УДК 330.11+330.88

Н. П. Дементьев

Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: dement@ieie.nsc.ru

ЭФФЕКТЫ ЗАМЕЩЕНИЯ В КЛАССОВЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ НОРМОЙ СБЕРЕЖЕНИЯ

В статье предлагаются модификации известных моделей экономического роста Р. Солоу и Л. Пазинетти, согласно которым население состоит из нескольких групп с различными нормами сбережения. Доказано существование и локальная асимптотическая устойчивость решений сбалансированного роста. В модифицированной модели Солоу обнаружен эффект частичного замещения в сбережении: увеличение сбережения в одной группе может привести к уменьшению сбережения в других группах. В модели Пазинетти с функцией Кобба – Дугласа определена норма сбережения капиталистов, ниже которого этот класс перестает существовать.

Ключевые слова: функция Кобба – Дугласа, модели экономического роста, эффекты замещения, экономический рост, модель, группы населения, различные нормы, сбережения, эффекты замещения, асимптотическая устойчивость.

Классовая дифференциация в сбережениях населения

В статье исследуются модели экономического роста, в которых население представлено несколькими группами (классами) с различной нормой сбережения. Со времени выхода работы Р. Солоу в моделях экономического роста рассматривается, большей частью, так называемый случай с «пропорциональными» сбережениями [1; 2], когда динамика капитала описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{K} = \sigma F\left(K, L\right) - \gamma K , \tag{1}$$

где $F\left(K, L\right)$ – производственная функция; L – объем трудовых ресурсов; σ – норма валового сбережения, а γ – норма амортизации. Величина L определяется экзогенно, она растет во времени с постоянным темпом. Обычно принимается, что σ – постоянная величина (реже рассматривается случай, когда σ – монотонно возрастающая функция от нормы прибыли на капитал). Модели с «пропорциональными» сбережениями просты в анализе, а фигурирующие в (1) величины могут быть определены из существующей статистики. При стандартных предположениях относительно производственной функции показывается, что величина накопленного капитала на решении сбалансированного роста тем выше, чем больше норма сбережения. Доказывается также, что все модельные решения асимптотически сходятся к решению сбалансированного роста, компоненты которого растут с темпом роста, зависящим от темпов роста населения и производительности труда.

Более сложные подходы в описании сбережений были предложены Н. Калдором и Л. Пазинетти [3–4]. В них национальный доход Y рассматривается как сумма двух составляющих – совокупной заработной платы W и совокупной прибыли P:

$$Y = W + P .$$

ISSN 1818-7862. Вестник НГУ. Серия: Социально-экономические науки. 2011. Том 11, выпуск 4

Н. Калдор различал норму сбережения σ_W из заработной платы и норму сбережения σ_P из прибыли. Сбережение S определяется по формуле

$$S = \sigma_W W + \sigma_P P.$$

Такое описание механизма сбережений не лишено недостатков. Сам Н. Калдор полагал, что основную часть величины $\sigma_P P$ составляет нераспределенная прибыль предприятий. В настоящее время, однако, это вряд ли соответствует реалиям западных экономик. В экономике США, например, в последние десятилетия на долю дивидендов в среднем приходится более 50 % прибыли предприятий, и, несомненно, дивиденды также составляют важный источник сбережений.

Иной подход был предложен Л. Пазинетти. Он в явном виде выделяет два класса – работников и капиталистов. Работники имеют сбережения, поэтому им принадлежит часть капитала в экономике. Доходы работников формируются из заработной платы и прибыли на их капитал. Другая часть капитала принадлежит капиталистам, их доходы состоят исключительно из прибыли на принадлежащий им капитал. Формально доход работников равен $W + P_L$, а доход капиталистов – P_C, где P_L – прибыль на капитал работников, а P_C – прибыль на капитал капиталистов, $P = P_L + P_C$. Таким образом, Л. Пазинетти различает норму сбережения σ_L для работников и норму сбережения σ_C для капиталистов, $\sigma_C > \sigma_L$. В результате совокупное сбережение S составляют две величины сбережения работников $S_L = (W + P_L)$ и сбережения капиталистов $S_C = \sigma_C P_C$.

