УДК 330.115

В. И. Зоркальцев

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева РАН
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия
E-mail: zork@isem.sei.irk.r

ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СУБЪЕКТОВ *

Исследуется процедура перехода от моделей поведения отдельных покупателей и отдельных продавцов товаров к агрегированным моделям поведения групп покупателей. Формулируется требование согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности, состоящее в том, что сумма индивидуальных выборов должна дать коллективный выбор при коллективных доходах равных сумме индивидуальных доходов. Доказано, что логически непротиворечивое агрегирование возможно только в том случае, если поведение домашних хозяйств и фирм описывается примитивными зависимостями, неудовлетворительными по экономическим соображениям и только в том случае, когда выбор каждого субъекта одинаков при одинаковых ценах и располагаемых доходах.

Ключевые слова: агрегирование экономических субъектов, выбор покупателя, функция полезности, производственная функция, кривые Энгеля.

Введение

Из-за огромного количества действующих лиц в экономике, большого разнообразия видов благ, осуществляемых экономических операций необходимо агрегирование первичных данных в укрупненные показатели. Можно выделить три составляющие процесса агрегирования: 1) во времени, 2) экономических субъектов, 3) экономических показателей.

В данной статье рассмотрим одну из основных процедур агрегирования в экономике – формирование укрупненных экономических субъектов. Это включает агрегирование моделей поведения людей (домашних хозяйств) в модели поведения групп населения; моделей поведения предприятий (фирм) – в модели поведения совокупности предприятий (например, в рамках отрасли или региона).

При этом будем отдельно рассматривать две поведенческие характеристики указанных субъектов (домашних хозяйств, фирм) – их поведение в качестве покупателей и в качестве продавцов. При описании моделей поведения домашних хозяйств и фирм будем пользоваться единообразными обозначениями. Считаем, что продаваемые ими блага составляют вектор L из R_+^m, где m – количество продаваемых благ. Приобретаемые блага составляют вектор Q из R_+^n, где n – количество покупаемых благ. Будем обозначать R_+^n, R_{++}^n – множества n-мерных векторов с неотрицательными и положительными всеми компонентами.

Исходная модель экономического выбора представителей сектора «домашние хозяйства». В соответствии с распространенными в экономической науке воззрениями, поведение отдельных людей и их групп будем представлять в виде модели выбора набора приобретаемых благ конечного потребления Q и набора продаваемых первичных факторов производства L (труд, права собственности на природные ресурсы и капитал). Принято считать, что выбор Q и L основывается на субъективных предпочтениях, которые будем задавать с помощью функции полезности.

Пусть $\bar{U}$ – функция полезности от векторов Q и L, задающая предпочтения рассматриваемого субъекта. Обозначим $P \in R_{++}^n$, $S \in R_{++}^n$ векторы цен на блага конечного потребления и на первичные факторы производства. Считаем, что векторы цен заданы (сформированы

* Работа выполняется при финансовой поддержке РГНФ, грант № 09-0200278а.

на основе рыночных механизмов). Тогда выбор векторов L и Q представляется в виде решения задачи

$$\bar{U}(L,Q) \to \max\,,\ L \in R_+^m,\ Q \in R_+^n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} P_j Q_j \le \sum_{i=1}^{m} S_i L_i\,. \tag{1}$$

Здесь последнее условие является бюджетным ограничением: сумма расходуемых на приобретение благ денег не должна превышать сумму полученных доходов.

Исходная модель выбора фирмы. Пусть L – вектор производимой фирмой продукции, Q – вектор используемых ресурсов. При заданных ценах на продукцию S и на ресурсы P, согласно общепринятым в экономической теории представлениям, объемы выпуска продукции и приобретения ресурсов определяются максимизацией прибыли:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i L_i - \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j \to \max\,,\ (L,Q) \in \Omega\,, \tag{2}$$

где Ω – множество $R_+^m \times R_+^n$ допустимых по технологическим условиям сочетаний ресурсов и продукции.

Переход к моделям поведения покупателей и продавцов. Поскольку отдельные акты купли-продажи осуществляются в разные моменты времени при неоднозначно заданных условиях, то модели типа (1), (2) рассматриваются обычно в экономико-математической литературе как идеализированные конструкции, в том числе при описании теоретической модели общего экономического равновесия Вальраса (см., например, [1; 2]).

В экономическом анализе, излагаемом в учебниках по экономической теории (см., например, [3–5]), особое внимание уделяется описанию отдельных частных решений при варьировании условий. Модели (1), (2) можем использовать при описании двух классов частных решений: 1) рационального поведения домашних хозяйств и фирм при выборе объемов приобретаемых благ (модели поведения покупателей); 2) рационального поведения домашних хозяйств и фирм при выборе объемов продаваемых благ (модели поведения продавцов). В данной статье ограничимся исследованием проблемы агрегирования покупателей. Причем поведение покупателей, независимо от того, представляют ли они домашние хозяйства или фирмы, будем описывать однотипно, проводя необходимые различия в интерпретациях входных данных и результатов.

Представленные в статье результаты исследований проблем агрегирования являются развитием работ автора [6–9].

