УДК 336.763+330.42+330.43

К. В. Корнев

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: k_kornev@gorodok.net

ОЦЕНКА КРИВЫХ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК РОССИЙСКОГО РЫНКА ОБЛИГАЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП КРЕДИТНОГО РИСКА

В статье представлен обзор моделей временной структуры процентных ставок и их сравнение. Производится анализ применимости данных подходов как для безрисковых ценных бумаг, так и для бумаг эмитентов других групп риска в условиях российского финансового рынка. Описываются ограничения использования моделей, возникающие при оценке временной структуры по бумагам отличным от безрисковых. Приводится подход, позволяющий ослабить влияние ограничений и получать более устойчивые решения. Приведенный подход может быть использован участниками финансовых рынков для анализа уровня рисков, оценки ожиданий и выбора стратегий поведения.

Ключевые слова: кривая бескупонной доходности, ценные бумаги, облигации, кредитный риск, кредитный рейтинг, доходность, модель Нельсона – Сигеля, модель Свенсона, сплайны, метод максимального правдоподобия.

Введение

Временная структура процентных ставок представляет собой соотношение между процентными ставками финансовых инструментов в зависимости от их срочности. Для облигаций данный термин конкретизируется как взаимосвязь между процентными ставками (доходностью) в зависимости от срока до погашения облигации (т. е. ее срочности). Знание временной структуры процентных ставок необходимо для оценки динамики рынка, прогнозирования уровня процентных ставок, инфляции, а также для оценки стоимости вновь выпускаемых облигаций (и прочих долговых инструментов) при принятии инвестиционных решений и оперативного выявления проблем эмитента в сравнении его доходности с рыночной.

Аппроксимация временной структуры процентных ставок по облигациям базируется на моделях бескупонной доходности (что связанно с наличием у облигаций купонного эффекта [1]). Однако признанные модели кривой бескупонной доходности и методология их оценки разрабатывались и исследовались для рынка государственных заимствований [2–6]. Поэтому их использование для облигаций корпоративного сектора, которым присущ определенный уровень риска, сопряжено с рядом проблем (и требует некоторой модификации):

- неоднородностью эмитентов по уровню риска и его оценки со стороны отдельных инвесторов;
- малым числом сделок, порождающим проблему недостаточности данных в течение определенного периода и проблему возникновения существенных отклонений котировок в зависимости от параметров конкретных сделок.

Основной целью данной работы является анализ применимости моделей кривых бескупонной доходности для оценки облигаций различных групп риска на российском рынке и модификация подхода оценки для получения устойчивых решений.

Производится обзор существующих моделей оценки временной структуры процентных ставок с последующим анализом возможности их применения для корпоративных облигаций и рассматриваются проблемы и ограничения, возникающие при моделировании временной структуры процентных ставок по корпоративным облигациям отличным от безрисковых, которые обращаются на российском рынке. Осуществляется модификация подхода, позволяющая преодолеть выявленные ограничения. С учетом предлагаемой модификации приводится сравнение моделей с использованием эконометрического моделирования. Кроме того, анали-

ISSN 1818-7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2010. Том 10, выпуск 1

зируется изменения структуры процентных ставок для различных групп риска в один из периодов кризиса на финансовых рынках (декабрь 2008 г.) на основе наиболее подходящей модели.

Методы построения кривых временной структуры процентных ставок

Основные понятия, используемые при определении временной структуры процентных ставок облигаций. Рассмотрим методологические основы построения кривых временной структуры процентных ставок и основные понятия.

Временная структура процентных ставок по облигациям представляет собой взаимосвязь между доходностью и сроком до погашения бумаг. Большинство обращающихся на рынке облигаций являются купонными. Наличие купонного эффекта не позволяет прослеживать эталонную срочную структуру процентных ставок [1]. Именно поэтому применение общеизвестной методологии – доходности к погашению для оценки временной структуры процентных ставок, будет сопровождаться искажениями в получаемых результатах. Существенным шагом в развитии методологии явились предложенные в конце XIX в. рядом зарубежных исследователей модели кривой бескупонной доходности.

Бескупонная доходность – доходность к погашению дисконтной облигации.

Кривая бескупонной доходности – совокупность бескупонных доходностей для различных сроков до погашения облигаций.

Расчетная цена – цена облигации, рассчитанная с использованием кривой бескупонной доходности как сумма дисконтированных выплат по данной облигации:

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+Y(m_i))^{m_i}},$$

где n – количество предстоящих выплат; m_i – сроки до выплат; C_i – размеры платежей; $Y(m_i)$ – бескупонная доходность. Как видно, фактором, оказывающим влияние на бескупонную доходность, является время до погашения.

При этом бескупонная доходность связана с непрерывно начисляемой ставкой процента следующим образом:

$$Y(m)=e^{r(m)}-1.$$

Соответствующий дисконтный множитель представляется выражением:

$$D(m)=e^{-r(m)m}=\frac{1}{(1+Y(m))^m},$$

т. е. расчетная цена любой купонной облигации представляется в виде

$$P=\sum_{i=1}^{n}C_i\cdot D(m_i).$$

Имея множество цен различных облигаций в определенный момент времени, кажущийся наиболее простым метод оценки бескупонных процентных ставок состоит в их непосредственном вычислении из уравнения цен:

$$P_J=C_{JT}\cdot D_T,$$

где P_J – вектор цен облигаций; C_{JT} – матрица денежных потоков; D_T – вектор дисконтирующих функций. Тогда можно выразить дисконт (а следовательно, и спот-ставки) через цены бумаг:

$$D_T=C_{JT}^{-1}\cdot P_J.$$

Однако для обратимости матрицы C_{JT} необходимо наличие полного рынка ($J = T$), что на практике не выполняется, а следовательно, делает невозможным прямое использование данного выражения.

Форвардные и спот-ставки. Для дальнейшего анализа опишем взаимосвязь между форвардными и спот-ставками. Пусть r_1^s – спот-ставка по дисконтной облигации номиналом 1 ден. ед., погашаемой через один год; r_m^s – годовая спот-ставка по облигации, погашаемой через m периодов; r_i^f – годовая форвардная ставка в период i по одногодичным облигациям.