Как видно, при описании процессов сбережения Н. Калдор положил за основу распределение национального дохода по видам доходов, а Л. Пазинетти исходил из распределения национального дохода между общественными группами – классами.

Как отмечалось выше, в моделях с «пропорциональными» сбережениями с ростом нормы сбережения σ увеличиваются объемы сбережения и капитала и, как следствие, объем производства на траекториях сбалансированного роста. Естественным было бы ожидать, что рост нормы сбережения σ_L со стороны работников должен вести к росту совокупного капитала. Однако Л. Пазинетти обнаружил в предложенной им модели, что, хотя рост величины σ_L и увеличивает в долгосрочной перспективе сбережение и капитал работников, настолько же в точности падают (замещаются) сбережение и капитал капиталистов. В этом смысле, уровень совокупного сбережения и капитала в экономике не зависит от того, насколько высока норма сбережения работников.

Эффекты замещения нельзя обнаружить в моделях с «пропорциональными» сбережениями и потому, возможно, они мало исследовались, хотя в регулировании процессов сбережения в экономике их роль необходимо учитывать. В качестве примера можно привести опыт реформ накопительных систем пенсионного страхования [1], предпринятых в США [5] и Великобритании в 80–90-х гг. прошлого века. Путем налогового стимулирования добровольных пенсионных сбережений правительства этих стран рассчитывали, в частности, повысить уровень сбережения в экономике. Результатом реформ стал гигантский рост пенсионных накоплений работающих (точнее их части, охваченной накопительными пенсионными планами), однако совокупное сбережение в экономике обеих стран не только не выросло, но, наоборот, упало до почти нулевого уровня. Как видно, рост сбережения в одних группах населения сопровождался падением сбережений в других группах.

Далее предлагается модификация модели Солоу, в которой население состоит из нескольких групп с различными нормами сбережения. С ее помощью анализируется, в частности, как сбережение в отдельной группе влияет на другие экономические показатели. Кроме того, предложена модель типа Пазинетти, в которой на примере производственной функции Коб-

[1] В большинстве стран мира обязательное пенсионное страхование устроено по распределительному (солидарному) принципу: пенсионные взносы работающих «с колес» расходуются на выплату текущих пенсий. В основу добровольного пенсионного страхования закладывается накопительный принцип: взносы застрахованного инвестируются и вместе с процентными доходами возвращаются ему после выхода на пенсию.

ба – Дугласа изучаются условия, при которых возможно сосуществование капиталов работников и капиталистов.

Модифицированная модель Солоу

В предлагаемой модели принимается, что производственная функция F однородна первой степени, вогнута и удовлетворяет стандартным условиям Инады:

(i1) $F'_k(k,l) > 0,\ F'_l(k,l) > 0,\ F''_{kk}(k,l) < 0,\ F''_{ll}(k,l) < 0,$ при $k > 0,\ l > 0$;

(i2) $F'_k(k,l) \to +\infty$ при $k \to +0$, $F'_k(k,l) \to 0$ при $k \to +\infty$ для всякого фиксированного $l > 0$;

(i3) $F'_l(k,l) \to +\infty$ при $l \to +0$, $F'_l(k,l) \to 0$ при $l \to +\infty$ для всякого фиксированного $k > 0$.

Работающее население состоит из m групп с нормами сбережения $\sigma_1, ..., \sigma_m$, $i = 1, ..., m$, $0 < \sigma_1 < ... < \sigma_m < 1$. Численность каждой группы i задается экзогенно и растет с темпом n:

$$L_i(t) = l_i e^{nt},$$

где $l_i > 0$ – некоторые числа, $i = 1, ..., m$. Обозначим $l = \sum_{i=1}^{m} l_i$. Тогда с постоянным темпом n растет и общая численность населения

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m} L_i(t) = le^{nt}.$$

Капитал $K(t)$ состоит из m частей:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{m} K_i(t), \tag{2}$$

где часть $K_i(t)$ принадлежит группе i.

