УДК 330.42, 330.356

Д. О. Неустроев

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: dima.neustroev@mail.ru

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА УЗАВЫ – ЛУКАСА С ОТРАЖЕНИЕМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Предложена модификация модели экономического роста Узавы – Лукаса. В модель добавлены природные ресурсы как фактор производства. Рассмотрены необходимые и достаточные условия оптимального развития в рамках данной модели. Определены в общем виде темпы прироста основных макроэкономических показателей на траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: модель Узавы – Лукаса, человеческий капитал, природные ресурсы.

Введение

Вопрос влияния человеческого капитала на развитие экономической системы является сегодня достаточно актуальным. Этому вопросу уделяется значительное внимание как в зарубежной, так и в отечественной литературе. Существует целый ряд моделей, где человеческий капитал выступает как фактор экономического роста, например, двухсекторная модель эндогенного экономического роста Узавы – Лукаса. Тем не менее в реальной экономике фактор наличия значительного количества доступных и востребованных природных ресурсов также играет важную и не всегда однозначную роль. Учет влияния природных ресурсов на экономическую динамику особенно актуален для стран, экономика которых существенно зависит от результатов деятельности добывающих отраслей. К таким странам относится Россия. Поэтому, при написании данной статьи, была поставлена цель – синтезировать анализ влияния человеческого капитала и природных ресурсов в рамках единой модели, в связи с чем предложена модификация модели Узавы – Лукаса с отражением в ней фактора природных ресурсов.

Обзор литературы

Характерной чертой двухсекторной модели экономического роста Узавы – Лукаса является присутствие в ней человеческого капитала и анализ его влияния на экономический рост. Изначально Хирофуми Узава (*Hirofumi Uzawa*) в своей статье [1] анализирует модель экономического роста с нейтральным по Харроду уровнем технологического развития, т. е. производственную функцию вида

$$F\left[K(t), A_U(t)L_P(t)\right],$$

где $K(t)$ – объем основного капитала; $A_U(t)$ – уровень производительности труда; $L_P(t)$ – объем трудовых ресурсов, задействованных в производстве. Факторами, влияющими на производительность труда, были образование, здоровье, общественные блага и т. д. Влияние данных факторов отражает суть второго, образовательного сектора экономики в данной модели. У Узавы он представлен в виде

$$\dot{A_U}(t)/ A_U(t) = \varphi\left[L_E(t) / L(t)\right],$$

где $\dot{A_U}(t)$ есть приращение производительности труда в момент времени *t*, таким образом, $\dot{A_U}(t) / A_U(t)$ – темп прироста производительности труда. Далее, используя принцип максимума Понтрягина, Узава анализирует динамику модели, при условии максимизации уровня потребления. И если в его статье понятие человеческого капитала прямо не упоминается, хотя и ощущается интуитивно, то позже, в конце 1980-х гг. публикуется статья [2] Роберта Лукаса (*Robert Lucas*), где, модифицируя данную модель, он конкретно говорит о человеческом капитале. Технологический прогресс у него имеет смешанный характер и уже не строго нейтрален по Харроду, как было у Узавы. Производственная функция теперь имеет вид

$$Y(t) = AK(t)^{\beta}\left[b_L(t)h(t)L(t)\right]^{1-\beta} h_a(t)^{\xi}, \tag{1}$$

где A – технологический уровень, являющийся константой; $b_L(t)$ – в трактовке Лукаса доля времени, которое рабочий уделяет производственному процессу; $h(t)$ – удельный уровень человеческого капитала; $h_a(t)^{\xi}$ – внешний эффект от человеческого капитала. Второй, образовательный сектор, отвечающий за накопление человеческого капитала, представлен в виде

$$\dot{h}(t) = h(t)^{\zeta} G\left(1 - b_L(t)\right), \tag{2}$$

где $1 - b_L(t)$ – свободное время, которое работник использует на накопление человеческого капитала; функция $G\left(1 - b_L(t)\right)$ имеет линейный вид, а параметр ζ отражает степень влияния существующего накопленного человеческого капитала на его приращение. В дальнейшем своем анализе Лукас принимает $\zeta = 1$. Как и Узава, далее он рассматривает динамику данной системы с использованием теории оптимального управления.