У инвестора есть стратегии: вложиться в m-периодную облигацию либо постоянно реинвестировать в одногодичные облигации. В условиях отсутствия арбитража имеем равенство:

$$e^{-mr_m^s} = e^{-r_1^s} e^{-r_2^f} e^{-r_3^f} \ldots e^{-r_m^f} .$$

Таким образом, данное уравнение позволяет сделать основной вывод, необходимый для дальнейшего анализа: годовая спот-ставка для облигации, погашаемой через m периодов, есть средняя форвардных ставок за периоды [0; m] по одногодичным облигациям. Или в непрерывном виде:

$$r^s(m) = \frac{1}{m}\int_0^m r^f(x)dx, \tag{1}$$

где $r(m)$ – годовая ставка в зависимости от срока погашения m.

Методы построения кривых бескупонной доходности. Как было сказано, произвести непосредственное определение бескупонных процентных ставок из цен облигаций не позволяет условие наличия полного рынка, не выполняющееся на практике. В связи с чем в экономической теории разработан ряд методов, позволяющих отойти от данного ограничения и производить оценку кривой по имеющимся ограниченным данным.

«Теоретически, при наличии большого числа активно торгуемых купонных облигаций, регулярно погашаемых на каждом интервале сроков, КБД возможно определить итерационным образом, принимая доходности более коротких инструментов в качестве параметра ценообразования краткосрочной составляющей долгосрочных ценных бумаг (так называемый *bootstrapping*). Однако на практике такая ситуация встречается крайне редко, что приводит к появлению “пустот” в области значений КБД и требует наложения ряда ограничений на допустимые значения процентных ставок. В финансовой теории подобная инструментная специфика рынка ценных бумаг с фиксированным доходом именуется неполнотой, при которой, вообще говоря, происходит нарушение одного из основополагающих принципов теории ценообразования активов – единственности оценочных операторов» [5].

Параметрические методы. Параметрические методы, позволяющие определять временную структуру процентных ставок, предлагают решение с использованием априори наложенных ограничений на дисконтирующие функции, которые снижают тем самым размерность вектора D_T до нескольких параметров. Параметрические методы используют одну функцию для описания всего множества спот-ставок на различных сроках до погашения.

Кривые, использующиеся в параметрических методах, можно разделить на 2 лагеря, по способу получения их форм:

- кривые, базирующиеся на стохастических моделях процентных ставок (Мертон, Васичек, Кокс – Ингерсолл – Росс и др.);
- кривые, базирующиеся на предположениях о форме кривых форвардных ставок (Нельсон – Сигель, Свенсон).

Кривые, базирующиеся на стохастических моделях процентных ставок. В основе данных моделей лежат определенные предположения о стохастическом процессе изменения спот-ставок. Задается один или несколько случайных факторов, объясняющих их поведение [7].

Общая модель стохастического процесса спот-ставки во всех моделях представляется в виде

$$dr = \mu_t dt + \sigma_t dz .$$

Одной из первых и базовых моделей в данном классе является модель Васичека (Vasicek model). В этой модели изменение краткосрочных процентных ставок r_t во времени задается непрерывном процессом Орнстейна – Уленбека [8]:

$$dr = \frac{1}{\tau}(\gamma - r)dt + \sigma dz, \tag{2}$$

где z – стандартный Винеровский процесс.

Величина γ показывает долгосрочный равновесный уровень процентных ставок, а величина τ характеризует скорость возвращения процесса к долгосрочному среднему значению. Величина σ соответствует амплитуде (стандартному отклонению) колебаний краткосрочных ставок.

Цена дисконтной облигации со сроком до погашения m определяется как

$$P = \exp(-R(m) \cdot m),$$

откуда процентная ставка, как функция от срока до погашения, представляется в виде

$$R(m) = -\frac{\ln(P)}{m}.$$

Поскольку цена облигации является функцией от спот-ставки, описываемой процессом (2), для ее нахождения необходимо произвести решение уравнения ее прироста, с использованием правила дифференцирования согласно лемме Ито. Найдя решение уравнения для цены облигации, можно получить уравнение кривой временной структуры процентных ставок:

$$r(m) = r_\infty + (r_0 - r_\infty) \cdot \frac{1-\exp(-m/\tau)}{m/\tau} + \frac{\sigma^2 \cdot m \cdot \tau^3}{4}\left(\frac{1-\exp(-m/\tau)}{m/\tau}\right)^2,$$

где $r_\infty = \gamma + \sigma\lambda\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2$, а λ характеризует премию за риск, которая определяется из условия отсутствия арбитража при использовании инструментов с разными сроками до погашения.

Данная кривая в точке $m = 0$ будет иметь значение r_0. Долгосрочный равновесный уровень будет составлять r_∞ (при $m \to \infty$).

Кроме модели Васичека, относительную популярность также получила модель Кокса – Ингерсолла – Росса, в основе которой лежит следующий стохастический процесс:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}\,dz(t).$$

Уравнение такого вида (в отличие от процесса Орнстейна – Уленбека) не позволяет спот-ставке принимать отрицательные значения.

Оценка параметров данных моделей (а также аналогичных моделей, базирующихся на стохастических уравнениях) производится с использованием динамики спот-ставок, с помощью которых определяются параметры стохастических уравнений, подобных (2). Кроме того, для определения рисковой надбавки необходима информация о динамике бессрочной ставки.

Поскольку мгновенные ставки в реальности не существуют, на практике для оценки кривой, например по государственным облигациям, за спот-ставки принимаются процентные ставки по бескупонным облигациям со сроком погашения до трех месяцев. В частности, наиболее простым вариантом является определение ставок по ГКО, которые непосредственно являются бескупонными. Однако для целей нашего анализа необходимо произвести оценку нескольких кривых бескупонных доходностей по облигациям заемщиков различных групп риска, что сразу создает ряд проблем: обычно корпоративные эмитенты выпускают купонные облигации со сроком погашения / оферты более 2-х лет, и в каждый момент на рынке может не быть большого количества облигаций с оставшимся сроком до погашения менее 3-х месяцев, при этом в каждый момент остается большое число эмитентов в каждой группе риска, не охваченных анализом. Это обстоятельство сильно снижает качество оценки и даже является недопустимым, поскольку выборка эмитентов каждой группы представляется хотя и достаточно близкой, но все-таки неоднородной по уровню риска. Кроме того, у одного эмитента (особенно относящегося к группе рискованных), как правило, в обращении имеется малое число выпусков (1–2), следовательно, в различные моменты наблюдения за краткосрочной ставкой, будет меняться структура эмитентов. В результате (опять с учетом неполной однородности выборки по риску) будут различные, не предусматриваемые моделью скачки спот-ставки, объясняемые наличием определенного спрэда между бумагами разных заемщиков.

