УДК 519.86

Е. А. Галькова [1], Л. С. Маергойз [2], Р. Г. Хлебопрос [3]

[1] Красноярский институт железнодорожного транспорта
филиал Иркутского государственного университета путей сообщения
ул. Ладо Кецховели, 89, Красноярск, 660028, Россия
E-mail: resurs7777@yandex.ru

[2] Сибирский федеральный университет
Институт архитектуры и строительства
пр. Свободный, 82, Красноярск, 660041, Россия
E-mail: bear.lion@mail.ru

[3] Сибирский федеральный университет
Институт экономики и природопользования
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия
E-mail: olikru@yandex.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНЫМ ИНВЕСТИРОВАНИЕМ *

На примере квартир в жилом доме, рассматривается алгоритм оптимального распределения стоимостей единицы недвижимости между ее различными категориями с целью получения заданной нормы прибыли. Для его реализации нужно знать градацию этих категорий (более престижные, менее престижные). Алгоритм применим и в случае неравномерного потребления членами коллектива инвесторов какого-либо ресурса (например, электроэнергии) в тех случаях, когда отсутствует регистрация объема потребления этого ресурса отдельными представителями этого коллектива (например, при использовании лифта в подъездах жилых домов).

Введение

В работах [1–4] рассматривался алгоритм оптимального распределения стоимостей единицы недвижимости между группами инвесторов с различными льготами. В данной статье найдены новые приложения этого алгоритма.

С одной стороны, он применяется для управления коллективным инвестированием недвижимости в рыночных условиях. Поясним его действие на примере продажи жилого дома коллективу инвесторов. Обычно застройщик дома продает квартиры по фиксированной стоимости за квадратный метр на любом этаже. При этом возникает ситуация, когда наиболее престижные категории квартир раскупают, а квартиры, например, на первом и последнем этажах (если они не пригодны для офисов) достаточно сложно реализовать. Зачастую застройщик продает эти квартиры со скидкой и теряет при этом часть прибыли. Использование упомянутого алгоритма даст возможность получить заданную норму прибыли благодаря распределению стоимости квартир в зависимости от категории привлекательности, т. е. квартиры на более престижных этажах реализовать дороже, а квартиры на менее престижных этажах дешевле. В целом это позволит быстро продать квартиры во всем доме, не теряя прибыль.

С другой стороны, алгоритм применим и в случае неравномерного потребления членами коллектива инвесторов какого-либо ресурса (например, электроэнергии) в тех случаях, когда отсутствует регистрация объема потребления этого ресурса отдельными представителями такого коллектива (например, при использовании лифта в подъездах жилых домов).

Алгоритм оптимального распределения стоимостей между различными по престижности частями недвижимости

Введем обозначения: N – число различных по престижности категорий недвижимости; R – себестоимость всей недвижимости; P – желаемая прибыль, которую получит предприниматель после реализации недвижимости; $C = R + P$ – стоимость всей недвижимости, выстав-

* Работа выполнена при финансовой поддержке СФУ по НМ проекту № 54.2007.

ляемой на продажу; S_i – число единиц недвижимости в i-й категории, $i = 1, 2, \ldots, N$; $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ – общее число единиц недвижимости; $c = C/S$ – средняя стоимость единицы недвижимости. Обозначим через c_i стоимость единицы недвижимости для категории с номером i, где $i = 1, 2, \ldots, N$. Число $\lambda_i = c_i/c$ назовем *рыночным коэффициентом* для i-й категории, $i = 1, 2, \ldots, N$. Упорядочим категории в порядке возрастания их престижности. Тогда $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$. В работах [1–4] рассматривалась ситуация, при которой $P = 0$. В этом случае категория недвижимости с номером i представляла собой часть недвижимости, приобретаемую группой инвесторов по цене c_i за единицу недвижимости, где $i = 1, 2, \ldots, N$, причем категории были упорядочены в направлении убывания льгот, т. е. $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$. Такая ситуация возникает, например, когда в долевом строительстве жилого дома принимают участие сотрудники одной организации, фирмы и разбиение инвесторов на льготные группы происходит с учетом их стажа работы в данном предприятии. По этой причине числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ назывались *льготными коэффициентами*. Было показано, что они удовлетворяют следующему соотношению во введенных обозначениях:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i = 1, \tag{1}$$

где $s_i = S_i/S$ – доля общей недвижимости, принадлежащая i-й категории, $i = 1, \ldots, N$. Поскольку $\sum_{i=1}^{N} s_i = 1$, то из равенства (1) видно, что начиная с некоторого номера i коэффициент $\lambda_i > 1$ (по крайней мере всегда $1 < \lambda_N < 1/s_N$).