С тех пор данная модель не раз использовалась исследователями для анализа и эмпирической оценки влияния человеческого капитала на развитие экономической системы. Рассмотрим некоторые из работ. В статье [3] на основе эндогенных моделей автор анализирует влияние налоговой политики на долгосрочные темпы экономического роста. Опираясь в том числе на описанную выше Лукасом модель, он пытается в определенной степени ее обобщить и включает в образовательный сектор (2) долю физического капитала, таким образом, образовательный сектор модели Узавы – Лукаса становится частным случаем модели Ребело. В то же время в производственной функции (1) он не рассматривает внешний эффект $h_a(t)^{\xi}$. В результате своего исследования он приходит к заключению об обратной зависимости между налогом на доход и темпами экономического роста. Вопросы налогообложения в рамках модели Узавы – Лукаса рассматриваются также в работах [4; 5]. В работе [6] авторы более детально рассматривают динамику модели Узавы – Лукаса и ее сбалансированную траекторию. Они анализируют область значений параметров данной модели, принадлежность к которым приводит к положительным темпам экономического роста. Анализ сбалансированной траектории, переходной динамики и параметров модели также можно найти в работах [7–10] и др. Двухсекторная модель Узавы – Лукаса является сегодня неотъемлемой частью монографий, посвященных теоретическим концепциям экономического роста. Мы видим ее анализ в работах Р. Бэрро и К. Сала-и-Мартина [11], Д. Асемоглу [12], а также в монографиях [13–15] и др. Следует выделить монографию [16], которая полностью посвящена анализу данной модели.

Ввиду того, что в данной статье предлагается модификация макромодели с отражением природных ресурсов, то необходимо упомянуть и некоторые из работ, где природные ресурсы рассматривались как один из факторов в моделях экономического роста. Это, например, [17], где авторы в качестве природных ресурсов рассматривают удельный выпуск нефтяной отрасли, удельную нефтяную ренту и удельные резервы нефти и в каждом случае происходит оценка производственной функции. В работах [18–21] рассматривается влияние природных ресурсов на развитие экономической системы в рамках определенных макромоделей.

Модель

Модифицируем двухсекторную модель Узавы – Лукаса, включив в нее влияние природных ресурсов на экономическую систему. Для определения оптимальной траектории развития системы необходимо использование методов теории оптимального управления с целью максимизации функции полезности при соответствующих ограничениях. Именно максимальная получаемая индивидом полезность является наиболее предпочтительным вариантом развития экономической системы.

Рассмотрим двухсекторную модель экономического роста следующего вида:

$$Y(t)=A(t)K(t)^{\alpha}S(t)^{\beta}\left[b(t)H(t)\right]^{1-\alpha-\beta}, \tag{3}$$

$$\dot{H}(t)=H(t)z\big(1-b(t)\big)-\delta_H H(t), \tag{4}$$

где $Y(t)$ – валовой внутренний продукт; $A(t)$ – общий уровень технологического развития; $S(t)$ – природные ресурсы; $H(t)$ – объем накопленного человеческого капитала; δ_H – уровень амортизации человеческого капитала; $b(t)$ – доля человеческого капитала, занятого в производстве; z – коэффициент эффективности накопления человеческого капитала.

Объем накопленного человеческого капитала можно представить в виде произведения трудовых ресурсов и удельного накопленного человеческого капитала, соответственно (3) и (4) можно представить в следующем виде:

$$y=Ak^{\alpha}s^{\beta}\left(bh\right)^{1-\alpha-\beta}, \tag{5}$$

$$\dot{h}=hz\big(1-b\big)-\delta_H h, \tag{6}$$

где y, k, s и h представляют собой удельные величины ВВП, основного капитала, природных ресурсов и накопленного человеческого капитала соответственно.

Получаемая агентами полезность от потребления задана в следующей форме:

$$u(c)=\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}, \tag{7}$$

где θ – коэффициент относительной несклонности к риску Эрроу – Пратта, который определяется как

$$-\frac{u''(c)c}{u'(c)}=\theta,$$

следовательно, эластичность межвременного замещения также будет величиной постоянной, которая равна $1/\theta$.