Вторым недостатком является необходимость наличия динамики бессрочных ставок, или на практике ставок по группе наиболее длинных облигаций в выборке. Опять же, поскольку длинные облигации (как корпоративные, так и долгие государственные) являются купонными, необходимо сначала аппроксимировать бескупонные длинные ставки, например, с использованием вышеупомянутой процедуры *bootstrapping*, но опять-таки, с учетом того, что у каждого эмитента есть малое число облигаций, определение долгосрочных бескупонных ставок одного эмитента с большой долей вероятности придется производить через известные более короткие ставки других участников рынка, что из-за наличия спрэда обязательно будет вносить определенную ошибку в расчет.

Учитывая данные обстоятельства, приходится отказаться от данных моделей в пользу более подходящих и охватывающих при оценивании большее число бумаг.

Кривые, базирующиеся на предположениях о структуре форвардных ставок. В отличие от предыдущей группы, данные методы основываются на формах кривых, возникающих при эмпирическом анализе форвардных ставок. Существенным недостатком данной группы методов является тот факт, что предположение о форме кривой является произвольным и экономически не обоснованным. Кроме того, данные модели не являются безарбитражными [9].

Модель Нельсона – Сигеля. Нельсон и Сигель (Nelson, Siegel), чья работа [2] является базовой в данной группе методов, предложили параметрический подход к оценке кривой бескупонной доходности, в основе которого лежит предлагаемая авторами теоретическая форма кривой. Эта форма основывается на результатах эмпирического анализа временной структуры процентных ставок, проводимых различными исследователями. Было установлено, что теоретическая кривая форвардных ставок должна обладать свойствами монотонности, а также быть выпуклой или S-образной (в зависимости от рыночной ситуации). Функции, обладающие данными свойствами, возможно получить в результате решения дифференциальных уравнений (т. е. априори задать существование производных необходимых порядков). Данное уравнение строится для форвардных ставок и ищется его решение – это форвардные (одногодичные) ставки ($r^f(m)$, где m – срок до погашения).

Поскольку оригинальная статья авторов не раскрывает математического получения уравнения кривой, которое в дальнейшем используется в нашем анализе как основное, остановимся на его выводе немного более подробно. В качестве базового авторами было взято неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$ar'' + br' + cr = d\,.$$

Для целей анализа, при логичных предположениях, в качестве решения используются только действительные корни данного уравнения.

Решение этого уравнения (с заменой параметров) в действительных корнях представляется в виде

$$r^f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau_1}) + \beta_2 \exp(-\frac{m}{\tau_2})\,.$$

Однако в ходе анализа авторами было установлено, что данное решение сверхпараметризовано. Одинаковые решения получались различной комбинацией параметров. В частности, если использовать одинаковые корни уравнения ($\tau_1 = \tau_2$), то подбором β можно получать произвольные решения. Следовательно, было предложено брать решение данного уравнения с одинаковыми корнями.

Вывод конечного решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с одинаковыми действительными корнями можно представить таким образом:

$$r^f(m) = \frac{d}{c} + (e - \frac{d}{c})\exp(-m\frac{b}{2a}) + (\frac{2af}{b} + e - \frac{d}{c})\frac{bm}{2a}\exp(-m\frac{b}{2a})\,,$$

где $r(0) = e$, $r'(0) = f$.

Производя замену (переобозначение) переменных, получаем уравнение [2]:

$$r^f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\frac{m}{\tau}) + \beta_2 \frac{m}{\tau}\exp(-\frac{m}{\tau})\,.$$

Учитывая соотношение (1) кривая бескупонной доходности ($R(m) \equiv r^s(m)$) представляется в виде

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)[1 - \exp(-\frac{m}{\tau})]\,/\,(\frac{m}{\tau}) - \beta_2 \exp(-\frac{m}{\tau})\ ,$$

где β_0, β_1, β_2, τ – параметры, подлежащие определению.

Данная теоретическая кривая удовлетворяет требованиям монотонности, выпуклости (или S-образности).

Предельное значение $R(m)$, когда m стремится к бесконечности, – это β_0, когда m стремится к нулю, – это ($\beta_0 + \beta_1$). Интерпретировать коэффициенты модели можно как измерение устойчивости кратко-, средне- и долгосрочных компонент кривой форвардных ставок (и, следовательно, кривой доходности). Вклад долгосрочной компоненты – β_0, краткосрочной компоненты – β_1, и, наконец, β_2 показывает вклад среднесрочной компоненты. Долгосрочная компонента – константа, которая не убывает к нулю в пределе. Среднесрочная кривая – единственная функция в пределах этой модели, которая начинается в нуле (и поэтому не краткосрочная) и убывает к нулю (и поэтому не долгосрочная). Краткосрочная кривая имеет самое быстрое убывание из всех функций в пределах модели, которые монотонно убывают к нулю.

Процедуру оценивания можно производить с использованием метода наименьших квадратов. Входящими данными для оценивания являются наблюдаемые цены (P), купоны (C_i), сроки до погашения по купонам (m_i). Необходимо оценить параметры β_0, β_1, β_2, τ.

Имеем:

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+Y(m_i))^{m_i}}=\sum_{i=1}^{n}C_iD(m_i)=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{-R(m_i)m_i}\ .$$

Если производить оценку по бескупонным облигациям, то уравнение быстро упрощается и, если внешне доопределить τ, что обычно производят при практической оценке по бескупонным облигациям, даже линеаризуется (по параметрам), что позволяет провести оценку обычными методами регрессионного анализа.