Опишем, как произведенная продукция $F(K(t), L(t))$ распределяется между m группами. Доходы каждой группы формируются из совокупной заработной платы представителей группы и прибыли на их капитал. Ставка заработной платы и норма прибыли на капитал определяются в модели как предельные производительности труда и капитала:

$$w(t) = F'_L(K(t), L(t)), \quad r(t) = F'_K(K(t), L(t)). \tag{3}$$

Тогда доходы группы i равны величине $w(t)L_i(t) + r(t)K_i(t)$, а ее сбережение – величине $\sigma_i(w(t)L_i(t) + r(t)K_i(t))$, $i = 1, ..., m$.

Динамика капитала описывается уравнениями

$$\dot{K}_i(t) = \sigma_i(Fw(t)L_i(t) + r(t)K_i(t)),\ i = 1, ..., m,$$

или

$$\dot{K}_i(t) = \sigma_i\left(F'_L(K(t), L(t))L_i(t) + F'_K(K(t), L(t))K_i(t)\right),\ i = 1, ..., m \tag{4}$$

Уравнения (2), (4) задают модель экономического роста.

Замечание. В модели для простоты принимается, что норма амортизации равна нулю. Однако приводимый ниже модельный анализ с очевидными изменениями переносится и на случай с ненулевой нормой амортизации.

Рассмотрим решения сбалансированного роста системы (2), (4), растущие во времени с тем же темпом, что и трудовые ресурсы:

$$K^0(t) = k^0 e^{nt},\ K_i^0(t) = k_i^0 e^{nt},\ i = 1, ..., m$$

В моделировании экономической динамики решениям сбалансированного роста придается нормативное значение. Считается, что на них реализуются экономические пропорции, наиболее естественные в рамках моделей с постоянными во времени параметрами. Поэтому они используются в методах сравнительной статики, с помощью которых изучается, как меняется решение сбалансированного роста при изменении модельных параметров. Кроме того, нередко решения сбалансированного роста оказываются локально (или даже глобально) асимптотически устойчивыми, т. е. к ним с течением времени сходятся другие решения. Поэтому решения сбалансированного роста позволяют судить о динамике экономики в долгосрочной перспективе.

Произведя замену переменных

$$K_i(t)=k_i(t)e^{nt},\ i=1,...,m,$$

и используя однородность функции F, преобразуем уравнения (2), (4) к виду

$$\dot{k}_i(t)=-nk_i(t)+\sigma_i\left(F_l'\big(k(t),l\big)l_i+F_k'\big(k(t),l\big)k_i(t)\right),\ i=1,...,m, \tag{5}$$

$$k(t)=\sum_{i=1}^{m}k_i(t). \tag{6}$$

Величины $k^0=\sum_{i=1}^{m}k_i^0$, k_i^0, $i=1,...,m$ являются стационарным решением системы (5)–(6) и могут быть определены из системы конечных уравнений

$$-nk_i+\sigma_i\left(F_l'(k,l)l_i+F_k'(k,l)k_i\right)=0,\ i=1,...,m \tag{7}$$

$$k=\sum_{i=1}^{m}k_i. \tag{8}$$

Покажем, что система (7)–(8) имеет положительное решение k^0, k_i^0, $i=1,...,m$. Из (7) следует, что $nk_i^0-\sigma_iF_k'\left(k^0,l\right)k_i^0>0$, откуда

$$n-\sigma_iF_k'\left(k^0,l\right)>0.$$

Обозначим через k^* единственное решение уравнения

$$n-\sigma_mF_k'(k,l)=0.$$

Так как функция $F_k'(k,l)$ строго убывает по k, то из соотношений $n-\sigma_mF_k'\left(k^0,l\right)>0$, $n-\sigma_mF_k'\left(k^*,l\right)=0$ следует, что $k^0>k^*$.

Поскольку F – однородная первой степени функция, то

$$F_l'(k,l)=\left(F(k,l)-F_k'(k,l)k\right)/l.$$

Тогда уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$k_i=\sigma_i\left(F(k,l)-F_k'(k,l)k\right)l^{-1}l_i\Big/\left(n-\sigma_iF_k'(k,l)\right),\ i=1,...,m.$$

Определим на интервале $\left(k^*,\infty\right)$ функции

$$\kappa_i(k)=\sigma_i\left(F(k,l)-F_k'(k,l)k\right)l^{-1}l_i\Big/\left(n-\sigma_iF_k'(k,l)\right),\ i=1,...,m.$$