Модель поведения покупателя

Пусть $U(Q)$ – функция полезности от вектора приобретаемых благ $Q \in R_+^n$. Выбираемый набор благ можно представить в виде вектор-функции от вектора цен $P \in R_{++}^n$, объема располагаемых денежных средств $\upsilon \ge 0$ и функции полезности:

$$Q(P,\upsilon,U) = \arg\max\left\{U(Q)\colon Q \in R_+^n, \sum P_i Q_i \le \upsilon\right\}. \tag{3}$$

Применительно к модели домашнего хозяйства (1) можно сказать, что рассматриваемая здесь функция полезности U получена из исходной функции $\bar{U}$ при фиксированном векторе продаваемых ресурсов L. Из чего, полагая заданными цены на ресурсы, можно определить величину располагаемых средств

$$\upsilon = \sum S_i \cdot L_i.$$

Для модели фирмы (2) функцию $U(Q)$ можно интерпретировать как ожидаемый доход от набора ресурсов Q

$$U(Q) = \max\left\{\sum S_i L_i \colon (L,Q) \in \Omega\right\}$$

при заданном векторе цен $S \in R_{++}^n$. Чтобы эта функция была определена на всем множестве R_+^n, достаточно при задании области Ω допустить возможность недоиспользования ресурсов. Величину используемых на покупку ресурсов денежных средств υ можно рассматривать как варьируемый параметр.

Исходное множество функций полезности. Обозначим Ψ – множество функций от векторов R_+^n таких, что для любой функции $U \in \Psi$ вектор-функция $Q(P, \upsilon, U)$ однозначно определяется условием (3) при любых $P \in R_{++}^n$ и $\upsilon \geq 0$. Причем вектор-функция $Q(P, \upsilon, U)$ непрерывна по υ. Предположим также, что всегда выполняется условие Вальраса: при любых $\upsilon \geq 0$, $P \in R_{++}^n$

$$\sum_i P_i Q_i (P, \upsilon, U) = \upsilon. \tag{4}$$

Например, множеству Ψ принадлежат строго выпуклые на R_+^n возрастающие при увеличении любой компоненты вектора переменных функции.

О возможности применения ординалистского подхода. При описании выбора людей (домашних хозяйств) функция полезности U интерпретируется как измеритель субъективной полезности благ. Такой подход, введенный в экономическую теорию еще в 70-х гг. XIX в., принято называть кардиналистским (числовым). В настоящее время более правильным считается ординалистский подход к описанию выбора домашних хозяйств, согласно которому интерес представляют не численные значения функции полезности, а отношения предпочтения.

Есть резон в использовании ординалистского подхода и при описании модели выбора ресурсов фирмой. Приведенная выше интерпретация функции полезности для покупателя-предприятия очень упрощенно представляет поведение предприятия. Не только ожидаемые доходы, но и ряд других, в том числе плохо формализуемых понятий (минимизация рисков, социальный престиж, обеспечение устойчивости функционирования фирмы), могут определять предпочтения фирмы на рынках ресурсов.

При ординалистском подходе требуется для пар векторов наборов благ Q, $\tilde{Q}$ из R_+^n иметь отношение нестрогого предпочтения $\geq$, которое интерпретируется фразой «не хуже чем». Это отношение должно быть полным и транзитивным. Полнота означает, что для любых векторов Q, $\tilde{Q}$ из R_+^n должно выполняться хотя бы одно из соотношений:

$$Q \geq \tilde{Q} \text{ или } \tilde{Q} \geq Q.$$

В первом случае набор Q не хуже для покупателя, чем набор $\tilde{Q}$. Во втором случае набор $\tilde{Q}$ не хуже, чем набор Q. Не исключено выполнение обоих соотношений, что означает равноценность для данного потребителя наборов благ Q и $\tilde{Q}$.

Транзитивность означает, что из условий

$$Q \geq Q^1, \ Q^1 \geq Q^2$$

для трех наборов благ Q, Q^1, Q^2 следует соотношение $Q \geq Q^2$.

Бинарное отношение, обладающее указанными двумя свойствами, принято называть полным предпорядком. На основе этого отношения нестрогого предпочтения могут быть определены два других полезных для описания выбора отношения, обладающих свойством транзитивности, но уже не являющихся полными. Это отношение равноценности наборов благ: $Q \sim Q^1$, если $Q \geq Q^1$ и $Q^1 \geq Q$. А также отношение строгого предпочтения: $Q > Q^1$, если $Q \geq Q^1$ и наборы Q, Q^1 не являются равноценными.

При ординалистском подходе к описанию модели выбора покупателя считается заданным отношение нестрогого предпочтения на множестве наборов благ, которое являются полным предпорядком. Выбираемый покупателем набор благ должен находиться в таком же, как и в модели (3), множестве допустимых решений

$$X = \left\{ Q \in R_+^n : \sum_i P_i Q_i \leq \upsilon \right\}.$$

Для выбранного вектора $\bar{Q} \in X$ при любом другом векторе $Q \in X$ должно выполняться соотношение $\bar{Q} \geq Q$.

Ординалистский подход не нуждается во введении очень спорной функции, соизмеряющей полезность. Из функции полезности всегда можно получить отношение предпочтения, порождаемое этой функцией полезности. Действительно, считаем, что $Q \geq Q^1$,
если

$$U(Q) \geq U(Q^1).$$

Определяемое так отношение предпочтения из любой функции и векторов R_+^1 будет транзитивным и полным.