Наличие купонов, а скорее отсутствие большого числа бескупонных облигаций на рынке, не позволяет проводить оценивание только по ним, а, следовательно, вносит определенные трудности в оценивание. Однако фактически в данном случае мы имеем дело с нелинейной регрессией, где P – зависимая переменная $C_ie^{-R(m_i)m_i}$ – факторы, число которых равно максимальному числу купонов по бумаге из выборки. Для бумаг с меньшим числом купонов соответствующие факторы-члены обнуляются (с помощью зануления C_j и m_j, где $j > n$).

Модель Свенсона. Развитием подхода Нельсона – Сигеля является модель Свенсона (Svenson), в которой происходит увеличение степеней свободы кривой путем добавления дополнительной экспоненты. Данный член был введен с целью лучшего описания начального участка кривой. Таким образом, семейство кривых Свенсона является обобщением класса Нельсона – Сигеля.

Форвардная кривая задается следующим уравнением:

$$r^f(m)=\beta_0+\beta_1\exp(-\frac{m}{\tau_1})+\beta_2\frac{m}{\tau_1}\exp(-\frac{m}{\tau_1})+\beta_3\frac{m}{\tau_2}\exp(-\frac{m}{\tau_2})\,.$$

Учитывая уравнение (1), кривая бескупонной доходности представляется в виде

$$R(m)=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)[1-\exp(-\frac{m}{\tau_1})]/(\frac{m}{\tau_1})-\beta_2\exp(-\frac{m}{\tau_1})+$$

$$+\beta_3[1-\exp(-\frac{m}{\tau_2})]/(\frac{m}{\tau_2})-\beta_3\exp(-\frac{m}{\tau_2}).$$

Кривые Свенсона могут иметь 2 экстремума. На практике эти кривые используются, когда семейство Нельсона – Сигеля не дает достаточно точного приближения к рыночным данным либо плохо аппроксимирует начальные участки.

Процедура оценивания полностью идентична описанной выше для оценки семейства Нельсона – Сигеля.

Полиномы. Упрощенной версией первых из двух перечисленных моделей в данном классе являются полиномы, характеризующиеся большей простотой в оценивании. Обычно используются квадратичные и кубические полиномы.

Кривая бескупонных ставок, порождаемая квадратичным полиномом представляется в виде

$$R(m)=a_0+a_1m+a_2m^2\ ,$$

а соответствующая ей кривая форвардных ставок:

$$r^f(m)=a_0+2a_1m+3a_2m^2\ .$$

Данный вид кривой является альтернативой семейству Нельсона – Сигеля.

Кривая бескупонных ставок, порождаемая кубическим полиномом, представляется в виде

$$R(m)=a_0+a_1m+a_2m^2+a_3m^3\ ,$$

а соответствующая ей кривая форвардных ставок:

$$r^f(m) = a_0 + 2a_1 m + 3a_2 m^2 + 4a_3 m^3 .$$

Данный вид кривой является альтернативой семейству Свенсона.

Сплайновые методы. Сплайновые методы можно считать обобщением параметрических методов. Основная идея данных методов заключается в разбиении кривой на несколько отрезков, в пределах которых используются свои аппроксимирующие функции (обычно полиномы одной степени). При этом значения смежных функций в узловых точках должны совпадать, вплоть до второй производной, т. е. если имеется $n + 1$ узел (крайние узлы совпадают с концами отрезка всей кривой), то будет n функций, при этом каждый из $n - 1$ промежуточных узлов будет накладывать 3 условия «склейки», уменьшающие число свободных параметров.

Например, в случае использования кубического полинома исходно будет $4n$ параметров, которое с учетом ограничений в узловых точках сокращается до $4n - 3(n - 1) = n + 3$. Общая формула кубического сплайна будет иметь следующий вид [10]:

$$r(m) = \sum_{i=0}^{3} a_i m^i + \frac{1}{3!}\sum_{p=1}^{n-1} b_p (m - \tau_p)_+^3 ,$$

где τ_p – узел p, $(m - \tau_p) = \max(m - \tau_p, 0)$.

Фактически в каждом узле меняется коэффициент при третьей степени.

Поскольку спот-ставка задается кубическим сплайном, то и форвардные ставки также задаются кубическим сплайном [10]:

$$r^f(m) = \sum_{i=0}^{3} (i+1)\cdot a_i \cdot m^i + \frac{1}{3!}\sum_{p=1}^{n-1} b_p (4m - \tau_p)\cdot(m - \tau_p)_+^2) .$$

Непараметрические методы. Ключевое отличие данной группы методов заключается в отказе от предположения, что структура и поведение процентных ставок может быть описана какой-либо определенной функцией с конкретным числом параметров. В основе оценки данных моделей лежит непараметрическая регрессия [11; 12]. Искомая функция зависимости процентной ставки от параметров заранее не известна. Для ее поиска в определенной точке используется процедура локального усреднения, представляющая собой сглаживание. Последовательность весов определяется с помощью функции плотности со скалярным параметром – ядра.

Несмотря на то, что данная группа методов является основной альтернативой параметрическому оцениванию и в общем случае расширяет возможности исследователя, их применение для анализа облигаций невозможно из-за отсутствия наблюдений за динамикой ставок в чистом (бескупонном) виде. В связи с этим более подробное их описание не производится.

Итак, здесь мы описали существующие подходы. Далее предлагаем свою модификацию, адаптированную к реалиям.

Проблемы оценки облигаций различных групп риска и эмпирическое оценивание

Для исследования временной структуры процентных ставок использовались 5 различных выборок облигаций. Критерием включения выпуска в ту или иную группу являлся уровень риска, который определялся на основе оценок международных рейтинговых агентств (*Moody's*, *Standard & Poor's*, *Fitch* [1]), кроме того, выборка дополнялась бумагами эмитентов, не имеющих кредитного рейтинга. В этом случае оценка производилась с использованием методики оценки корпоративных эмитентов, применяемой в ОАО «УРСА Банк», с использованием внутренней рейтинговой шкалы, откалиброванной в соответствии со шкалой агентства *Standard & Poor's*. Для анализа использовались рыночные котировки облигаций российских эмитентов по данным ММВБ [2] за 2 периода: февраль 2008 г. (как пример спокойного периода на финансовых рынках в 2008 г.) и декабрь 2008 г. (как период значительной неста-

---

[1] www.moodys.com; www.standardandpoors.ru; www.fitchratings.ru.