Очевидно, при каждом фиксированном $k\in\left(k^*,\infty\right)$ набор величин $\left(k,\kappa_1(k),...,\kappa_m(k)\right)$ удовлетворяет уравнениям (7). Для доказательства существования решения системы (7)–(8) достаточно установить, что при некотором $k^0\in\left(k^*,\infty\right)$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\kappa_i\left(k^0\right)=k^0,$$

и положить в качестве решения величины k^0, $k_i^0=\kappa\left(k^0\right)$, $i=1,...,m.$ Из условий (i1)–(i2) легко вывести, что $\sum_{i=1}^{m}\kappa_i(k)-k\to+\infty$ при $k\to k^*$, $k>k^*$ и $\sum_{i=1}^{m}\kappa_i(k)-k\to-\infty$ при $k\to+\infty$ (доказательство этого факта опустим). Тогда найдется $k^0\in\left(k^*,\infty\right)$ такое, что $\sum_{i=1}^{m}\kappa_i\left(k^0\right)-k^0=0$. Существование решения системы (7)–(8) доказано.

Из (7) следует, что

$$k_i^0 / l_i = F_l'\left(k^0, l\right) \Big/ \left(n / \sigma_i - F_k'\left(k^0, l\right)\right), \; i = 1, ..., m .$$

Отсюда и из неравенств $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_m < 1$ прямо следует, что

$$k_1^0 / l_1 < k_2^0 / l_2 < ... < k_m^0 / l_m . \tag{9}$$

Как и следовало ожидать, на решениях сбалансированного роста капитал в расчете на одну душу выше в группах с большей нормой сбережения.

Локальная устойчивость решений сбалансированного роста

В данном разделе показывается, что решение сбалансированного роста

$$\left(K^0(t), K_1^0(t), ..., K_m^0(t)\right) = \left(k^0, k_1^0, ..., k_m^0\right) e^{nt}$$

системы уравнений (2), (4) локально асимптотически устойчиво по структуре. Это по определению означает, что существует некоторая окрестность точки $\left(K^0(0), K_1^0(0), ..., K_m^0(0)\right)$, такая что

$$\left(K(t), K_1(t), ..., K_m(t)\right) e^{-nt} \to \left(K^0(t), K_1^0(t), ..., K_m^0(t)\right) e^{-nt} = \left(k^0, k_1^0, ..., k_m^0\right)$$

при $t \to \infty$, если $\left(K(t), K_1(t), ..., K_m(t)\right)$ – решение системы (2), (4), а точка $\left(K(0), K_1(0), ..., K_m(0)\right)$ лежит в указанной окрестности. Очевидно, локально асимптотически устойчивость по структуре решения $\left(K^0(t), K_1^0(t), ..., K_m^0(t)\right)$ эквивалентна локальной асимптотической устойчивости стационарного решения $\left(k^0, k_1^0, ..., k_m^0\right)$ в системе (5)–(6).

Покажем, что стационарное решение $\left(k^0, k_1^0, ..., k_m^0\right)$ системы (5)–(6) локально асимптотически устойчиво. С этой целью произведем подстановку (6) в уравнения (5), заменим $F_l'\left(k^0, l\right)$ на $\left(F\left(k^0, l\right) - F_k'\left(k^0, l\right) k^0\right) \big/ l$ и линеаризуем полученную систему дифференциальных уравнений в окрестности точки $\left(k_1^0, k_2^0, ..., k_m^0\right)$. Характеристическое уравнение для соответствующей матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda + n - \sigma_1 f - b_1 & -b_1 & ... & -b_1 \\ -b_2 & \lambda + n - \sigma_2 f - b_2 & ... & -b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_m & -b_m & ... & \lambda + n - \sigma_m f - b_m \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

где $f = F_k'\left(k^0, l\right)$, $b_i = \sigma_i F_{kk}''\left(k^0, l\right)\left(k_i^0 - k^0 l_i / l\right)$. Для доказательства локальной асимптотической устойчивости решения $\left(k_1^0, k_2^0, ..., k_m^0\right)$ достаточно показать, что вещественные части всех корней уравнения (10) строго отрицательны. Легко показать, что числа b_i удовлетворяют следующим свойствам:

(p1) найдется i_0, $1 < i_0 \le m$, такой что: $b_i > 0$ для $i = 1, ..., i_0 - 1$, $b_{i_0} \le 0$, $b_i < 0$ для $i = i_0 + 1, ..., m$. Если $i_0 = m$, то $b_{i_0} < 0$;

(p2) $\sum_{i=1}^{m} b_i < 0$; $\sum_{i=1}^{m} b_i / \sigma_i = 0$.