Агенты в экономике максимизируют приведенный поток получаемой полезности (7) согласно

$$\max\int_0^{\infty}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}e^{-\rho t}dt, \tag{8}$$

где ρ – норма временнóго предпочтения.

Для решения задачи максимизации получаемой полезности рассмотрим сначала ситуацию, когда решения принимаются централизованно, т. е. в данном случае оптимизацией занимается некий социальный планировщик (*Social Planner*), который действует в интересах агентов экономической системы и пытается максимизировать их полезность. Опишем далее данную задачу оптимизации.

Продукция первого сектора может быть использована на потребление, инвестиции в основной капитал и на инвестиции в разработку новых природных ресурсов. Таким образом, ограничение примет вид

$$c+i_K+i_S=y=Ak^{\alpha}s^{\beta}\left(bh\right)^{1-\alpha-\beta}, \tag{9}$$

где c – удельное потребление; i_K – удельные инвестиции в основной капитал; i_S – удельные инвестиции в природные ресурсы.

Динамика основного капитала и природных ресурсов описывается следующим образом:

$$\dot{k} = i_K - \delta_K k , \tag{10}$$

$$\dot{s} = \eta i_S^{\gamma} - \delta_S s , \tag{11}$$

где δ_K – норма выбытия основного капитала; δ_S – норма использования природных ресурсов; γ и η – параметры, отражающие доступность и возможность освоения новых природных ресурсов в экономике.

Для решения задачи оптимизации, используя (6), (8)–(11), запишем гамильтониан, который примет вид

$$H^p = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1\left[Ak^{\alpha}s^{\beta}\left(bh\right)^{1-\alpha-\beta} - c - i_S - \delta_K k\right] + \lambda_2\left[hz\left(1-b\right) - \delta_H h\right] + \lambda_3\left(\eta i_S^{\gamma} - \delta_S s\right), \tag{12}$$

где H^p означает, что в данном случае мы решаем задачу планировщика, а λ_1, λ_2 и λ_3 есть неявные цены изменения переменных состояния, которыми в данном случае являются k, h и s, т. е. содержательно это означает изменение полезности в момент времени t, которое произойдет в результате изменения переменных состояния также в момент времени t. Переменными управления в данном случае являются c, b и i_S.

Условиями максимизации будут следующие равенства:

$$\begin{gathered} H_c^p = 0,\ H_b^p = 0,\ H_{i_S}^p = 0; \\ \dot{\lambda}_1 = \rho\lambda_1 - H_k^p; \\ \dot{\lambda}_2 = \rho\lambda_2 - H_h^p; \\ \dot{\lambda}_3 = \rho\lambda_3 - H_s^p, \end{gathered} \tag{13}$$

где H_j^p есть частная производная по j. Исходя из (12) при условиях (13), мы получим следующие тождества:

$$c^{-\theta} - \lambda_1 = 0; \tag{14}$$

$$\lambda_1\left(1-\alpha-\beta\right)\frac{y}{b} - \lambda_2 hz = 0; \tag{15}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3\gamma\eta i_S^{\gamma-1} = 0; \tag{16}$$

$$\dot{\lambda}_1 = \rho\lambda_1 - \lambda_1\left(\alpha\frac{y}{k} - \delta_K\right); \tag{17}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \rho\lambda_2 - \lambda_1\left(1-\alpha-\beta\right)\frac{y}{h} - \lambda_2\left[z\left(1-b\right) - \delta_H\right]; \tag{18}$$

$$\dot{\lambda}_3 = \rho\lambda_3 - \lambda_1\beta\frac{y}{s} + \lambda_3\delta_S. \tag{19}$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{gathered} \lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}\lambda_1(t)k(t)\right] = 0, \\ \lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}\lambda_2(t)h(t)\right] = 0, \\ \lim_{t\to\infty}\left[e^{-\rho t}\lambda_3(t)s(t)\right] = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Проанализируем теперь децентрализованное принятие решений, т. е. когда агенты в экономике самостоятельно максимизируют полученную полезность. Бюджетное ограничение репрезентативного агента выглядит следующим образом:

$$c + i_K + i_S = w\left(bh\right) + rk + qs ,$$

где w – ставка заработной платы; r – рентная цена капитала; q – рентная цена природных ресурсов. Динамика капитала и невозобновляемых ресурсов имеет аналогичный вид (10) и (11). Для максимизации полезности (8) определим гамильтониан:

$$H^d = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} + \lambda_1\left[w(bh) + rk + qs - c - i_S - \delta_K k\right] +$$
$$+ \lambda_2\left[hz(1-b) - \delta_H h\right] + \lambda_3\left(\eta i_S^{\gamma} - \delta_S s\right),$$