[2] www.micex.ru

бильности). Параметры облигационных займов (номинал, ставка купона, периодичность выплат, субординированность займа) брались по данным вэб-ресурсов [3].

Эмитенты, в соответствии с присвоенным рейтингом, были разбиты на следующие группы:

- ГКО/ОФЗ (выделены в отдельную группу, как бумаги особого эмитента и базовый индикатор рынка);
- BBB;
- BB;
- B;
- CCC.

В выборки не включались бумаги, имеющие амортизируемый долг, поскольку котировки данных бумаг подвержены сильным изменениям в периоды, близкие к выплатам части основного долга.

Проблемы применения моделей для оценки временной структуры процентных ставок корпоративных облигаций. Существующие модели временной структуры процентных ставок изначально были разработаны для применения к оценке ставок на основе казначейских облигаций США, которые считаются безрисковыми. Попытка их применения в классическом виде для рынка корпоративных облигаций вызвала ряд проблем.

1. Корпоративные облигации являются менее ликвидными в плане частоты торгов. В определенные дни с выпусками некоторых эмитентов может совсем не быть сделок, т. е. выборка, как бумаг, так и самих эмитентов, может меняться ежедневно. Кроме того, если внутри дня происходят торги, это могут быть одна или две сделки (т. е. очень малое число). Таким образом, хотя в данном дне и имеются цены, они выражают поведение и оценки малого числа участников (в крайнем случае, только одной пары продавец-покупатель), а следовательно, могут существенно отличаться от мнения остальных агентов. Такие цены фактически являются рыночными только по одному признаку: сделка произошла через биржу (являющуюся рынком), т. е. не являются эффективными (с точки зрения гипотезы эффективности рынка). Данные проблемы не позволяют ежедневно оценивать временную структуру процентных ставок только с использованием котировок конкретного торгового дня.

2. Однородность эмитентов по риску даже в рамках одной рейтинговой категории может существенно отличаться. Основная проблема заключается в том, что малое число российских эмитентов имеют кредитные рейтинги со стороны международных рейтинговых агентств. Поэтому мнение об уровне риска основывается только на собственных оценках участников, которые могут существенно различаться. Учитывая низкую частоту торгов, это может приводить не только к неоднородности оценок эмитентов одной группы, но и к существенной волатильности между ценами одной бумаги на коротком промежутке времени. Кроме того, отсутствие оценок агентств приводит к большей чувствительности котировок на различную информацию (в том числе слухи). Даже если корпоративный эмитент имеет оценки со стороны международных рейтинговых агентств, что хотя и придает большую определенность оценке риска, однако не решает полностью проблемы. Оценки разных агентств в отношении корпоративных эмитентов, в отличие от суверенных, могут чаще различаться, что уже создает неоднородность котировок в зависимости от предпочтений конкретного участника в отношении агентства. Следовательно, для оценки временной структуры процентных ставок необходим механизм оценки, позволяющий выделить среднерыночный уровень процентных ставок, не зависящий от мнения отдельных участников. Данный метод должен являться как можно менее чувствительным к различного рода выбросам и основываться на наиболее схожих оценках участников. В случае несоблюдения такого подхода получаемые решения будут неустойчивы и подвержены существенным колебаниям по дням. По этой причине, распространенный метод наименьших квадратов (в данном случае нелинейный) при оценке параметрических кривых [6] не подходит для проведения оценивания, поскольку является достаточно чувствительным к большим отклонениям (в том числе как показали практические расчеты, отдельные наблюдения могут влиять даже на знак коэффициентов наклона кривых).

[3] www.cbonds.ru; www.rusbonds.ru.

Для решения первой проблемы автором предлагается использовать дополнительные цены по результатам торгов предыдущих дней с применением фиктивных переменных (по дням). Поскольку уравнение цены купонной облигации не имеет константы, фиктивные переменные добавляются непосредственно к константе каждой из моделей временной структуры процентной ставки. В этом случае фиктивные переменные будут отражать изменение общего уровня процентных ставок по дням (т. е. спрэдов между днями). Тогда выражение для спот-ставки (на примере модели Нельсона – Сигеля) будет иметь следующий вид:

$$R(m) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{I-1} k_i f_i + (\beta_1 + \beta_2)[1 - \exp(-\frac{m}{\tau})] / (\frac{m}{\tau}) - \beta_2 \exp(-\frac{m}{\tau}),$$

где f_i – фиктивные переменные; k_i – коэффициенты при фиктивных переменных; I – число дней, цены которых участвуют в расчете; i – порядковый номер дня, по которому берутся цены. Такой подход, однако, предполагает, что на рассматриваемом временном интервале параметры, отвечающие за наклон функции β_1 и β_2, являются постоянными, что в действительности может нарушаться. Однако учет динамики данных составляющих требует внесение в модель дополнительных параметров, что, в условиях нелинейных функций и ограниченности облигационных выпусков, будет приводить к существенно меньшей устойчивости получаемых оценок.

Попытка использования фиктивных переменных для решения второй проблемы, т. е. их задание для каждого эмитента / выпуска, будет некорректной и приведет к получению ложных выводов о форме кривой. Это объясняется тем, что эмитенты часто имеют всего несколько выпусков, следовательно, на определенных сроках будут присутствовать бумаги разных эмитентов: например, одного эмитента только на коротких, другого только на длинных. Введение фиктивных переменных в такой ситуации нивелирует не только эффект разницы рисков этих эмитентов, но и не позволит увидеть разницу во временной структуре процентных ставок, т. е. поглотит изучаемый эффект.