Обозначим $\bar{\lambda}_i = -n + \sigma_i f$, $i = 1, ..., m$. Зафиксируем произвольное i и произведем подстановку $\lambda = \bar{\lambda}_i$ в полином-детерминант из (10). Тогда диагональные элементы в матрице из (10) примут значения

$$\left(\sigma_i - \sigma_1\right) f - b_1, ..., \left(\sigma_i - \sigma_{i-1}\right) f - b_{i-1}, \; -b_i, \; \left(\sigma_i - \sigma_{i+1}\right) f - b_{i+1}, ..., \left(\sigma_i - \sigma_m\right) f - b_m ,$$

а i-й столбец будет состоять из элементов $-b_1, -b_2, ..., -b_m$. Вычтем этот столбец из остальных столбцов (что, как известно, не меняет значение детерминанта). Тогда преобразованная матрица будет иметь диагональные элементы

$$(\sigma_i - \sigma_1)f, ..., (\sigma_i - \sigma_{i-1})f,\ -b_i,\ (\sigma_i - \sigma_{i+1})f, ..., (\sigma_i - \sigma_m)f,$$

причем все элементы вне диагонали и i-го столбца обратятся в нуль. Детерминант такой матрицы равен произведению диагональных элементов $-b_i f^{m-1} \prod_{j \neq i} (\sigma_i - \sigma_j)$. Отсюда следует, что в каждой точке $\bar{\lambda}_i$, $i = 1, 2, ..., i_0 - 1$, значение полинома не равно нулю, причем при последовательном переходе от одной точки к другой оно меняет знак. Поэтому на каждом из $i_0 - 2$ отрезков $[\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2], ..., [\bar{\lambda}_{i_0-2}, \bar{\lambda}_{i_0-1}]$ можно выбрать один корень полинома. Аналогично на каждом из $m - i_0$ отрезков $[\bar{\lambda}_{i_0}, \bar{\lambda}_{i_0+1}], ..., [\bar{\lambda}_{m-1}, \bar{\lambda}_m]$ существует корень полинома (если $b_{i_0} = 0$, то на отрезке $[\bar{\lambda}_{i_0}, \bar{\lambda}_{i_0+1}]$ корнем является число $\bar{\lambda}_{i_0}$). Таким образом, характеристический полином имеет $m - 2$ корня $\lambda_1, ..., \lambda_{m-2}$, каждый из которых меньше $\bar{\lambda}_m < 0$.

Покажем, что вещественные части оставшихся корней λ_{m-1}, λ_m также меньше $\bar{\lambda}_m$. По формулам Виета сумма всех корней характеристического многочлена матрицы равна ее следу, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i + \lambda_{m-1} + \lambda_m = -mn + f \sum_{i=1}^{m} \sigma_i + \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i + \sum_{i=1}^{m} b_i .$$

Отсюда и из неравенств $\sum_{i=1}^{m} b_i < 0$, $\sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i > \sum_{i \neq i_0-1, m} \bar{\lambda}_i$ следует неравенство

$$\lambda_{m-1} + \lambda_m < \bar{\lambda}_{i_0-1} + \bar{\lambda}_m < 2\bar{\lambda}_m . \tag{11}$$

Возможно два случая. В первом из них корни λ_{m-1}, λ_m комплексные, тогда их вещественные части равны и в силу (11) должны быть меньше $\bar{\lambda}_m < 0$. Во втором случае оба корня действительные. Пусть, от противного, один из них больше $\bar{\lambda}_m$. Обозначим его через λ_{m-1}. Так как характеристический полином в точке $\bar{\lambda}_m$ принимает положительное значение, то и второй корень λ_m также должен быть больше $\bar{\lambda}_m$ (иначе полином будет принимать отрицательные значения при $\lambda > \lambda_{m-1}$, что невозможно). Итак, $\lambda_{m-1} + \lambda_m > 2\bar{\lambda}_m$, что противоречит (11). Стало быть, оба корня λ_{m-1}, λ_m меньше $\bar{\lambda}_m < 0$.