где H^d означает, что в данном случае мы решаем децентрализованную задачу. Переменные состояния и управления те же, что и в случае централизованного принятия решений. Исходя из условий максимизации (13), получим следующие тождества:

$$c^{-\theta} - \lambda_1 = 0; \tag{21}$$

$$\lambda_1 wh - \lambda_2 hz = 0; \tag{22}$$

$$-\lambda_1 + \lambda_3\gamma\eta i_S^{\gamma-1} = 0; \tag{23}$$

$$\dot{\lambda}_1 = \rho\lambda_1 - \lambda_1(r - \delta_K); \tag{24}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \rho\lambda_2 - \lambda_1 wb - \lambda_2\left[z(1-b) - \delta_H\right]; \tag{25}$$

$$\dot{\lambda}_3 = \rho\lambda_3 - \lambda_1 q + \lambda_3\delta_S. \tag{26}$$

Условия трансверсальности аналогичны (20).

Как известно, условиями максимизации прибыли для фирмы на конкурентном рынке являются равенство предельной производительности фактора производства и его цены. Таким образом, ставка оплаты труда и рентные цены можно определить следующим образом:

$$\begin{gathered} r = y_k = \alpha\frac{y}{k}; \\ q = y_s = \beta\frac{y}{s}; \\ w = y_{bh} = (1-\alpha-\beta)\frac{y}{bh}, \end{gathered} \tag{27}$$

где y_i – частная производная производственной функции по определенному фактору производства. Подставив (27) в (21)–(26), мы получим тождества, идентичные выражениям (14)–(19). Таким образом, мы видим, что условия оптимальности для централизованного решения в нашем случае абсолютно идентичны условиям оптимальности при децентрализованном принятии решений. Естественно предположить, что так бывает далеко не всегда. Допустим, если бы в модели учитывался фактор внешнего влияния от человеческого капитала $h_a(t)^{\xi}$, который изначально присутствует у Лукаса, то условия были бы различными, что можно объяснить тем, что данный внешний фактор не учитывался бы при децентрализованном принятии решений. Данная ситуация, но с отсутствием природных ресурсов, достаточно подробно описана в [16].

Условия (13) являются необходимыми, но не достаточными. Достаточное условие оптимальности рассмотрено в приложении А.

Проанализируем динамику макроэкономических переменных на траектории сбалансированного роста (ТСР). На ТСР темпы роста y, k, s, h, c, i_K и i_S – константы.

Из (10) мы можем получить выражение для темпа прироста капитала (g_k), который составит

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{i_K}{k} - \delta_K.$$

Учитывая, что δ_K – константа, и то, что на ТСР темп роста капитала – величина постоянная, можно сделать вывод, что отношение инвестиций в основной капитал к основному капиталу есть величина постоянная на ТСР, т. е. темп роста инвестиций в основной капитал равен темпу роста основного капитала.

Прологарифмировав и продифференцировав (14), мы получим темп прироста потребления (g_c):

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = -\frac{1}{\theta}\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1}. \tag{28}$$

Используя (28) и (17), получим

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\rho}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\cdot\frac{y}{k} - \frac{\delta_K}{\theta}.$$

Учитывая, что параметры ρ, θ, α и δ_K – константы, а темп прироста удельного потребления – величина постоянная на ТСР, то отношение выпуска к капиталу на ТСР должно быть постоянным, а это означает, что на ТСР темп роста выпуска равняется темпу роста основного капитала. Прологарифмировав и продифференцировав (16), получим темп прироста инвестиций в природные ресурсы (g_{i_S}):

$$g_{i_S} = \frac{\dot{i}_S}{i_S} = \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3}\right). \tag{29}$$

Так как из (28) темп прироста λ_1 на ТСР – константа (поскольку темп прироста потребления является постоянной величиной на ТСР) и на ТСР темп роста инвестиций в природные ресурсы также константа, то исходя из (29) можно сделать вывод, что темп прироста λ_3 также является величиной постоянной на ТСР.