Излагаемые далее результаты можно было бы представить в терминах ординалистского подхода. Но этот подход менее удобен в техническом изложении и менее нагляден, чем аппарат функции полезности. Рассматриваемые ниже свойства функций полезности можно было преподнести как свойства отношений предпочтения. На самом деле, здесь будет использоваться еще более общий подход. Нас будет интересовать только свойства потенциально выбираемых наборов благ. Эти наборы благ назовем эффективными. При этом исключаются такие наборы благ, которые ни при каких ценах и располагаемых денежных средствах не будут выбраны. Для наглядности будем приводить аналоги рассматриваемых свойств выбираемых наборов благ применительно к функциям полезности.

Определение. Для каждой функции $U \in \Psi$ имеется множество *эффективных наборов благ*:

$$C(U) = \left\{ Q(P, \upsilon, U) : P \in R_{++}^n,\ \upsilon \geq 0 \right\}. \tag{5}$$

Это множество состоит из тех наборов, которые при каких-то условиях по располагаемым средствам υ и ценам *P* могут быть выбраны в качестве оптимальных. Множество *C*(*U*) можно интерпретировать как область «реального» выбора, поскольку только из этого множества выбираются оптимальные наборы благ.

Особые типы функций полезности. Далее определяются функции полезности из Ψ, характеризующиеся особыми свойствами. При этом сначала для наглядности будем приводить формулировки свойств функции полезности применительно к их значениям на всей области R_+^n. Затем будем приводить ослабленные аналоги этих свойств применительно только к значениям функций на областях их эффективных наборов. Эти два свойства будут совпадать на областях эффективных наборов, что позволяет их считать равносильными в содержательном плане.

Функции U, $\tilde{U}$ из Ψ *эквивалентные*, если они порождают одинаковые отношения предпочтения на R_+^n, т. е. если при любых Q, $\tilde{Q}$ из R_+^n неравенства

$$U(Q) \geq U(\tilde{Q}),\ \tilde{U}(Q) \geq \tilde{U}(\tilde{Q})$$

либо оба выполняются, либо оба не выполняются. Это равносильно существованию возрастающего преобразования *f*, такого, что при любом $Q \in R_+^n$

$$\tilde{U}(Q) = f(U(Q)). \tag{6}$$

Функции полезности U, $\tilde{U}$ из Ψ будем называть *квазиэквивалентными*, если при любых $P \in R_{++}^n$, $\upsilon \geq 0$

$$Q(P, \upsilon, U) = Q(P, \upsilon, \tilde{U}). \tag{7}$$

Несложно убедиться, что из эквивалентности следует квазиэквивалентность, а обратное неверно. Две функции из Ψ могут быть квазиэквивалентными, но не эквивалентными.

Можно доказать, что определение квазиэквивалентности (7) равносильно утверждению о том, что области эффективных наборов $C(U)$, $C(\tilde{U})$ совпадают и существует монотонно возрастающее преобразование f, для которого справедливо условие (6) на множестве *C*(*U*), т. е. не обязательно для всех $Q \in R_+^n$, а только для $Q \in C(U)$.

Функцию полезности $U \in \Psi$ назовем *однородной*, если она эквивалентна некоторой линейно однородной функции полезности $\tilde{U} \in \Psi$, т. е. такой, что для любых $Q \in R_+^n$, $\lambda > 0$,

$$\tilde{U}(\lambda Q) = \lambda \tilde{U}(Q). \tag{8}$$

Функцию полезности $U \in \Psi$ назовем *квазиоднородной*, если при любых $P \in R^n_{++}$, $\upsilon \geq 0$, $\lambda > 0$

$$Q(P, \lambda\upsilon, U) = \lambda Q(P, \upsilon, U). \tag{9}$$

Несложно убедиться, что из однородности следует квазиоднородность.

Заметим, что определение (9) равносильно выполнению двух свойств: 1) множество $C(U)$ является конусом, т. е. если $Q \in C(U)$, то $\lambda Q \in C(U)$ при любом $\lambda > 0$; 2) существует квазиэквивалентная U функция $\tilde{U} \in \Psi$, такая что при любом $Q \in C(U)$ и любом $\lambda > 0$ справедливо соотношение (8), т. е. функция $\tilde{U}$ является линейно однородной на множестве $C(\tilde{U})$, совпадающим с $C(U)$.

Проблема агрегирования покупателей

Требование согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности. Пусть U^i – функции полезности из Ψ с номерами $i = 0, 1, ..., k$ при некотором $k \geq 2$. Функции полезности с номерами $i = 1,...,k$ будем называть индивидуальными, с номером $i = 0$ – коллективной. Индивидуальные и коллективную функции полезности будем называть *согласованными*, если при любых $P \in R^n_{++}$, $\upsilon^i > 0$, $i = 1, ..., k$

$$Q(P, \sum_{i=1}^{k} \upsilon^i, U^0) = \sum_{i=1}^{k} Q(P, \upsilon^i, U^i). \tag{10}$$