Эффекты замещения в структуре капитала и потребления

Рассмотрим случай $m = 2$. Уравнения (7)–(8) можно свести к системе

$$-nk_i + \sigma_i \left(F_l'(k_1 + k_2, l) l_i + F_k'(k_1 + k_2, l) k_i \right) = 0,\ i = 1, 2 . \tag{12}$$

Будем рассматривать компоненты решения этой системы k_1^0, k_2^0 как неявные функции от норм сбережения σ_1, σ_2: $k_1^0 = k_1^0(\sigma_1, \sigma_2)$, $k_2^0 = k_2^0(\sigma_1, \sigma_2)$. По частным производным этих функций можно судить, как параметры σ_1, σ_2 влияют на величину совокупного капитала $k^0(\sigma_1, \sigma_2) = k_1^0(\sigma_1, \sigma_2) + k_2^0(\sigma_1, \sigma_2)$ и на его распределение между обеими группами.

Зафиксируем некоторый набор (σ_1^0, σ_2^0), $0 < \sigma_1^0 < \sigma_2^0 < 1$, и продифференцируем почленно уравнения (12) по σ_1:

$$(-n + \sigma_1 f + b_1) \frac{\partial k_1^0}{\partial \sigma_1} + b_1 \frac{\partial k_2^0}{\partial \sigma_1} + I_1^0 = 0, \tag{15}$$

$$b_2 \frac{\partial k_1^0}{\partial \sigma_1} + \left(-n + \sigma_2 f + b_2\right) \frac{\partial k_2^0}{\partial \sigma_1} = 0, \tag{16}$$

где $f > 0,\ b_1 > 0, b_2 < 0$ были определены выше, а

$$I_i^0 = F_l'\left(k^0, l\right) l_i + F_k'\left(k^0, l\right) k_i = \left(F\left(k^0, l\right) - f k^0\right) l_i \big/ l + f k_i^0$$

есть доход группы i, $i = 1, 2$. Выражения (13)–(14) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial k_1^0}{\partial \sigma_1}$, $\frac{\partial k_2^0}{\partial \sigma_1}$. Детерминант матрицы системы равен

$$\Delta = \left(-n + \sigma_1 f\right)\left(-n + \sigma_2 f\right) - n\left(b_1 + b_2\right) + f\left(\sigma_1 b_2 + \sigma_2 b_1\right).$$

Так как $-n + \sigma_1 f < 0$, $-n + \sigma_2 f < 0$, $-n\left(b_1 + b_2\right) > 0$, $\sigma_2 b_1 + \sigma_1 b_2 = \sigma_1 \sigma_2 \left(b_1 / \sigma_1 + b_2 / \sigma_2\right) = 0$ (см. (p2)), то $\Delta > 0$.

Разрешая систему (15)–(16), получим

$$\frac{\partial k_1^0}{\partial \sigma_1} = \left(n - \sigma_2 f - b_2\right) I_1^0 / \Delta > 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial k_2^0}{\partial \sigma_1} = b_2 I_1^0 / \Delta < 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial k^0}{\partial \sigma_1} = \frac{d k_1^0}{d \sigma_1} + \frac{d k_2^0}{d \sigma_1} = \left(n - \sigma_2 f\right) I_1^0 / \Delta > 0. \tag{17}$$

Согласно (15)–(17), с ростом нормы сбережения в первой группе увеличивается как ее капитал k_1^0, так и совокупный капитал k^0. При этом капитал k_2^0 второй группы уменьшается. Из (12) непосредственно вытекает, что $I_i^0 = n k_i^0 / \sigma_i$, $i = 1, 2$. Отсюда и из (16) следует, что с ростом σ_1 доходы $I_2^0 = n k_2^0 / \sigma_2$, сбережение $\sigma_2 I_2^0$ и потребление $\left(1 - \sigma_2\right) I_2^0$ во второй группе уменьшатся. Стало быть, вторая группа проигрывает по всем основным показателям, если в первой группе повышается норма сбережения.