Как предлагалось ранее (см. [1–2]), выбор этих коэффициентов осуществляется с помощью нахождения точки минимума функционала:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2$$

при дополнительном условии

$$\lambda_N = \eta, \tag{2}$$

где η – фиксированное число из интервала $(1; 1/s_N)$. Тогда минимум функционала (1) находится по формуле $m = \frac{(1-\eta)^2}{\|b\|^2}$ и достигается в точке с координатами

$$\lambda_i = \eta - \sum_{j=i}^{N-1} \alpha_j,\ \alpha_j = \frac{(\eta-1) b_j}{\|b\|^2},\ b_j = \sum_{i=1}^{j} s_i,\ \|b\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} b_j^2, \tag{3}$$

где $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, N-1$ (см. [2]).

Кроме того, должно выполняться условие $\lambda_1 > 0$. Поскольку $\lambda_1 = \eta - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\eta-1) \cdot b_j}{\|b\|^2}$ (см. [2]), то справедливо неравенство

$$1 < \eta < B \Big/ \left(B - \|b\|^2\right),\ B = \sum_{j=1}^{N-1} b_j. \tag{4}$$

Еще более общие условия на λ_i рассмотрены в работе [4].

Проиллюстрируем действия алгоритма на задаче управления коллективным инвестированием при долевом строительстве или при продаже готовых квартир в новом жилом доме.

В этом примере будем фиксировать стоимость c_N одного квадратного метра жилой площади самой престижной ее категории и, следовательно, это означает выполнение условия (2).

Взят типичный дом в одном из районов Красноярска и проанализирован спрос на различные этажи на первичном рынке. Престижность того или иного этажа отражена диаграммой (рис. 1).

Из диаграммы видно, что престижные квартиры располагаются на 3 и 6 этажах. В дальнейшем при использовании алгоритма будем учитывать данные, представленные в диаграмме. Низкая привлекательность второго этажа обусловлена тем, что большинство строящихся домов в этом районе находятся внутри жилого массива. Поэтому на нижних этажах ощущается недостаток освещения в дневное время суток. Несмотря на это, первый этаж является самым дорогим, поскольку он предназначен под офисы. Учитывая эти обстоятельства и спрос на квартиры, которые находятся на разных этажах, получаем следующую цепочку престижности этажей:

$$2 < 4 < 9 < 10 < 7 < 8 < 6 < 5 < 3 < 1. \tag{5}$$

Рассчитаем рыночный коэффициент λ_i для одного из девятиэтажных домов в этом районе по формулам (2), (3), (4). Площадь этого дома составляет S = 6144,51 кв. м. По проекту первый этаж строится под офисы и ТСЖ. Его площадь составляет 702,6 кв. м, а площадь на каждом из остальных этажах – 680,24 кв. м. Сумма, которую планирует получить застройщик, равна $C = 153612{,}75$ тыс. руб. Средняя стоимость квадратного метра $c = 25$ тыс. руб./кв. м, и $s_i = S_i / S$ – доля жилой площади дома, принадлежащая i-му этажу, $i = 1, \ldots, 9$.

Расположим номера этажей в порядке увеличения их престижности с учетом цепочки (5). Получаем следующую цепочку

$$2 < 4 < 9 < 7 < 8 < 6 < 5 < 3 < 1. \tag{6}$$

С каждым этажом в данной возрастающей последовательности сопоставим его рыночный коэффициент $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4 \ldots$ $\lambda_9 = 1$ – см. (6). Эти коэффициенты удовлетворяют условию $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_9$.

Применим описанный принцип оптимальности, зафиксировав стоимость квадратного метра на первом этаже, предназначенном для офисов, в размере c_9 = 38 462 руб./кв. м. Тогда рыночный коэффициент равен $\lambda_9 = \eta$, т. е. в условии (2) $\eta = 2$. Все расчеты, опирающиеся на формулы в условии (3) представлены в табл. 1.

Непосредственная проверка показывает, что величина η удовлетворяет неравенству (4).

Данный алгоритм может быть использован при распределении стоимостей единицы недвижимости в новостройках. Она будет зависеть от расположения строящегося объекта относительно центра города и основных магистралей, от экологического состояния окружающей среды в данном районе и прочих факторов.

