе $e_1, \ldots, e_n : \mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Рассмотрим линейную однородную систему с матрицей коэффициентов $\mathbf{A} : \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Решить эту систему – означает найти какую-либо фундаментальную матрицу решений $\mathbf{\Phi}(t)$, поскольку общее решение по теореме 2.3 задается формулой

$\mathbf{y}(t, c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{c}$. Нам уже известно, что одной из фундаментальных матриц решений системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ является матричная экспонента $e^{t\mathbf{A}}$. Однако вычисление $e^{t\mathbf{A}}$ с помощью матричного ряда (2.2.3) весьма затруднительно, если $\mathbf{A}$ – произвольная матрица. Рассмотрим $\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ – невырожденная постоянная матрица. В п. 2.2. было доказано, что $\mathbf{Y}(t)$ также является фундаментальной матрицей решений однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Действительно, $\mathbf{Y}(t)$ – решение матричного уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{Y}(t)\right) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{B}$, $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Оказывается, что фундаментальную матрицу $\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}$ легко построить в случае, когда матрица **B** составлена из векторов корневого базиса пространства *V* относительно оператора *A*.

Прежде чем приступить к построению этой фундаментальной матрицы, выпишем некоторое представление для матричной экспоненты $e^{t\mathbf{A}}$. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Легко видеть, что имеет место матричное равенство $\mathbf{A} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) + \lambda\mathbf{E}$. Кроме того, матрица $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ перестановочна с диагональной матрицей $\lambda\mathbf{E}$: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\lambda\mathbf{E} = \lambda\mathbf{E}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Следовательно, по лемме 2.2 получим:

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\lambda\mathbf{E}} \cdot e^{t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})} = e^{\lambda t} \cdot \mathbf{E} \cdot e^{t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})} = e^{\lambda t} \cdot \left[\mathbf{E} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) + \frac{t^2}{2!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 + \ldots\right]. \qquad (2.3.1)$$

Очевидно, что представление (2.3.1) для $e^{t\mathbf{A}}$ справедливо при любых конечных значениях параметра λ.

Перейдем к построению матрицы **B**.

Предположим, что все корни характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ оператора *A* принадлежат полю скаляров *K*, т. е.

$$\operatorname{Sp} A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \subseteq K,\ \lambda_j \neq \lambda_i \text{ при } j \neq i,\ 1 \le j,\ i \le s.$$

Это означает, что характеристический многочлен оператора разлагается над полем *K* на линейные множители:

$$\chi_A(\lambda) = \pm\prod_{j=1}^{s}(\lambda - \lambda_j)^{k_j},\ \lambda_j \in K,\ \lambda_j \neq \lambda_i \text{ при } j \neq i,\ 1 \le j,\ i \le s.$$

Тогда по теореме 1.2 о корневом разложении пространство *V* разлагается в прямую сумму корневых подпространств

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s,\ V_j = V^{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j E)^{k_j}.$$

При этом размерность корневого подпространства совпадает с кратностью соответствующего собственного значения как корня характеристического многочлена: $\dim V_j = k_j$, $j = 1, \ldots, s$.

Каждое корневое подпространство V_j представляет собой пространство решений однородной системы линейных уравнений

$$(\mathbf{A} - \lambda_j\mathbf{E})^{k_j}\mathbf{b}^{(\lambda_j)} = \mathbf{0}. \qquad (2.3.2)$$

Поскольку $\dim V_j = k_j$, то фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы (2.3.2) состоит из k_j векторов. Обозначим их $\mathbf{b}_1^{(\lambda_j)}, \ldots, \mathbf{b}_{k_j}^{(\lambda_j)}$. Эти векторы и образуют базис корневого подпространства V_j.

Объединение базисов всех корневых подпространств представляет собой корневой базис пространства *V* относительно оператора *A*: $\mathbf{b}_1^{(\lambda_1)}, \ldots, \mathbf{b}_{k_1}^{(\lambda_1)},\ \mathbf{b}_1^{(\lambda_2)}, \ldots, \mathbf{b}_{k_2}^{(\lambda_2)}, \ldots,\ \mathbf{b}_1^{(\lambda_s)}, \ldots, \mathbf{b}_{k_s}^{(\lambda_s)}$. Матрицу **B** составим по столбцам из векторов корневого базиса. Ясно, что $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Приступим теперь к построению фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}$.