Доходы первой группы I_1^0 с ростом σ_1 увеличиваются, поскольку выпуск $F\left(k^0, l\right)$ возрастает, доходы второй группы I_2^0 уменьшаются, а $I_1^0 = F\left(k^0, l\right) - I_2^0$. Сбережение $\sigma_1 I_1^0$ также увеличивается с ростом σ_1. Что же касается потребления $c_1^0 = \left(\sigma_1^{-1} - 1\right) n k_1^0$ в первой группе, то сомножители $\sigma_1^{-1} - 1$ и k_1^0 изменяются разнонаправленно, и можно показать, что в зависимости от параметров модели потребление c_1^0 может как уменьшиться, так и увеличиться.

Аналогично можно получить формулы, показывающие, как рост σ_2 влияет на капитал в каждой группе и в экономике в целом:

$$\frac{d k_1^0}{d \sigma_2} = b_1 I_2 / \Delta > 0,$$

$$\frac{d k_2^0}{d \sigma_2} = \left(n - \sigma_1 f - b_1\right) I_2^0 / \Delta,$$

$$\frac{d k^0}{d \sigma_2} = \frac{d k_1^0}{d \sigma_2} + \frac{d k_2^0}{d \sigma_2} = \left(n - \sigma_1 f\right) I_2^0 / \Delta > 0.$$

Как видно, рост нормы сбережения во второй группе увеличивает в решениях сбалансированного роста как капитал первой группы, так и объем капитала в целом. Доходы $I_1^0 = n k_1^0 / \sigma_1$, сбережение $\sigma_1 I_1^0$ и потребление $\left(1 - \sigma_1\right) I_1^0$ в первой группе также возрастут. Стало быть, группа с меньшей нормой сбережения выигрывает во всех отношениях, если в другой группе норма сбережения возрастет еще более.

Естественно было бы ожидать, что возрастет и капитал второй группы, т. е. $\frac{dk_2^0}{d\sigma_2} > 0$. В общем случае нам не удалось доказать это свойство. Однако можно показать, что оно выполняется в случае производственных функций Кобба – Дугласа.

Итак, рост нормы сбережения в первой группе (с меньшей нормой сбережения) увеличивает ее сбережение и капитал, однако этот прирост сопровождается снижением сбережения и капитала во второй группе. Если первая группа выигрывает при росте нормы сбережения во второй группе, то вторая группа, наоборот, проигрывает при росте нормы сбережения в первой группе.

Эффекты замещения в модели типа Пазинетти

Рассмотрим модель, в которой первую группу населения составляют работники, а вторую – капиталисты:

$$\dot{K}_1 = \sigma_1\left(F_L'\left(K_1 + K_2, L\right)L + F_k'\left(K_1 + K_2, L\right)K_1\right),$$

$$\dot{K}_2 = \sigma_2 F_k'\left(K_1 + K_2, L\right)K_2,$$

где $L = le^{nt}$ – численность работников. После замены $K_i\left(t\right) = k_i^0 e^{nt}$, $i = 1,\ 2$, уравнения преобразуются к виду

$$-nk_1 + \sigma_1\left(F_l'\left(k_1 + k_2, l\right)l + F_k'\left(k_1 + k_2, l\right)k_1\right) = 0, \tag{18}$$

$$-nk_2 + \sigma_2 F_k'\left(k_1 + k_2, l\right)k_2 = 0. \tag{19}$$

Выясним условия, при которых на решении сбалансированного роста капиталисты имеют ненулевой капитал k_2^0. Положительное решение $\left(k_1^0, k_2^0\right)$ системы (18)–(19) должно удовлетворять уравнению

$$-n + \sigma_2 F_k'\left(k, l\right) = 0, \tag{20}$$

где $k = k_1 + k_2$. Уравнение (20) имеет единственное решение k^0. Из (18) можно однозначно определить

$$k_1^0 = F_l\left(k^0, l\right)l\Big/\left(n/\sigma_1 - F_k'\left(k^0, l\right)\right) = F_l\left(k^0, l\right)l\Big/\left(n/\sigma_1 - n/\sigma_2\right) \tag{21}$$