Это требование постулирует, что сумма выбираемых каждым индивидуумом благ должна составить выбор данного коллектива, рассматриваемого как единое целое в виде такой же модели выбора потребителей. При этом считаем, что средства на приобретение благ для коллектива равны сумме средств, идущих на это входящих в этот коллектив индивидуумов. Для определения условий, при которых выполняется требование (10), докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Для набора непрерывных функций от вещественного аргумента f_i, $i = 0, ..., k$ при $k \geq 2$ для любых $x^i \geq 0$, $i = 1, ..., k$, выполняется тождество

$$f_0\left(\sum_{i=1}^{k} x^i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_i\left(x^i\right) \tag{11}$$

в том и только в том случае, если

$$f_0(0) = \sum_{i=1}^{k} f_i(0) \tag{12}$$

и при некотором λ для $x \geq 0$

$$f_i(x) - f_i(0) = \lambda x, \qquad i = 0, ..., k. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть функции f_i, $i = 0, 1, ..., k$, обладают свойствами (12), (13). Тогда при любых $x^i \geq 0$, $i = 1, ..., k$,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i\left(x^i\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(f_i\left(x^i\right) - f_i(0)\right) + \sum_{i=1}^{k} f_i(0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda x^i + f_0(0) = \lambda \sum_{i=1}^{k} x^i + f_0(0) = f_0\left(\sum_{i=1}^{k} x^i\right) - f_0(0) + f_0(0).$$

Итак, из (12), (13) следует (11).

Докажем обратное утверждение. Пусть справедливо равенство (11). Тогда, как частный случай, выполняется (12). Пусть

$$\phi_i(x) = f_i(x) - f_i(0), \quad i = 1, ..., k.$$

Из (11), (12) следует:

$$\phi_i(0) = 0, \quad i = 0, ..., k; \qquad \sum_{i=1}^{k} \phi_i\left(x^i\right) = \phi_0\left(\sum_{i=1}^{k} x^i\right) \tag{14}$$

при любых $x^i \geq 0$, $i = 1, \ ..., \ k$.

Из (14) при $x = x^i$, $x^j = 0$ для $j \neq i$ получаем, что все функции φ_i одинаковые: для любого $x \geq 0$

$$\phi_0(x) = \phi_i(x), \quad i = 1, \ ..., \ k. \tag{15}$$

Положив в (14) $x = x^1$, $y = x^1$, $x^i = 0$ для $i > 1$, получаем

$$\phi_0(x+y) = \phi_1(x) + \phi_2(y) = \phi_0(x) + \phi_0(y).$$

Пусть $y = nx$, где n – любое целое число. Тогда

$$\varphi_0(x+nx) = \varphi_0(x) + \varphi_0(nx).$$

При $n = 1$ имеем

$$\varphi_0(2x) = 2\varphi_0(x).$$

При $n = 2$ получаем

$$\varphi_0(3x) = 3\varphi_0(x).$$

По индукции получаем, что для любого $x \geq 0$ при любом целом неотрицательном α

$$\varphi_0(\alpha x) = \alpha\varphi_0(x). \tag{16}$$

Докажем выполнение равенства (16) при $\alpha = 1/r$, где r – неотрицательное целое. Действительно, из (16) для натурального α имеем

$$\varphi_0\left(\frac{1}{r}x\right) = \frac{r}{r}\varphi_0\left(\frac{1}{r}x\right) = \frac{1}{r}\varphi_0\left(\frac{r}{r}x\right) = \frac{1}{r}\varphi_0(x).$$

Следовательно, (16) справедливо для любого неотрицательного рационального α. Действительно, если

$$\alpha = \frac{n}{m},$$

где n, m – натуральные числа, то

$$\varphi_0(\alpha x) = \varphi_0(n(\frac{1}{m}x)) = n\varphi_0(\frac{1}{m}x) = \frac{n}{m}\varphi_0(x).$$

Из непрерывности f_0 следует непрерывность функции φ_0, что обобщает (16) на любое вещественное $\alpha \geq 0$. Положив $\lambda = \phi_0(1)$, из (16) имеем

$$\phi_0(x) = \lambda x.$$

Это вместе с (15) означает выполнение свойства (13). Лемма доказана.

Следствие из леммы. Для непрерывных функций f_i, $i = 0, \ldots, k$, таких, что $f_i(0) = 0$, тождество (11) выполняется в том и только в том случае, если при некотором вещественном λ при любом $x \geq 0$

$$f_i(x) = \lambda x, \qquad i = 0, \ ..., \ k. \tag{17}$$

Теорема 1. Требование согласованности (10) индивидуальных и коллективной функций полезности из множества Ψ выполняется в том и только том случае, если все индивидуальные и коллективная функции полезности квазиэквивалентные и квазиоднородные.