Пусть λ_1 – корень кратности k_1 характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$. Выпишем выражения для первых k_1 столбцов $\mathbf{y}_1^{(\lambda_1)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_1}^{(\lambda_1)}(t)$ матрицы $\mathbf{Y}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}$. Ясно, что

$$\mathbf{y}_1^{(\lambda_1)}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}_1^{(\lambda_1)},$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{y}_{k_1}^{(\lambda_1)}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}_{k_1}^{(\lambda_1)}.$$

Воспользуемся представлением (2.3.1) для матричной экспоненты $e^{t\mathbf{A}}$, положив $\lambda=\lambda_1$. Кроме того, заметим, что столбцы $\mathbf{b}_1^{(\lambda_1)},\ldots,\mathbf{b}_{k_1}^{(\lambda_1)}$ матрицы **B** составляют базис корневого подпространства V^{λ_1}, т. е. являются линейно независимыми решениями векторного уравнения (2.3.2), в котором $j=1$. Искомые выражения для первых k_1 столбцов $\mathbf{y}_1^{(\lambda_1)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_1}^{(\lambda_1)}(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}$ имеют вид

$$\mathbf{y}_i^{(\lambda_1)}(t)=e^{\lambda_1 t}\left[\mathbf{E}+\sum_{m=1}^{k_1-1}\frac{t^m}{m!}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})^m\right]\cdot\mathbf{b}_i^{(\lambda_1)},\ i=1,\ldots,k_1,$$

где $\mathbf{b}_1^{(\lambda_1)},\ldots,\mathbf{b}_{k_1}^{(\lambda_1)}$ – фундаментальная система решений уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})^{k_1}\mathbf{b}^{(\lambda_1)}=\mathbf{0}.$$

Таким образом, кратному корню λ_1 соответствуют k_1 линейно независимых решений $\mathbf{y}_1^{(\lambda_1)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_1}^{(\lambda_1)}(t)$ системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Рассмотрим теперь λ_2 – корень кратности k_2 характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ и выпишем выражения для следующих k_2 штук столбцов $\mathbf{y}_1^{(\lambda_2)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_2}^{(\lambda_2)}(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}$. Получим

$$\mathbf{y}_1^{(\lambda_2)}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}_1^{(\lambda_2)},$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{y}_{k_2}^{(\lambda_2)}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}_{k_2}^{(\lambda_2)}.$$

Воспользуемся формулой (2.3.1) для матричной экспоненты $e^{t\mathbf{A}}$, положив теперь $\lambda=\lambda_2$. Заметим также, что столбцы $\mathbf{b}_1^{(\lambda_2)},\ldots,\mathbf{b}_{k_2}^{(\lambda_2)}$ матрицы **B** составляют базис корневого подпространства V^{λ_2}, т. е. являются линейно независимыми решениями векторного уравнения (2.3.2), в котором $j=2$. Искомые выражения для столбцов $\mathbf{y}_1^{(\lambda_2)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_2}^{(\lambda_2)}(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)=e^{t\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}$ имеют вид

$$\mathbf{y}_i^{(\lambda_2)}(t)=e^{\lambda_2 t}\left[\mathbf{E}+\sum_{m=1}^{k_2-1}\frac{t^m}{m!}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})^m\right]\cdot\mathbf{b}_i^{(\lambda_2)},\ i=1,\ldots,k_2,$$

где $\mathbf{b}_1^{(\lambda_2)},\ldots,\mathbf{b}_{k_2}^{(\lambda_2)}$ – фундаментальная система решений уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})^{k_2}\mathbf{b}^{(\lambda_2)}=\mathbf{0}.$$

Мы получили, что корню λ_2 соответствуют k_2 линейно независимых решений $\mathbf{y}_1^{(\lambda_2)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_2}^{(\lambda_2)}(t)$ системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Осталось рассмотреть корни $\lambda_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_s$ характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$. Рассуждая аналогично, можно выписать выражения для соответствующих групп столбцов

$\mathbf{y}_1^{(\lambda_3)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_3}^{(\lambda_3)}(t)$; $\mathbf{y}_1^{(\lambda_4)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_4}^{(\lambda_4)}(t)$; …; $\mathbf{y}_1^{(\lambda_s)}(t),\ldots,\mathbf{y}_{k_s}^{(\lambda_s)}(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)$.