и $k_2^0 = k^0 - k_1^0$. Для того, чтобы капиталисты имели капитал $k_2^0 > 0$, необходимо, чтобы их норма сбережения была достаточно высокой (выполнение неравенства не является, вообще говоря, достаточным условием). Проиллюстрируем этот факт на примере производственных функций Кобба – Дугласа $F\left(K, L\right) = AK^\alpha L^\beta$, $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$. В этом случае из соотношений (20), (21) можно найти

$$k^0 = \left(\frac{\sigma_2 \alpha A}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} l,\ \ k_1^0 = \sigma_1 \beta \left(\frac{\sigma_2 A}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} l \Big/ \left(\sigma_2 - \sigma_1\right),\ \ k_2^0 = k^0 - k_1^0 = \left(\frac{\sigma_2 A}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{\frac{\alpha}{\beta}} l \frac{\alpha\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Итак, капитал k_2^0 положителен тогда и только тогда, когда $\alpha\sigma_2 > \sigma_1$ или, то же самое, когда норма сбережения капиталистов более чем в α^{-1} раз превышает норму сбережения работников.

При $\sigma_1 < \alpha\sigma_2$ совокупный капитал k^0 на решении сбалансированного роста определяется из уравнения (20), не зависящего от параметра σ_1. Это означает, что изменение нормы сбережения работников σ_1 в пределах интервала $\left(0, \alpha\sigma_2\right)$ не влияет на величину совокупного капитала k^0. Хотя капитал работников k_1^0 и увеличивается (это следует из (21)), на такую же величину уменьшается (замещается) капитал k_2^0.

Если же $\sigma_1 < \alpha\sigma_2$ и норма сбережения капиталистов σ_2 еще более увеличилась, то совокупный капитал увеличится. При этом возрастет как капитал работников, так и их потребление. Капитал капиталистов также возрастет, но их потребление и увеличится, и уменьшится в зависимости от параметров модели.

При $\sigma_1 = \alpha\sigma_2$ величина капитала k_2^0 на решении сбалансированного роста падает до нуля и остается таковой при дальнейшем росте σ_1. Таким образом, $k^0 = k_1^0$ при $\sigma_1 \geq \alpha\sigma_2$, а уравнение (18) сводится к виду

$$-nk_1 + \sigma_1 A k_1^{\alpha} l^{\beta} = 0 .$$

Решение $k^0 = k_1^0 = (\sigma_1 A / n)^{1/\beta} l$ данного уравнения является возрастающей степенной функцией от параметра σ_1.

Применительно к рассмотренной модели основной вывод состоит в том, что рост нормы сбережения работников не влияет на совокупный капитал на траектории сбалансированного роста до тех пор, пока норма сбережения работников не вырастет настолько, что будет полностью вытеснен капитал капиталистов.

Список литературы

1. *Solow R. M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70, № 1.65–94.

2. *Аткинсон Э. Б., Стиглиц Дж. Э.* Лекции по экономической теории государственного сектора. М.: Аспект пресс, 1995. 832 с.

3. *Kaldor N.* Alternative Theories of Distribution // Review of Economic Studies. 1956. Vol. 23, № 2. P. 83–100.

4. *Pasinetti L. L.* Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth // Review of Economic Studies. 1962. Vol. 29, № 4. P. 267–279.

5. *Дементьев Н. П.* Пенсионные накопительные реформы, финансовая сфера и сбережение в экономике США // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 16–36.

Материал поступил в редколлегию 25.07.2011

N. P. Dementiev

THE EFFECTS OF SUBSTITUTION IN THE CLASS MODELS OF ECONOMIC GROWTH WITH DIFFERENT SAVING RATES

The paper suggests some modification of well-known economic growth models by R. Solow and L. Pasinetti in which the population consists of several groups with different saving rates. For them, the existence and local asymptotic stability of balanced growth solutions are proved. In the modified Solow model there has been discovered the effect of partial substitution in savings: the increase in savings in one group can cause a decrease in savings in the other groups. In the model of Pasinetti with the Cobb-Douglas production function saving rate of the capitalists is defined, below which this class ceases to exist.

Keywords: economics growth, model, population groups, different saving rates, substitution effects, asymptotic stability.