Доказательство. Объем приобретения i-м покупателем блага j при фиксированном векторе цен P представим в виде функции

$$f_i(\upsilon^i) = Q_j(P, \ \upsilon^i, \ U^i), \qquad i = 0, \ ..., \ k.$$

Поскольку $U^i \in \Psi$, то функция f_i непрерывна для всех $\upsilon^i \geq 0$. Из (3) следует, что $Q(P, \ 0, \ U^i) = 0$, и поэтому $f_i(0) = 0$. Требование согласованности (10) равносильно условию (11). Из следствия леммы получаем, что требование (10) выполняется в том и только в том случае, если при любом $\upsilon \geq 0$

$$Q_j(P, \upsilon, U^i) = \lambda_j(P)\upsilon, \ \ j = 1, \ldots, n,$$

где $\lambda_j(P)$ – некоторое вещественное число, зависящее от вектора цен *P*, номера блага *j* и не зависящее от номера субъекта *i*. Отсюда следует, что требование (10) выполняется в том и только в том случае, если при любых $P \in R^n_{++}$, $\upsilon \geq 0$

$$Q\left(P,\ \upsilon,\ U^0\right) = Q\left(P,\ \upsilon,\ U^i\right), \qquad i = 1,\ ...,\ k, \tag{18}$$

$$Q\left(P,\ \upsilon,\ U^0\right) = \upsilon Q^0\left(P,\ 1,\ U^0\right). \tag{19}$$

Согласно определению (7), соотношение (18) означает, что все функции полезности U^i, $i = 0,\ ...,\ k$, квазиэквивалентные. Согласно определению (9), соотношение (19) означает, что все эти функции квазиоднородные. Теорема доказана.

Обсуждение результатов

Можно выделить такие важные для экономической теории следствия из доказанной теоремы.

1. Корректное агрегирование возможно в том случае, если у всех подлежащих агрегированию покупателей одни и те же отношения предпочтения на области эффективных наборов товаров. Тогда они будут отношениями предпочтения для агрегированного покупателя.

Следует напомнить, что одним из основных мотивов введения функций полезности и их развития в отношении предпочтения было стремление отразить в экономической теории различия потребностей и вкусов разных людей и их групп.

2. Корректное агрегирование возможно только в случае, если изменение доходов ведет к изменениям в тех же масштабах приобретения всех благ. Кривые Энгеля, выражающие зависимость объемов потребления отдельных товаров от дохода, должны быть прямыми линиями, выходящими из начала координат. Это противоречит не только теоретическим воззрениям и статистическим исследованиям, но и элементарной житейской практике.

3. Корректное агрегирование поведений на рынках ресурсов предприятий возможно только в том случае, если все они в одинаковых ценовых ситуациях покупают ресурсы в одних и тех же пропорциях. Вряд ли найдется в мире даже два таких предприятия.

Вряд ли найдется даже одно предприятие, которое не изменяло бы соотношений объемов приобретаемых ресурсов при изменениях величины выделяемых на это средств. Правда, по сложившейся традиции, в экономических исследованиях широко используются идеализированные модели производства такого типа, у которых даже при изменениях структуры цен не меняются пропорции объемов вовлекаемых ресурсов. Это производственные функции Леонтьева, на которых базируются модели межотраслевого баланса. В этих моделях часто применяются процедуры агрегирования – объединение нескольких отраслей исходной модели в одну отрасль агрегированной модели. Согласно теореме 1, для совпадения результатов расчетов исходной и агрегированной модели необходимо, чтобы удельные расходы отдельного ресурса на единицу продукции у всех исходных отраслей совпадали, что, конечно, нереально.

4. Из квазиоднородности функции полезности U следует, что потребности в каждом из рассматриваемых благ ненасыщаемы. Это находится в явном противоречии с элементарными представлениями о человеческих потребностях.

5. Как отмечалось, квазиоднородность означает, что существует квазиэквивалентная функция $\tilde{U} \in \Psi$, которая на конусе эффективных наборов является линейно однородной. Для этой функции будет выполняться тождество

$$\tilde{U}\left(Q\left(P, \sum_{i=1}^{k} v^i, U^0\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{U}(Q(P, v^i, U^i))$$

при любых $P \in R^n_{++}$, $v^i \geq 0$. Приведенное тождество можно рассматривать как возможность суммирования полезностей (уровней «счастья» индивидуумов), что справедливо отвергается современной экономической наукой и не только ею.

Связь и различия с теоремой Эрроу

У теоремы 1 есть идейная связь с известной теоремой Эрроу [10] о противоречивости требований к отношениям индивидуальных и коллективных предпочтений. Важно выделить различия. В теореме Эрроу сопоставляются индивидуальные и коллективные предпочтения на одном и том же множестве вариантов. В теореме 1 у каждого покупателя свои наборы вариантов для выбора, зависящие от имеющихся средств. Причем выбираемый коллективно набор благ заведомо отличается от выбираемых каждым из покупателей наборов благ.

Теорема Эрроу, если ввести запрет на использование в качестве общественного выбора правила диктатора, интерпретируется как невозможность логически непротиворечивой системы общественного выбора, например, при голосовании за кандидатов в президенты. Теорему 1 можно интерпретировать как утверждение о невозможности корректного агрегирования, если постулировать условие неодинаковости выбора наборов благ при одних и тех же доходах хотя бы двумя покупателями в одной и той же ценовой ситуации.

Введем *условие существования различий в потребностях у покупателей* в самой слабой из возможных форм: хотя бы только для некоторых двух покупателей $i,\ r \in \{1,\ ...,\ k\}$ при некоторых ценах $P \in R^n_\oplus$ и одинаковых средствах $v > 0$ выбор должен быть неодинаков:

$$Q\left(P,\ v,\ U^i\right) \neq Q\left(P,\ v,\ U^j\right). \tag{20}$$

Из теоремы 1 следует **теорема 2**: условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности (10) противоречит условию существования различий в потребностях у покупателей (20) – в классе Ψ не существует функций $U^i,\ i = 0,\ ...,\ k,$ удовлетворяющих обоим этим условиям.