Так как $\sum\limits_{j=1}^{s} k_j = n$, то построение фундаментальной матрицы решений $\mathbf{Y}(t) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}$ однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ завершено.

Отметим, что полученные формулы для столбцов фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}(t)$ однотипны в случае каждого характеристического корня λ, а именно: каждому корню λ кратности k соответствуют ровно k линейно независимых решений $\mathbf{y}_1^{(\lambda)}(t),\ldots,\mathbf{y}_k^{(\lambda)}(t)$ однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}_i^{(\lambda)}(t) = e^{\lambda t}\left[\mathbf{E} + \sum_{m=1}^{k-1}\frac{t^m}{m!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m\right]\cdot \mathbf{b}_i^{(\lambda)} \equiv e^{\lambda t}\cdot \mathbf{P}_i^{(\lambda)}(t),\ i = 1,\ldots,k, \tag{2.3.3}$$

где $\mathbf{b}_1^{(\lambda)},\ldots,\mathbf{b}_k^{(\lambda)}$ – фундаментальная система решений уравнения

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^k\,\mathbf{b}^{(\lambda)} = \mathbf{0}. \tag{2.3.4}$$

Замечание. В результате вычислений по формулам (2.3.3), (2.3.4) часть старших по t слагаемых в вектор-полиноме $\mathbf{P}_i^{(\lambda)}(t)$ может занулиться, а степень полинома $\mathbf{P}_i^{(\lambda)}(t)$ – уменьшиться. Это связано с *высотой корневого вектора* $\mathbf{b}_i^{(\lambda)}$. Приведем определение:

Вектор $\mathbf{b}$ из пространства V называется *корневым вектором высоты* h, отвечающим собственному значению λ оператора A (матрицы $\mathbf{A}$), если

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^h\,\mathbf{b} = \mathbf{0},\quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{h-1}\,\mathbf{b} \neq \mathbf{0}.$$

Корневые векторы высоты 1 – это просто собственные векторы. Корневое подпространство V^λ состоит из нуля и всех корневых векторов, отвечающих λ. При этом (см. п. 1.2 гл. 1) максимальная высота корневого вектора, отвечающего λ, равна

$$h(\lambda) = \min\{h \mid (A - \lambda E)^h V = (A - -\lambda E)^{h+1} V\}.$$

Кроме того, $h(\lambda) \le k(\lambda)$, где $k(\lambda)$ – кратность собственного значения λ как корня характеристического многочлена.

Назовем *длиной решения* $\mathbf{y}_i^{(\lambda)}(t)$, соответствующего по формуле (2.3.3) корню λ и вектору $\mathbf{b}_i^{(\lambda)}$, число ненулевых слагаемых в вектор-полиноме $\mathbf{P}_i^{(\lambda)}(t)$. Очевидно, это число равно высоте корневого вектора $\mathbf{b}_i^{(\lambda)}$. Поскольку базисные векторы $\mathbf{b}_1^{(\lambda)},\ldots,\mathbf{b}_k^{(\lambda)}$ корневого подпространства V^λ выбираются неоднозначно, то длина соответствующего решения может колебаться от 1 до $h(\lambda) \le k(\lambda)$. При этом в любом базисном наборе содержится корневой вектор максимальной высоты $h(\lambda)$, значит, по крайней мере, одно решение будет иметь длину $h(\lambda)$.

Осталось отметить, что формулы (2.3.3), (2.3.4) справедливы как в случае кратного характеристического корня λ, так и в случае простого корня. Действительно, пусть λ – простой корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$. Тогда соответствующее корневое подпространство V^λ одномерно. Корневой вектор $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ высоты 1 или, что то же самое, собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, образует базис этого подпространства. Решение $\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)$ однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, соответствующее простому корню λ, имеет вид

$$\mathbf{y}^{(\lambda)}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{b}^{(\lambda)}, \tag{2.3.5}$$

где $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ – решение векторного уравнения

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{b}^{(\lambda)} = \mathbf{0}. \tag{2.3.6}$$

Продемонстрируем на примерах построение фундаментальной матрицы решений системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ по формулам (2.3.3) и (2.3.4). При этом будем рассматривать системы из трех уравнений с вещественными коэффициентами.