Однако значительную минимизацию эффектов второй проблемы позволило применение в качестве процедуры оценивания метода максимального правдоподобия с использованием распределений остатков с более толстыми хвостами. В качестве такого распределения можно взять распределение Стьюдента, имеющее больший куртозис при малых степенях свободы. При этом количество степеней свободы рассматривается как неизвестный параметр, также подлежащий определению. Оценки, получаемые на его основе, позволяют получить более робастные решения, являющиеся менее зависящими от отдельных котировок. Предполагая, что остатки распределены в соответствии с распределением Стьюдента (с параметром масштаба), можно построить логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L(\lambda, \sigma, k) = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2)}(1 + ((\tilde{P}_i - P_i(\lambda, m))/\sigma)^2 / k)^{-\frac{k+1}{2}}\right) - N\ln(\sigma) =$$

$$= N\ln(\Gamma(k+1)/2) - N\ln(\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2) - N\ln\sigma - \frac{k+1}{2}\sum_{i=1}^{N}\ln(1 + \frac{(\tilde{P}_i - P_i(\lambda, m))^2}{\sigma^2 k}),$$

где λ – параметры, подлежащие определению (включая фиктивные переменные); σ^2 – параметр масштаба, представляющий собой остаточную дисперсию с точностью до остаточной дисперсии немасштабированного распределения Стьюдента; k – число степеней свободы распределения Стьюдента (также подлежащее определению); $\tilde{P}_i$ – наблюдаемые цены; $P_i(\lambda, m)$ – модельные цены; m – срок до погашения; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Эмпирическое сравнение моделей. Сложность выбора модели кривой заключается в том, что бескупонная доходность для большинства облигаций является теоретическим конструктом, не наблюдаемым в реальности. Поэтому подобрать форму кривой, основываясь на визуальном анализе эмпирических данных, не представляется возможным. Учитывая данное ограничение, для анализа моделей на применимость будем использовать информационные статистики и соответствие форм получаемых кривых теоретическим конструкциям (например, кривые не уходят в область бесконечности, нет резких необъясняемых перепадов в форме кривых).

В табл. 1, 2 приведены получившиеся параметры моделей и ряд информационных статистик для некоторых групп облигаций.

Таблица 1

Результаты оценки ОФЗ
(февраль 2008 г.)

Модель	**b0 (a0)**	**b1 (a1)**	**b2 (a2)**	**b3 (a3)**	**τ 1**	**τ 2 (b1[4])**	**Se^2**	**R^2**	**Max ε ^2**
Полином 2	0,056	0,003	–0,0004				0,001	0,992	0,034
Полином 3	0,053	0,008	–0,002	0,0002			0,007	0,994	0,025
Сплайн	0,052	0,008	0,0009	–0,0015	310	0,011	0,006	0,995	0,019
NS	0,06	–0,013	0,0216		0,736		0,006	0,995	0,021
Svenson	0,061	–0,015	–0,977	0,1	1,006	0,997	0,006	0,995	0,02

Таблица 2

Результаты оценки ССС
(февраль 2008 г.)

Модель	**b0 (a0)**	**b1 (a1)**	**b2 (a2)**	**b3 (a3)**	**τ 1**	**τ 2 (b1)**	**Se^2**	**R^2**	**Max ε ^2**
Полином 2	0,128	–0,015	0,0008				2,021	0,384	9,72
Полином 3	0,14	–0,054	0,035	–0,009			2,01	0,387	9,081
Сплайн	0,129	0,045	–0,246	0,255	130	–1,585	2,007	0,388	9,024
NS	0,092	–0,019	0,14		0,18		2,015	0,386	9,604
Svenson	0	0,063	0,226	0,253	0,184	1,239	2,007	0,388	9,493

Анализ показывает, что в большинстве случаев с точки зрения приближения эмпирических данных наилучшим образом себя демонстрируют сплайны, что является ожидаемым результатом, поскольку данный подход позволяет значительно повышать точность аппроксимации путем увеличения числа узлов. Однако полиномиальные сплайны не теряют существенного недостатка обычных полиномов – во многих случаях на концах резко уходить в бесконечность. Кроме того, при малом числе узлов точность приближения сплайнами не на много превосходит другие модели, несмотря на рост числа параметров, подлежащих оцениванию. Таким образом, если основной целью моделирования не стоит достижение значительной точности аппроксимации на определенном интервале, использование сплайнов не оправдано.

Как компромиссный вариант с точки зрения приближения эмпирических данных и наличия теоретической интерпретации, себя наилучшим образом демонстрирует модель Свенсона. В частности, она достаточно устойчива на коротких сроках погашения и существенно реже уходит в бесконечность в отличие от частого такого поведения кривой Нельсона – Сигеля. А также демонстрирует устойчивость на больших сроках, в отличие от полиномов, которые также часто уходят в недопустимые области.

Наилучшим образом модели Свенсона и Нельсона – Сигеля демонстрируют себя при оценке кривой ГКО/ОФЗ, что также является ожидаемым результатом, учитывая наиболее сильную однородность по риску бумаг данной группы.

Для наиболее рискованных облигаций как кривая Свенсона, так и кривая Нельсона – Сигеля демонстрируют отрицательный наклон. Исходя из практики работы на финансовых рынках, данный факт можно объяснить следующим образом: эмитенты данных бумаг имеют штучные выпуски и стабильно выплачивают купонные доходы, которые выше, чем по облигациям меньшего риска. Однако основные проблемы у данных компаний возникают при прохождении через дату оферты (досрочного погашения) и погашения облигаций. Число де-

[4] Для модели с использованием сплайнов.

фолтов увеличивается именно в эти моменты. Следовательно, риск по данным бумагам возрастает при приближении срока погашения / оферты. Таким образом, когда срок до погашения далек, инвесторы вкладываются в данные бумаги с целью получения более высокого купонного дохода. При приближении же срока погашения, они стараются избавиться от данных бумаг, что и вызывает снижение их котировок и роста процентных ставок.

Такое поведение инвесторов позволяет сделать вывод о спекулятивной характеристике высокорисковых облигаций как финансового инструмента. Действительно, традиционно доходность по большинству облигаций ниже, чем по обыкновенным кредитам, а по некоторым бумагам даже ниже уровня инфляции. Инструмент с такими характеристиками не интересен кредитной организации в качестве основного средства получения прибыли. Основная ценность облигации как финансового инструмента заключается в ее ликвидности, т. е. стратегия вложения подразумевает возможность быстро конвертировать ее в денежные средства в случае необходимости (что достаточно затруднительно, хотя и практически возможно, для обычных кредитов). Таким образом, можно предположить, что при потере ликвидности облигация превращается в классическое беззалоговое кредитование, а в этом случае доходность по ним может быть (как минимум) не ниже, чем по обычным кредитам (поскольку последние в большинстве случаев подразумевают наличие залогов).