Теорему 1 можно представить как утверждение о невозможности корректного агрегирования покупателей и другим способом – исходя из *условия нелинейности кривых Энгеля*. Это условие для покупателя $i \in \{0,\ ...,\ k\}$ формулируется следующим образом: существуют $P \in R^n_\oplus$, $v > 0$, $\lambda > 0$, такие, что

$$Q\left(P,\ \lambda v,\ U^i\right) \neq \lambda Q\left(P,\ v,\ U^i\right). \tag{21}$$

Из теоремы 1 следует **теорема 3**: условие согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности (6) противоречит условию нелинейности кривых Энгеля (21) – в классе Ψ не существует функций $U^i,\ i = 0,\ ...,\ k,$ удовлетворяющих обоим этим условиям.

Теоремы 2 и 3 были анонсированы в [11].

Уместно отметить, что в книге [12] известный экономист-математик Р. Аллен, потративший значительные усилия в предшествующих работах на попытки построения согласованных индивидуальных и коллективных функций полезности в постановках, близких к рассматриваемой здесь, предложил следующее ее решение: «В существование коллективных предпочтений надо верить».

В условиях теоремы Эрроу рассматривается $k \geq 2$ индивидуумов, каждый из которых имеет полное и транзитивное отношение нестрогого предпочтения на одном и том же для всех из них сколь угодно широком множестве вариантов. Предполагается, что требованиям полноты и транзитивности (они определялись выше) на том же множестве вариантов должно удовлетворять искомое отношение нестрогого предпочтения для коллективного выбора.

Причем отношение коллективного выбора между конкретными вариантами A и B (т. е. реализация трех возможных случаев для отношения коллективного предпочтения: $A \geq B$ и $B \geq A$, только $A \geq B$, только $B \geq A$) есть однозначное отображение от значений всех k индивидуальных отношений предпочтения между этими двумя вариантами. Причем это отображение ни от чего больше не зависит. Такое условие называется *аксиомой независимости*.

Постулируется также *аксиома единогласия*, согласно которой, если для всех индивидуумов вариант A не хуже варианта B, то вариант A должен быть не хуже варианта B для отношения коллективного предпочтения.

По теореме Эрроу существует ровно k отображений, удовлетворяющих указанным выше требованиям, каждое из которых просто переносит индивидуальное отношение предпочтения одного из k индивидуумов в коллективное предпочтение.

Такой перенос можно назвать формированием коллективного предпочтения в виде *правила диктатора*. Если ввести еще одну аксиому, запрещающую использование «правила диктатора» в качестве коллективного выбора, то получим противоречивую систему требований.

Теорема Эрроу означает невозможность построения идеальной системы коллективного выбора. Этим объясняется существование разных механизмов голосования при выборе победителей спортивных состязаний, творческих (научных, музыкальных и т. д.) конкурсов, а также при выборах в органы власти. Уместно отметить, что как раз примеры Маркиза Кондорсе [13], свидетельствующие о невозможности корректного выбора порой даже из трех кандидатов, и послужили исходным импульсом в исследованиях Эрроу.

Обсуждение постулированных свойств функций полезности. Сформулированные выше результаты конечно зависят от того, насколько изначально введенные условия на рассматриваемые функции полезности являются бесспорными и существенными.

Условие (4) не существенное. Можем считать, что в набор выбираемых благ входит и накопление денежных средств на будущее, с учетом этого все располагаемые на данный момент средства будут всегда использованы.

Очевидно, такой же бесспорный характер носит предположение о существовании решения у задачи оптимизации, формирующей вектор-функцию (1). Дискуссионный характер имеют условия единственности и непрерывности решения. Отметим, что в приведенном выше доказательстве использовалась непрерывность вектор-функции (1) только от величины имеющихся средств v. Причем это применялось в лемме только для перехода в обосновании равенства (12) от рациональных чисел к иррациональным. Если считать, что доходы в определении вектор-функции (1) имеют только рациональные значения, то можно обойтись без условия непрерывности.

Можно также допустить неоднозначность вектор-функции (1) в некоторых ситуациях. Тогда требование (6), вероятно, должно формулироваться применительно ко всему диапазону значений вектор-функций. Из чего получим необходимость единственности значений. Во всяком случае, очевидно, что допущение неединственности оптимального выбора непринципиально с содержательной точки зрения и ведет лишь к усложнению анализа техническими деталями.

Возможны сомнения по поводу чрезмерной широты изначального представления области выбора. В частности, есть резон рассматривать выбор только на векторах $Q \ge Q^0$, где Q^0 – некоторый минимально допустимый набор благ (например, физиологический прожиточный минимум). Тогда вместо исходных вектора Q, функции полезности U и величины средств v следовало бы рассматривать дополнительные объемы благ $\tilde{Q} = Q - Q^0$, приростную функцию полезности $\tilde{U}\left(\tilde{Q}\right) = U(Q) - U\left(Q^0\right)$ и превышения средств сверх минимально необходимых $\tilde{v} = v - \sum P_j Q_j^0$.