Пример 2.1. Решить линейную однородную систему уравнений $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ имеет вид

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Поскольку все корни характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ простые и вещественные, то пространство $\mathbb{R}^3$ является прямой суммой одномерных корневых подпространств V^1, V^2, V^3. Это означает, что в $\mathbb{R}^3$ существует базис из собственных векторов оператора A с собственными значениями 1, 2, 3 соответственно. Найдем этот базис, используя алгоритм из гл. 1 (вместо того, чтобы решать три системы вида (2.3.6) с $\lambda = 1, 2, 3$):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{A} - \mathbf{E} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & \boxed{2} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

После вычислений очевидно, что вектор $\mathbf{b}^{(1)} = (0, -1, 1)^T$ образует базис подпространства $V^1 = \operatorname{Ker}(A - E)$ собственных векторов оператора A с собственным значением 1. Собственные векторы с собственными значениями 2 и 3 содержатся в линейной оболочке векторов $\mathbf{f}_1 = (0, -1, 2)^T$ и $\mathbf{f}_2 = (-1, 1, 2)^T$. Найдем их таким же способом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{f}_1 & (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline -1 & -2 \\ \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ \hline -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Легко видеть, что вектор $\mathbf{b}^{(2)} = (-1, 3, -2)^T$ образует базис подпространства $V^2 = \operatorname{Ker}(A - 2E)$ собственных векторов оператора A с собственным значением 2, а вектор $\mathbf{b}^{(3)} = (-1, 2, 0)^T$ – базис подпространства $V^3 = \operatorname{Ker}(A - 3E)$ собственных векторов оператора A с собственным значением 3.

Каждому простому корню λ по формуле (2.3.5) соответствует вектор-функция $\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)$ – столбец фундаментальной матрицы решений однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Полагая $\lambda = 1, 2, 3,$ имеем

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = e^t \mathbf{b}^{(1)}, \ \mathbf{y}^{(2)}(t) = e^{2t} \mathbf{b}^{(2)}, \ \mathbf{y}^{(3)}(t) = e^{3t} \mathbf{b}^{(3)}.$$

Тогда, очевидно, общим решением системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ будет

$$\mathbf{y}(t)=c_1\mathbf{y}^{(1)}(t)+c_2\mathbf{y}^{(2)}(t)+c_3\mathbf{y}^{(3)}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}+c_3e^{3t}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Найти общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-7&-1\\2&-3&-1\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

Имеем $\chi_A(\lambda)=\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

В нашем случае $\mathrm{Sp}\;A=\{1,2\}\subset\mathbb{R}$. Поэтому пространство $\mathbb{R}^3$ является прямой суммой корневых подпространств V^1 и $V^2:\mathbb{R}^3=V^1\oplus V^2$, где $V^1=\mathrm{Ker}\,(A-E)^2$, $V^2=\mathrm{Ker}\,(A-2E)$, $\dim V^1=2$, $\dim V^2=1$. Найдем базисы корневых подпространств V^1 и V^2, используя алгоритм, описанный в гл. 1. Здесь, так же как и в примере 1.2 гл. 1, вычисления пройдут в один этап, если применить способ одновременного поиска ядра и образа для оператора $A-2E$, где $\lambda=2$ – простой корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{A}-2\mathbf{E}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 2&-7&-1\\2&-5&-1\\\boxed{-2}&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\\\hline 2&-5&0\\2&-3&0\\-2&0&0\end{array}\right).$$

В итоге вектор $\mathbf{b}^{(2)}=(1,\,0,\,2)^T$ образует базис корневого подпространства V^2, а векторы $\mathbf{b}_1^{(1)}=(1,\,1,\,-1)^T$, $\mathbf{b}_2^{(1)}=(5,\,3,\,0)^T$ – базис корневого подпространства V^1.