Следовательно, в случае высокорискованных облигаций, на больших сроках до погашения именно наличие ликвидности поддерживает низкую доходность, т. е. стратегия большинства не держать бумагу до погашения, а временно разместить избыточную ликвидность, получая относительно высокий купонный доход и продав ее в будущем (что позволяет рассматривать данный инструмент как спекулятивный). На коротких сроках бумагу становится сложнее продавать, т. е. происходит потеря ликвидности, и облигация начинает обретать характеристики беззалогового кредита, что уже ставит в качестве основной характеристики риск невозврата средств (вероятность дефолта заемщика).

На рис. 1 приведено графическое изображение кривых Свенсона по данным за февраль 2008 г.

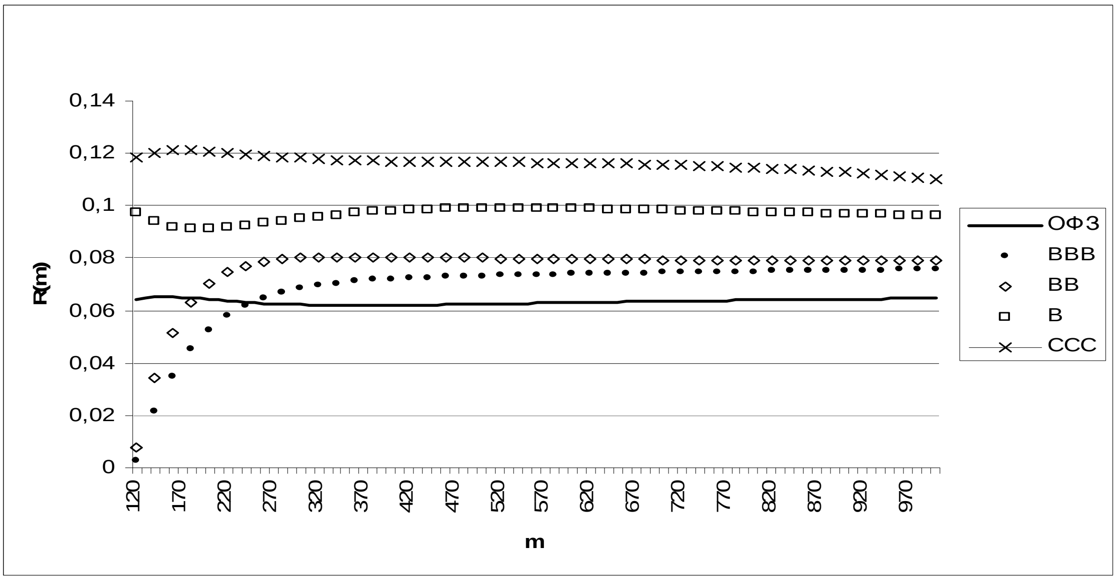

Рис. 1. Кривая процентных ставок в феврале 2008 г.

Дополнительно производилась оценка кривых с использованием фиктивных переменных для разделения бумаг в пределах одного рейтинга на подгруппы в зависимости от подуровней рейтингов (например, BB+, BB, BB–), однако данные переменные практически не оказывали влияния на форму кривых, что, вероятно, объясняется неоднородностью оценок риска со стороны различных инвесторов.

Кроме того, была произведена попытка учета в модели фактора ликвидности, которая оказывает определенное воздействие на котировки. Прокси-переменной ликвидности выступал среднемесячный оборот по бумаге, после чего суммирование квадратов остатков производилось с использованием полученных весов. Однако введение данного фактора также не позволило заметно улучшить качество оценки и изменить форму кривых. Что, видимо, объясняется более сложной структурой показателя *ликвидность* и невозможностью его аппроксимации посредством объема торгов.

По данным за декабрь 2008 г. на основе кривой Свенсона (как зарекомендовавшей себя наилучшим образом) наблюдается значительное изменение кривых бескупонных доходностей (табл. 3, рис. 2).

Ожидаемым результатом является существенный рост процентных ставок по облигациям всех групп риска. Так, ОФЗ на сроке год выросли с 6 % до 10 %, а наиболее рискованные облигации с 11 до более чем 40 %. Именно в этот период финансовый кризис в России набирал обороты, вызывая существенный рост числа дефолтов по облигациям третьего эшелона, что и явилось катализатором роста процентных ставок (в особенности на очень коротких сроках). При этом видно, что рост спрэдов по отношению к ОФЗ мультипликативный по уровню риска: более рискованные бумаги отреагировали значительно сильнее.

Переходя к параметрам модели, можно наблюдать существенный рост остаточной дисперсии, что также является предсказуемым результатом, учитывая рост волатильности на рынке, усиление дифференциации по уровню риска, сжатие объемов торгов, порождающее зависимость котировок от отдельных сделок.

Таблица 3

Результаты оценки модели Свенсона
(декабрь 2008 г.)

Группа	**b0**	**b1**	**b2**	**b3**	**τ 1**	**τ 2**	**Se^2**
ОФЗ	0,106	–86,384	42,838	1104,82	0,026	0,001	1,28
BBB	0,071	–0,21	0,451	15,818	0,434	0,001	3,578
BB	0,162	9,966	–7,617	–31,236	0,072	0,006	17,807
B	0,237	–238,855	49,954	8725,662	0,044	0,001	30,813
CCC	0,147	–16,57	10,096	223,352	0,159	0,006	43,16