Есть также смысл выбора только на ограниченном подмножестве векторов из R_+^n. Этого можно достичь за счет введения ограничений сверху на объемы располагаемых средств, т. е. рассматривать значения v, не превышающие некоторого уровня $\overline{v} > 0$. Можно было рассматривать вектор цен не на всем множестве R_{++}^n, а в рамках интервала $\overline{P} \ge P \ge \underline{P}$ при заданных $\overline{P}_j > \underline{P}_j > 0$. Тогда на средства $v \le \overline{v}$ можно приобрести отдельные блага в объемах, ограниченных сверху величинами $\overline{Q}_j = \overline{v} / \underline{P}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Эти и другие возможные ограничения нуждаются в специальных исследованиях

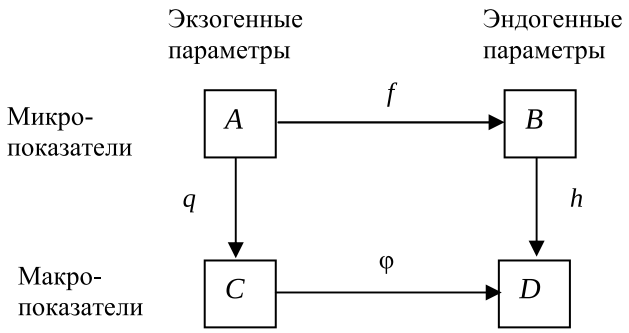
О методе исследования

Использованные здесь требования согласованности в поведении исходных и агрегированных объектов (10) можно рассматривать как реализации сформулированного в [13] принципа непротиворечивости процедур агрегирования при переходе от экзогенных микропоказателей к эндогенным макропоказателям в виде коммутативной диаграммы. Согласно этому принципу должны давать совпадающие результаты два возможных пути перехода: 1) формирование сначала эндогенных микропоказателей и затем их агрегирование в макропоказатели; 2) построение сначала экзогенных макропоказателей и затем построение на их основе эндогенных агрегированных показателей. Первый путь соответствует выражениям в правой части требования (6). Второй – выражению в левых частях этого требования.

Поясним это более подробнее. В условие (6) экзогенными (т. е. задаваемыми извне модели) микропоказателями являются величины имеющихся у исходных покупателей средств v^i, $i=1, ..., k$. Эндогенными (определяемыми в рассматриваемой модели) микропоказателями служат объемы выбираемых исходными покупателями товаров $Q_j\left(P, v^i, U^i\right)$, $j=1, ..., n$, $i=1, ..., k$. Суммы этих величин $\sum_{i=1}^{k} Q_j\left(P, v^i, U^i\right)$ при $j=1, ..., n$ составляют полученные в результате первого из указанных выше путей эндогенные макропоказатели.

Экзогенными макропоказателями здесь будут денежные средства «агрегированного» покупателя $v^0=\sum_{i=1}^{k} v^i$. Эндогенными макропоказателями при реализации второго из указанных путей будут выбираемые «агрегированным» покупателем товары $Q_j\left(P, v^0, U^0\right)$, $j=1, ..., n$.

На рисунке представлены указанные два пути перехода от исходных данных (экзогенных микропоказателей A) к укрупненным выводам (эндогенным макропоказателям D) для общего случая: q, h – процедуры агрегирования данных; f, φ – процедуры перехода от экзогенных к эндогенным параметрам (в рамках какой-то экономической модели или теории). Представлены также два типа промежуточных данных – эндогенные микропоказатели B и экзогенные макропоказатели C:



Показатели D можно рассматривать как результат применения экономической теории (модели) к агрегированным экзогенным показателям $D=\phi(C)$.

В свою очередь, показатели C можно считать результатом агрегирования первичных исходных данных $C=q(A)$.

Следовательно, $D=\phi(q(A))$.

Другой путь состоит в том, чтобы показатели D рассматривать в виде результата агрегирования эндогенных микропоказателей $D=h(B)$, где $B=f(A)$ – эндогенные показатели, рассчитываемые на основе микротеории из первичных данных. Следовательно,

$$D=h(f(A)).$$

Итак, получаем следующее условие:

$$\phi(q(A)) = f(h(A)), \tag{22}$$

которое является требованием для проверки корректности процедур агрегирования q и h, а также используемых моделей f и φ. Невыполнение данного тождества ведет к сомнениям в правильности любой из четырех процедур f, φ и q, h.

Согласно теореме 1, для проблемы агрегирования покупателей условие (22) выполняется только в том случае, если экономические модели поведения покупателей очень примитивны, явно неудовлетворительны по экономическим соображениям. Возникает вопрос: какие из четырех процедур φ, q, f, или h обуславливают этот негативный результат.

Корректность процедур агрегирования q и h не вызывает сомнений. Сумма имеющихся у данной группы покупателей средств есть сумма средств каждого из этих покупателей. В этом состоит процедура агрегирования q. Объем купленных данной группой покупателей благ есть сумма благ этого вида, купленных каждым из покупателей. В этом состоит процедура агрегирования h.

Следовательно, сомнения в корректности могут вызывать только модели f и φ. Поскольку модели поведения агрегированных субъектов являются простым переносом моделей поведения исходных субъектов, то возможно два случая: 1) либо следует признать некорректными обе модели поведения исходных и агрегированных субъектов, f и φ; 2) либо можно считать корректными модели поведения исходных покупателей и продавцов и некорректными используемые модели поведения агрегированных покупателей. В обоих случаях неверными являются модели поведения агрегированных покупателей. Однако именно они и необходимы для экономической теории и практики.