Далее, подставляя в формулы (2.3.5) и (2.3.3) собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ и векторы корневого базиса, найдем три вектор-функции, образующие фундаментальную систему решений (ФСР) нашей однородной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Простому корню $\lambda=2$ по формуле (2.3.5) соответствует одно решение $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ длины 1:

$$\mathbf{y}^{(2)}(t)=e^{2t}\mathbf{b}^{(2)}=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Корню $\lambda=1$ кратности 2 по формуле (2.3.3) соответствуют два линейно независимых решения $\mathbf{y}_1^{(1)}(t)$ и $\mathbf{y}_2^{(1)}(t)$:

$$\mathbf{y}_1^{(1)}(t)=e^{t}\left[\mathbf{E}+t(\mathbf{A}-\mathbf{E})\right]\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=e^{t}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix}\right],$$

$$\mathbf{y}_2^{(1)}(t)=e^{t}\left[\mathbf{E}+t(\mathbf{A}-\mathbf{E})\right]\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}=e^{t}\left[\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-6\\-2\\-4\end{pmatrix}\right].$$

Вектор-функции $\mathbf{y}^{(2)}(t)$, $\mathbf{y}_1^{(1)}(t)$, $\mathbf{y}_2^{(1)}(t)$ образуют фундаментальную систему решений исходной однородной системы. Значит, общее решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{y}(t)=c_1\mathbf{y}^{(2)}(t)+c_2\mathbf{y}_1^{(1)}(t)+c_3\mathbf{y}_2^{(1)}(t).$$

Пример 2.3. Пусть теперь матрица **A** линейной однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$. Найдем, в соответствии с алгоритмом, изложенным выше, базисы корневых подпространств $V^{-1} = \mathrm{Ker}\,(A+E)^2$ и $V^5 = \mathrm{Ker}\,(A-5E)$ пространства $V = \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{A}-5\mathbf{E} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 6 & -6 \\ 2 & \boxed{-6} & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 6 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В итоге вектор $\mathbf{b}^{(5)} = (1,\ 1,\ 1)^T$ образует базис корневого подпространства V^5, а векторы $\mathbf{b}_1^{(-1)} = (-2,\ 1, 1)^T$, $\mathbf{b}_2^{(-1)} = (1,\ -1, 0)^T$ – базис корневого подпространства V^{-1}.

Легко видеть, что $\mathrm{rank}\,(A+E) = 1$. Значит, $\mathrm{def}\,(A+E) = 2$. С другой стороны, $\dim V^{-1} = \mathrm{def}\,(A+E)^2 = 2$. Это означает, что $\mathrm{Ker}\,(A+E) = \mathrm{Ker}\,(A+E)^2$, т. е. корневое подпространство V^{-1} состоит из собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda = -1$.

Следовательно, пространство $\mathbb{R}^3$ имеет базис из собственных векторов оператора A, а сам оператор A является диагонализируемым.

В этом случае фундаментальная система решений векторного уравнения $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ состоит только из решений длины 1. В самом деле, простому корню $\lambda = -5$ по формуле (2.3.5) соответствует решение $\mathbf{y}^{(5)}(t)$ длины 1

$$\mathbf{y}^{(5)}(t) = e^{5t}\mathbf{b}^{(5)} = e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

а корню $\lambda = -1$ кратности 2 по формуле (2.3.3) соответствуют два линейно независимых решения $\mathbf{y}_1^{(-1)}(t)$ и $\mathbf{y}_2^{(-1)}(t)$, причем длина каждого из этих решений тоже равна 1:

$$\mathbf{y}_1^{(-1)}(t) = e^{-t}\mathbf{b}_1^{(-1)} = e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{y}_2^{(-1)}(t) = e^{-t}\mathbf{b}_2^{(-1)} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение рассмотренного векторного уравнения $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}^{(5)}(t) + c_2\mathbf{y}_1^{(-1)}(t) + c_3\mathbf{y}_2^{(-1)}(t).$$

Пример 2.4. Рассмотрим линейную однородную систему уравнений $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Легко найти характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^3.$$