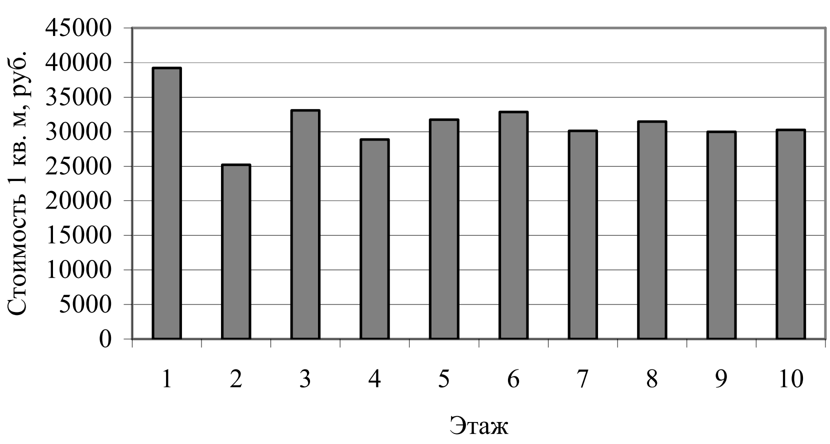

Рис. 1. Стоимость 1 кв. м жилья в Железнодорожном районе Красноярска

Применение принципа оптимальности
в случае неравномерного потребления ресурса

Найдем еще одно применение алгоритма, описанного выше, а именно для случая, когда нельзя измерить или зафиксировать потребление объема какого-либо ресурса отдельными представителями коллектива (например, при использовании лифта в подъездах жилых домов).

В настоящее время оплата за лифт зависит от размера жилой площади квартиры вне зависимости от этажа, на котором она находится. Это вызывает нарекания со стороны жильцов нижних этажей.

Рассмотрим задачу о распределении платы за использование лифта для жителей разных этажей на примере одного подъезда восьмиэтажного дома. В этом доме внизу лифт останавливается на площадке между первым и вторым этажом, а последняя остановка расположена на площадке между шестым и седьмым этажами. Исходя из этого объединим площади квартир на седьмом и восьмом этажах, рассматривая их как одну группу. Что касается первого этажа, то исключим его жильцов из числа оплачивающих пользование лифтом.

Общая площадь квартир в этом подъезде составляет 1393,8 кв. м (не включая 169,2 кв. м – площадь квартир на первом этаже), и сумма, которую должна получить ТСЖ за этот вид услуг составляет 4110,69 руб. в месяц.

Решим ее двумя способами: при помощи пропорции и используя алгоритм, приведенный в нашей статье.

1. Известно наименьшее число лестничных пролетов, которые необходимо пройти пешком, чтобы достичь каждого этажа, если не пользоваться лифтом (табл. 2). Максимальное число лестничных пролетов, на которое может подняться лифт в подъезде этого дома, – 10. Учитывая, что последняя остановка лифта находится между шестым и седьмым этажами, объединим площади квартир на 7 и 8 этажах, поскольку жители этих этажей в одинаковой мере пользуются лифтом. Составив пропорцию, рассчитаем, какую сумму следует внести жильцам в качестве платы за пользование лифтом.

Рассчитывая тарифы на использование лифта для жителей различных этажей по этому методу, мы получили линейное возрастание платы (по этажам).

Таблица 1

Распределение стоимости 1 кв. м между различными по престижности этажами

Этаж	Категория	S_i	s_i	λ_i	$c_i = \lambda_i \cdot c$
2	1	680,239	0,1107	0,8841	17 003
4	2	680,239	0,1107	0,9151	17 598
9	3	680,239	0,1107	0,9771	18 790
7	4	680,239	0,1107	1,0700	20 578
8	5	680,239	0,1107	1,1941	22 963
6	6	680,239	0,1107	1,3490	25 943
5	7	680,239	0,1107	1,5350	29 520
3	8	680,239	0,1107	1,7520	33 693
1	9	702,600	0,1143	2,0000	38 462

Таблица 2

Плата за пользование лифтом с 1 кв. м, рассчитанная методом пропорции

Этаж	Число лестничных пролетов (n)	Площадь, кв. м	Плата за метр с жильцов этажа, руб.	Плата с 1 кв. м, руб.
2	1	199,4	90,024	0,45
3	3	186,6	252,736	1,35
4	5	192,4	434,320	2,26
5	7	192,5	608,364	3,16
6	9	192,7	782,995	4,06
7, 8	10	430,2	1942,250	4,51

2. Теперь решим ту же задачу вторым способом. Применим описанный принцип оптимальности.

Минимум функционала

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2$$

при дополнительном условии

$$\lambda_1 / \lambda_N = \gamma ,$$

где $\gamma \in (0;\,1)$ – фиксированное число, найден в [4]. Были получены следующие результаты:

$$m = \frac{(1-\gamma)^2}{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \left(\gamma \sum\limits_{j=1}^{i} s_j + \sum\limits_{j=i+1}^{N} s_j \right)^2},$$

и минимум достигается в точке с координатами

$$\lambda_i = \frac{1}{1-\gamma} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j + \gamma \sum_{j=i}^{N-1} \alpha_j \right),\ \alpha_j = \frac{(1-\gamma) b_j}{\|b\|^2},\ b_j = \gamma \sum_{i=1}^{j} s_i + \sum_{i=j+1}^{N} s_i,\ \|b\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} b_j^2, \tag{7}$$

где $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., N-1$.