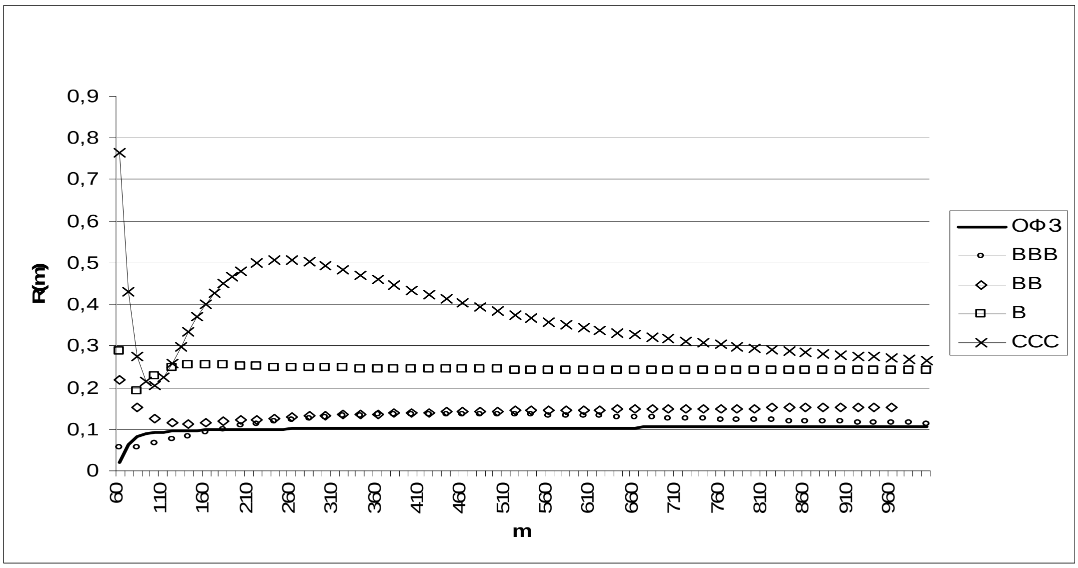

Рис. 2. Кривые процентных ставок в декабре 2008 г.

Заключение

В работе была рассмотрена проблема построения кривых временной структуры процентных ставок для облигаций различных групп риска. Для этого был дан обзор существующих моделей и рассмотрена возможность их использования для решения поставленных задач. Непараметрические методы и методы, основывающиеся на стохастической динамике спот-ставок, являются неприменимыми в силу отсутствия наблюдений за чистыми (без купонного эффекта) спот-ставками. Отсутствие наблюдений заключается в специфике выпусков корпоративных облигаций – практически все выпуски являются купонными. В связи с этим подходящими являются только параметрические модели, не требующие наличия наблюдений за спот-ставками в чистом виде.

Применение подходящих моделей для российских корпоративных облигаций различного риска также сталкивается с ограничениями в виде малого числа данных и неоднородности оценок риска со стороны участников (даже в пределах одного рейтинга), что порождает существенную волатильность котировок. Данные ограничения приводят к искажениям формы кривой, неустойчивости получаемых решений (в том числе ее резкой изменчивости между днями). Смягчить ограничения позволяет использование данных за несколько торговых дней с модификацией модели вводом фиктивных переменных и применением более устойчивых к выбросам методам оценки. Дальнейшим развитием подхода является отказ от постоянства коэффициентов наклона моделей в рамках определенного временного интервала, с наложением, например, авторегрессионной зависимости коэффициентов по периодам, а также возможность использования других распределений остатков с толстыми хвостами для меньшей чувствительности к выбросам.

Построение кривых на данных российского рынка показало недостатки использования полиномиальных моделей, которым свойственно уходить в бесконечные области за горизонтом имеющихся данных. Сплайны показывают наибольшую точность совпадения расчетных и фактических значений, однако содержат большее число параметров, что является крайне нежелательным фактором в связи с имеющимися ограничениями, кроме того, полиномиальные сплайны не теряют недостатков обычных полиномов. Наилучшими для достижения цели являются модели Нельсона – Сигеля и Свенсона. При этом вторую модель рекомендуется использовать, если первая дает плохую аппроксимацию на начальном интервале кривой.

Эмпирический анализ показал закономерный рост процентных ставок при движении к более рискованным эмитентам. Наиболее интересным случаем является форма кривой заемщиков с низким рейтингом, которая имеет отрицательный наклон, что связано с высокой доходностью по купонам данных эмитентов и ростом вероятности дефолта именно в момент погашения. Оценка временной структуры ставок в период кризиса также показывает хорошие результаты с точки зрения применимости модели. Наблюдается существенный рост ставок и поворот большинства кривых в сторону отрицательного наклона на малых сроках погашения, что связано с существенным ростом числа дефолтов в данный период.

Список литературы

1. *Caks J.* The Coupon Effect on Yield to Maturity // Journal of Finance. 1977. № 32.

2. *Nelson C. R., Siegel A. F.* Parsimonious modeling of yield curve // Journal of Business. 1987. Vol. 60. P. 473–489.

3. *Alper E., Akdemir A., Kazimov K.* Estimating the Term Structure of Government Securities in Turkey. Bogarici University economics working paper, 2004.

4. *Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А., Никитин А.* Кривая бескупонной доходности на рынке ГКО-ОФЗ // Рынок ценных бумаг. 2006. № 3. С. 68–77.

5. *Гамбаров Г., Шевчук И., Балабушкин А.* Оценка срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 11; 13.

6. *Geyer A., Mader R.* Estimation of the Term Structure of Interest Rates, a Parametric Approach. Oesterreichische Nationalbank. Working paper, 1999.

7. *Bjork T., Christensen B.* Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves // Mathematical Finance. 2001. Vol. 9, № 4. P. 323–348.

8. *Медведев Г.* Математические основы финансовой экономики: Учеб. пособие: В 2 ч. Минск, 2003. Ч. 2: Определение рыночной стоимости ценных бумаг. 295 с.: ил.

9. *Halasan F.* Interest Rate Theory and Consistency Problems. The University of British Columbia, 2003.

10. *Меньшиков И. С.* Устойчивость портфеля облигаций к трансформации кривой доходности. М., 2003.

11. *Хардле В*. Прикладная непараметрическая регрессия. М.: Мир, 1993. 349 с.

12. *Stanton R.* A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk // Journal of Finance. 1997. Vol. 52.

Материал поступил в редколлегию 11.10.2009

K. V. Kornev

ESTIMATION OF YIELD CURVES FOR RUSSIAN BONDS WITH DIFFERENT GROUP OF CREDIT RISK

The article introduces overview yield curve models and their comparison. Analysis of the applicability of these approaches for risk-free securities, and for bonds issuers of other risk groups in Russia's financial market was produced. Limitations of using models that arise in assessing yield curves of securities other than risk-free were described. The article gives an approach allows to reduce the impact of restrictions and to obtain more robust solutions. The approach can use by financial market participants to analyze the level of risk, estimation of expectations and choice of strategies.

Keywords: yield curves, securities, bonds, credit risk, credit rating, yield, Nelson – Siegel model, Svensson model, splines, maximum likelihood estimation.