Таким образом, $\lambda=-2$ – корень кратности 3 многочлена $\chi_A(\lambda)$, $\operatorname{Sp} A = -2 \subset \mathbb{R}$. Заметим, что для вещественной матрицы $\mathbf{A}$ единственный корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ всегда вещественный. По теореме 1.2 о корневом разложении $V=\mathbb{R}^3=V^{(-2)}=\operatorname{Ker}\,(A+2E)^3$, $\dim V^{(-2)}=\operatorname{def}\,(A+2E)^3$, $\operatorname{rank}\,(A+2E)^3=0$, значит, матрица $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^3$ – нулевая. В качестве базисных векторов $V^{(-2)}$ можно взять векторы $\mathbf{b}_1^{(-2)}=(1,0,0)^T$, $\mathbf{b}_2^{(-2)}=(0,1,0)^T$, $\mathbf{b}_3^{(-2)}=(0,0,1)^T$.

Выпишем по формуле (2.3.3) три линейно независимых решения $\mathbf{y}_1^{(-2)}(t)$, $\mathbf{y}_2^{(-2)}(t)$, $\mathbf{y}_3^{(-2)}(t)$ исходной системы, соответствующие корню $\lambda=-2$ кратности 3 и векторам $\mathbf{b}_1^{(-2)}$, $\mathbf{b}_2^{(-2)}$, $\mathbf{b}_3^{(-2)}$. Для этого нам понадобится вид матрицы $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^2$. Имеем

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\-2&-3&-2\end{pmatrix},\quad (\mathbf{A}+2\mathbf{E})^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}_1^{(-2)}(t)=e^{-2t}\left[\mathbf{E}+t(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+\frac{t^2}{2}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^2\right]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=e^{-2t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right],$$

$$\mathbf{y}_2^{(-2)}(t)=e^{-2t}\left[\mathbf{E}+t(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+\frac{t^2}{2}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^2\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=e^{-2t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right],$$

$$\mathbf{y}_3^{(-2)}(t)=e^{-2t}\left[\mathbf{E}+t(\mathbf{A}+2\mathbf{E})+\frac{t^2}{2}(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^2\right]\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=e^{-2t}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right].$$

Вектор-функции $\mathbf{y}_1^{(-2)}(t)$, $\mathbf{y}_2^{(-2)}(t)$, $\mathbf{y}_3^{(-2)}(t)$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$. Значит, общее решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{y}(t)=c_1\mathbf{y}_1^{(-2)}(t)+c_2\mathbf{y}_2^{(-2)}(t)+c_3\mathbf{y}_3^{(-2)}(t).$$

Осталось рассмотреть последний случай. Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ – комплексный корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$. Проиллюстрируем эту ситуацию на примере.

Пример 2.5. Решить линейную однородную систему уравнений $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&0&1\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $\chi_A(\lambda)$ имеет вид

$$\chi_A(\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1=-(\lambda-1)(\lambda-i)(\lambda+i).$$

Таким образом, один корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$ – вещественный, а два других – комплексно сопряженные.

Из алгебры известно, что если $\mathbf{A}$ – вещественная квадратная матрица и $\lambda=\alpha+i\beta$ – комплексный корень характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$, то $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta\in\mathbb{C}$ – тоже корень $\chi_A(\lambda)$. Если порядок матрицы $\mathbf{A}$ равен 3, то очевидно, что оставшийся корень μ характеристического многочлена – вещественный. Этому корню соответствует вещественный собственный вектор $\mathbf{b}^{(\mu)}$ оператора A (матрицы $\mathbf{A}$) – ненулевое решение векторного уравнения $(\mathbf{A}-\mu\mathbf{E})\,\mathbf{b}^{(\mu)}=\mathbf{0}$. Пусть теперь $\mathbf{b}^{(\lambda)}=\mathbf{u}-i\mathbf{v}$ – собственный вектор оператора A, отвечающий комплексному собственному значению λ, т. е. $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ – решение векторного уравнения $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\,\mathbf{b}^{(\lambda)}=\mathbf{0}$. Тогда имеем $(\mathbf{A}-\bar{\lambda}\mathbf{E})\,\overline{\mathbf{b}^{(\lambda)}}=\mathbf{0}$. Это означает, что вектор $\overline{\mathbf{b}^{(\lambda)}}=\mathbf{u}-i\mathbf{v}$ является собственным вектором оператора *A*, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$.