Заключение

Проблема агрегирования экономических субъектов часто проявляется в экономической теории и нередко без сколько-нибудь глубоких обсуждений. Уже во многих базовых учебниках по экономике (например, в [1–5]) широко используются рассуждения о совокупном выборе групп потребителей (вплоть до страны в целом) на основе единой для них функции полезности. Часто рассматривается поведение набора «однотипных» фирм, например, в рамках отрасли на основе некой общей для них производственной функции. При этом никак не обсуждается переход от индивидуальных функций полезности к коллективной функции полезности от производственной функций отдельных фирм к агрегированной производственной функции. Аналогичные проблемы возникают и на последующих этапах агрегирования в том числе на макроэкономическом уровне.

В научной литературе отдельные аспекты проблемы агрегирования экономических субъектов нередко затрагиваются и иногда они становятся центральным предметом обсуждения. В некоторых работах высказывается озабоченность в связи с нерешенностью проблемы агрегирования в экономике. В частности, эта четко высказанная озабоченность в книге Фельса и Тинтнера [14] привела к разработке ими представленной выше общей методики обоснования непротиворечивых процедур агрегирования.

В статье В. К. Горбунова [15] обсуждается методологическое значение корректного решения проблемы агрегирования субъектов в рамках рассматриваемой в данной статье постановки. Он обращает внимание на статью Гормана [16], где представлены результаты исследований близких к рассмотренной в данной статье проблеме. А именно Горман рассматривает проблему согласования индивидуальных и коллективной функций полезности через условия согласованности оптимальных уровней функций полезности. Можно отметить, что Горманом используются более сильные предположения о свойствах функции полезности, чем в представленном в данной статье исследовании. В итоге своего анализа он получает вывод близкий к полученному нами – индивидуальные и коллективная функции полезности будут согласованными, если кривые Энгеля для одного и того же товара будут параллельными прямыми у разных субъектов. В нашем исследовании получилось, что эти кривые должны быть одинаковыми прямыми у всех субъектов.

Автор выражает признательность В. К. Горбунову за проявленные интерес к представленным в данной статье исследованиям и плодотворные дискуссии.

Список литературы

1. *Ланкастер К.* Математическая экономика: Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1972. 464 с.
2. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория: Пер. с англ. М.: Прогресс, 1978. 606 с.
3. *Самуэльсон П.* Экономика: Пер с англ. М.: Алгон, 1992. Т. 1–2.
4. *Хайнман Д. Н.* Современная микроэкономика: анализ применения: Пер. с англ. М.: Статистика, 1992. Т. 1–2.
5. *Truett L. J., Truct D. B.* Economics. Toronto-Santa clara: Times Mirror. Mosley college Publishing, 1997. 860 p.
6. *Зоркальцев В. И.* Проблемы агрегирования в экономике: есть ли логическая совместимость микроэкономики и макроэкономики? Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 1997. 51 с.
7. *Зоркальцев В. И.* Агрегирование экономических субъектов. Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 2000. 24 с.
8. *Зоркальцев В. И.* Агрегирование покупателей // Равновесные модели экономики и энергетики: Тр. секции Математической экономики XIII Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 2005. С. 278–283.
9. *Зоркальцев В. И.* Невозможность корректного агрегирования покупателей и продавцов в рамках современной экономической теории // Инструменты анализа и управления переходными состояниями в экономике: Сб. статей / Российско-Американский институт экономики и бизнеса УрГУ. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. С. 57–69.
10. *Экланд И.* Элементы математической экономики: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 248 с.
11. *Зоркальцев В. И.* Корректное агрегирование покупателей в рамках современной экономической теории невозможно // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. № 8. С. 120–121.
12. *Аллен Р.* Экономические индексы: Пер. с англ. М.: Статистика, 1980.
13. *Бадентэр Э., Бадентер Р.* Кондорсе. Ученый и политик: Пер. с фр. М.: Ладомир, 2003. 308 с.
14. *Фельс Э., Тинтнер Т.* Методы экономических исследований: Пер. с англ. М.: Прогресс, 1971. 151 с.
15. *Горбунов В. К.* Особенности агрегирования потребительского спроса // Журнал экономической теории. 2009. № 1. С. 85–94.
16. *Gorman W. N.* Community Preference Fields // Econometrica. 1953. Vol. 5, № 1. P. 63–80.

Материал поступил в редколлегию 27.11.2009

V. I. Zorkal'tsev

THE PROBLEM OF ECONOMICAL AGENTS' AGGREGATION

The procedure of transition from the separate customers and producers behavior models to the aggregative model for their groups is investigated. The requirement of individual and collective utility functions coordination is formulated. It is required that the sum of individual choices should give the collective choice when the collective income is equal to the sum of individual incomes. It is proved that logically consistent aggregation is possible only when the behavior of households and firms is described by very simple formulas (not satisfied the economical reality) and the choice of each agent is identical at the identical prices and incomes.

Keywords: economical agents' aggregation, customers' choice, utility function, production function, Engel curves.