Рассчитаем плату за пользованием лифтом по формулам (7) исходя из такого же разбиения на группы (см. табл. 2). Как отмечено выше, до второго этажа необходимо пройти один лестничный пролет, а до седьмого 10 пролетов. Поэтому полагаем $\gamma = \lambda_2 / \lambda_7 = 0{,}1$. Сумма, которую должны получить с этого подъезда, остается прежней – 4110,69 руб. в месяц. Все результаты, найденные по формулам (7), представлены в табл. 3.

Таблица 3

Плата за пользование лифтом с 1 кв. м, рассчитанная по принципу оптимальности

Этаж	Категория	S_i	s_i	λ_i	$c_i = \lambda_i \cdot c$
2	1	199,4	0,1431	0,148	0,44
3	2	186,6	0,1339	0,520	1,53
4	3	192,4	0,1380	0,840	2,48
5	4	192,5	0,1381	1,107	3,27
6	5	192,7	0,1383	1,321	3,90
7, 8	6	430,2	0,3087	1,480	4,37

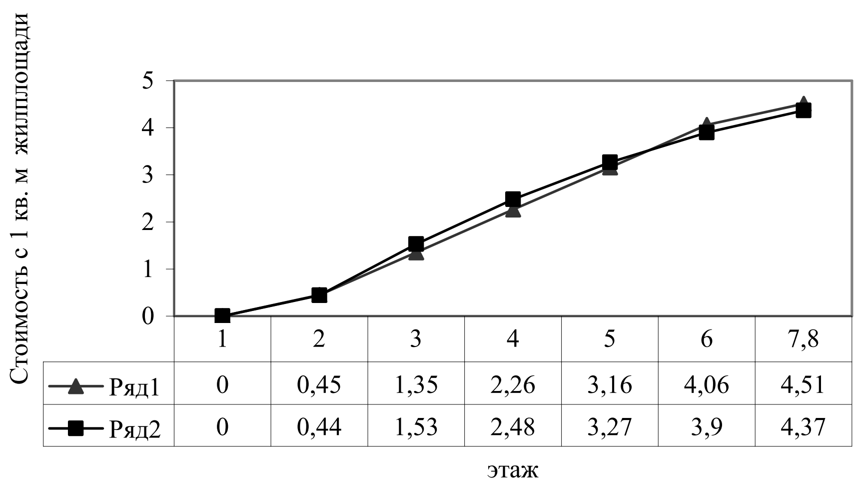

Рис. 2. Зависимость тарифа от номера этажа

Последние столбцы в табл. 2 и 3 отражают рост тарифа за использование лифта из расчета на единицу квадратного метра жилой площади.

В отличие от случая с пропорцией второй способ расчета имеет следующий экономический смысл: для каждого значения параметра α_j в (7) сумма квадратов разностей между стоимостями оплаты смежных групп этажей будет минимальна.

В результате сравнения (см. табл. 2, 3) получаем, что минимум функционала $\Phi(\lambda)$ при расчете вторым способом равен 0,384, а в случае расчета методом пропорции – 0,398. Построим графики тарифов на пользование лифтом с единицы квадратного метра жилой площади в зависимости от номера этажа (рис. 2).

В настоящее время достаточно часто в экономике при взаимодействии субъектов на рынке возникает проблема, связанная с так называемой «уравниловкой» (т. е. одинаковая плата с единицы измерения). Но в этом случае можно найти простой выход – решение экстремальных задач.

В данной работе мы попытались проиллюстрировать решение экстремальных задач на простых примерах.

Список литературы

1. *Маергойз Л. С., Валеев В. С.* Определение льготных коэффициентов в задачах коллективного инвестирования // Вестн. КрасГАСА. 2001. Вып. 4. С. 119–121.

2. *Маергойз Л. С., Бурыкина Н. В., Федотова И. М.* К проблеме выбора льготных коэффициентов в задачах коллективного инвестирования // Региональные проблемы Сибири и Дальнего Востока. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 79–83.

3. *Галькова Е. А.* Линейная задача коллективного инвестирования // IV Всесиб. конгр. женщин-математиков, 15–19 января 2006 г.: Материалы конф. Красноярск, 2006.

4. *Галькова Е. А., Маергойз Л. С.* Об одной линейной задаче коллективного инвестирования // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 3 (27). С. 26–30.

Материал поступил в редколлегию 16.11.2007

E. A. Gal'kova, L. S. Mayergojz, R. G. Khlebopros

Application of Principle of Optimality
in the Tasks of Joint Investment Management

This article deals with the algorithm of optimal distribution of property values belonging to different categories (flats are taken as an example) in order to get a desirable profit rate. For its implementation it is necessary to know classification of these categories (more prestigious, less prestigious). This algorithm is used both in case of irregular application of any resource (for example, electric power) by investors and in case when registration of consumption volume of this resource by some investors is unavailable (for example, application of lifts in doorways of houses).