Вещественному корню μ и двум комплексно сопряженным корням λ и $\bar{\lambda}$ соответствуют вектор-функции $\mathbf{y}^{(\mu)}(t)$, $\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)$, $\mathbf{y}^{(\bar{\lambda})}(t)$ – столбцы фундаментальной матрицы решений $\mathbf{Y}_1(t)$ исходной однородной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}^{(\mu)}(t)=e^{\mu t}\mathbf{b}^{(\mu)},\ \mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=e^{\lambda t}\mathbf{b}^{(\lambda)},\ \mathbf{y}^{(\bar{\lambda})}(t)=e^{\bar{\lambda}t}\overline{\mathbf{b}^{(\lambda)}}.$$

Очевидно, $\mathbf{y}^{(\bar{\lambda})}(t)=\overline{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)}$. Вместо двух комплексно сопряженных решений $\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)$, $\overline{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)}$ рассмотрим два вещественных решения

$$\mathbf{y}_1^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Re}\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=\frac{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)+\overline{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)}}{2}\ \text{ и }\ \mathbf{y}_2^{(\lambda)}(t)=\operatorname{Im}\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=\frac{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)-\overline{\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)}}{2i}.$$

Пусть матрица $\mathbf{Y}_2(t)$ состоит по столбцам из вещественных вектор-функций $\mathbf{y}^{(\mu)}(t)$, $\mathbf{y}_1^{(\lambda)}(t)$, $\mathbf{y}_2^{(\lambda)}(t)$. Легко видеть, что матрицы $\mathbf{Y}_1(t)$ и $\mathbf{Y}_2(t)$ связаны с помощью невырожденной постоянной матрицы **P** равенством

$$\mathbf{Y}_2(t)=\mathbf{Y}_1(t)\cdot\mathbf{P},\quad \text{где } \mathbf{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i}\end{pmatrix},\quad \det\mathbf{P}=\frac{1}{2}i.$$

Отсюда следует (см. п. 2.1), что вещественная матрица $\mathbf{Y}_2(t)$ – тоже фундаментальная матрица решений однородной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Выпишем выражения для вектор-столбцов фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}_2(t)$. Первый столбец у матриц $\mathbf{Y}_1(t)$ и $\mathbf{Y}_2(t)$ одинаковый. Он состоит из компонент вектор-функции $\mathbf{y}^{(\mu)}(t)$:

$$\mathbf{y}^{(\mu)}(t)=e^{\mu t}\mathbf{b}^{(\mu)}. \tag{2.3.7}$$

Поскольку

$$\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=e^{\lambda t}\mathbf{b}^{(\lambda)}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(\mathbf{u}+i\mathbf{v}),$$

то выражения для оставшихся столбцов фундаментальной матрицы $\mathbf{Y}_2(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1^{(\lambda)}(t)&=\operatorname{Re}\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos\beta t-\mathbf{v}\sin\beta t),\\ \mathbf{y}_2^{(\lambda)}(t)&=\operatorname{Im}\mathbf{y}^{(\lambda)}(t)=e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin\beta t+\mathbf{v}\cos\beta t).\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Вернемся к нашему примеру. Из вышеизложенного ясно, что для построения вещественной фундаментальной матрицы решений по формулам (2.3.7), (2.3.8) необходимо вычислить собственный вектор $\mathbf{b}^{(1)}$, отвечающий вещественному корню $\lambda=1$, и собственный вектор $\mathbf{b}^{(i)}=\mathbf{u}+i\mathbf{v}$, отвечающий комплексному корню $\lambda=i$. Снова используем приведенный ранее алгоритм вместо того, чтобы решать две системы вида (2.3.6) с $\lambda=1$ и $\lambda=i$ соответственно.

Вычисления начнем с вещественного корня

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{A}-\mathbf{E}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ \boxed{2} & 2 & -2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{array}\right).$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{b}^{(1)} = (1,\ -1,\ 0)^T$ образует базис пространства $\operatorname{Ker}(A+iE)$ собственных векторов оператора A с собственным значением 1. Собственные векторы с собственными значениями $i,\ -i$ содержатся в линейной оболочке векторов $\mathbf{f}_1 = (1,\ -1,\ 2)^T$ и $\mathbf{f}_2 = (-2,\ 1,\ -2)^T$. Их можно найти таким же способом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \\ (\mathbf{A}+i\mathbf{E})\mathbf{f}_1 & (\mathbf{A}+i\mathbf{E})\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{g} \\ (\mathbf{A}+i\mathbf{E})\mathbf{f}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

В итоге вектор $\mathbf{g} = \mathbf{b}^{(-i)}$ образует базис пространства $\operatorname{Ker}(A+iE)$ собственных векторов оператора A с собственным значением $-i$, а вектор $(\mathbf{A}+i\mathbf{E})\mathbf{f}_1 = \mathbf{b}^{(i)}$ – базис пространства $\operatorname{Ker}(A-iE)$ собственных векторов оператора A с собственным значением i. Из предыдущего известно, что $\mathbf{b}^{(-i)} = \overline{\mathbf{b}^{(i)}}$ (с точностью до пропорциональности). Поэтому второй этап вычислений (нахождение вектора **g**) можно опустить, а искомый вектор $\mathbf{b}^{(i)}$ найти предложенным способом

$$\mathbf{b}^{(i)} = (\mathbf{A}+i\mathbf{E})\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -2 \\ -1 & i & 1 \\ 2 & 2 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+i \\ 1-i \\ -2+2i \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\mathbf{u} = \operatorname{Re}\mathbf{b}^{(i)} = (-3,\ 1,\ -2)^T$, $\mathbf{v} = \operatorname{Im}\mathbf{b}^{(i)} = (1,\ -1,\ 2)^T$.

Вещественному корню $\lambda = 1$ по формуле (2.3.7) соответствует вещественное решение $\mathbf{y}^{(1)}(t)$:

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = e^t\mathbf{b}^{(1)} = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Комплексно сопряженным корням $\lambda = i$, $\lambda = -i$ по формулам (2.3.8) соответствуют два вещественных решения $\mathbf{y}_1^{(i)}(t)$ и $\mathbf{y}_2^{(i)}(t)$:

$$\mathbf{y}_1^{(i)}(t) = \operatorname{Re}\mathbf{y}^{(i)}(t) = \mathbf{u}\cos t - \mathbf{v}\sin t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin t,$$

$$\mathbf{y}_2^{(i)}(t) = \operatorname{Im}\mathbf{y}^{(i)}(t) = \mathbf{u}\sin t + \mathbf{v}\cos t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\sin t - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos t.$$

Вектор-функции $\mathbf{y}^{(1)}(t),\ \mathbf{y}_1^{(i)}(t),\ \mathbf{y}_2^{(i)}(t)$ образуют по столбцам фундаментальную матрицу решений исходной однородной системы $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Значит, общее решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{y}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{y}_1^{(i)}(t) + c_3\mathbf{y}_2^{(i)}(t) = c_1e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3\cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -3\sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t + 2\cos t \end{pmatrix}.$$

Список литературы

Годунов С. К. Матричная экспонента, матрица Грина и условия Лопатинского. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.

Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

Чуркин В. А. Жорданова классификация конечномерных линейных операторов: Метод. указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1991.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

Материал поступил в редколлегию 16.08.2009

N. V. Dementyeva, V. A. Churkin

SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT FACTORS AND ROOT EXPANSION FOR LINEAR OPERATORS

The construction method of fundamental matrix solutions of linear homogeneous system with constant factors on root basis is stated. The detailed description of this method is not available in books on differential equations. In the first section, besides the proof of the root expansion theorem, the effective algorithm of root vectors search is described. The second section contains necessary data on fundamental matrixes and matrix exponent, and also the substantiation of the offered method of fundamental matrix construction. As a whole a new and more compact statement of the theory of linear systems with constant factors is given. The appropriate problems solving technique can be easier assimilated by students.

Keywords: linear differential equations systems, fundamental matrix of solutions, root basis, kernel-shaped expansion, matrix exponent.