Используя тождества (16) и (19), мы получим

$$i_s^{\gamma-1} = \frac{\left(\rho + \delta_S - \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3}\right)s}{\beta y \gamma \eta}. \tag{30}$$

Прологарифмировав и продифференцировав (30) и учитывая, что темп прироста λ_3 является величиной постоянной на ТСР, получим следующее тождество:

$$(\gamma-1)\frac{\dot{i}_S}{i_S} = \frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{y}}{y}. \tag{31}$$

Исходя из (11), мы получим выражение для темпа прироста природных ресурсов (g_s):

$$g_s = \frac{\dot{s}}{s} = \frac{\eta i_S^{\gamma}}{s} - \delta_S. \tag{32}$$

Так как темп роста природных ресурсов на ТСР – константа, то, исходя из (32), темп прироста функции инвестиций $f(i) = i_S^{\gamma}$ должен равняться темпу прироста природных ресурсов:

$$\frac{\dot{f}(i)}{f(i)} = \frac{\gamma i_S^{\gamma-1}\cdot \dot{i}_S}{i_S^{\gamma}} = \gamma\frac{\dot{i}_S}{i_S} = \frac{\dot{s}}{s}. \tag{33}$$

Из (31) и (33) мы получим, что на ТСР темп прироста инвестиций в природные ресурсы равняется темпу прироста выпуска и, как следствие, темпу прироста капитала. Используя (9) и (10), получим тождество для темпа прироста капитала:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{y}{k} - \frac{c}{k} - \frac{i_S}{k} - \delta_K.$$

Так как выше уже было доказано, что на ТСР темп прироста выпуска равен темпу прироста основного капитала и темпу прироста инвестиций в природные ресурсы и что темп прироста основного капитала на ТСР – константа, мы может утверждать, что отношение потребления к основному капиталу является величиной постоянной на ТСР, т. е. темп роста потребления равен темпу роста основного капитала.

Прологарифмировав и продифференцировав производственную функцию (5), учитывая, что на ТСР доля человеческого капитала, задействованного в производственном секторе, является константой (доказательство данного утверждения представлено в приложении Б), мы получим тождество для темпа прироста выпуска:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + \beta\frac{\dot{s}}{s} + (1-\alpha-\beta)\frac{\dot{h}}{h}.$$

Учитывая соотношение темпов прироста инвестиций в природные ресурсы и темпов прироста самих природных ресурсов, а также доказанное нами равенство на ТСР темпов прироста выпуска, капитала и инвестиций в природные ресурсы, определим темп прироста человеческого капитала, который составит (g_h):

$$g_h = \frac{\dot{h}}{h} = \psi \cdot \frac{\dot{y}}{y},$$

где $\psi = \left(\frac{1-\alpha-\beta\gamma}{1-\alpha-\beta}\right)$.

Учитывая, что величина $\gamma < 1$ (если мы предполагаем убывающую предельную отдачу от инвестиций), можно сделать вывод, что темп прироста человеческого капитала на ТСР несколько выше темпа роста выпуска. Темп прироста человеческого капитала в абсолютном выражении исходя из (6) составит

$$\frac{\dot{h}}{h} = z(1-b) - \delta_H.$$

Таким образом, соотношение темпов прироста основных макроэкономических показателей и их абсолютные значения будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{i}_K}{i_K} = \frac{\dot{i}_S}{i_S} = \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{s}}{s} = \frac{1}{\psi}\frac{\dot{h}}{h} = \frac{\left[z(1-b)-\delta_H\right]}{\psi}, \tag{34}$$

или эквивалентно, приняв g за темы роста выпуска на ТСР, получим:

$$g = g_y = g_c = g_{i_K} = g_{i_S} = \frac{g_s}{\gamma} = \frac{g_h}{\psi} = \frac{\left[z(1-b)-\delta_H\right]}{\psi}.$$

На сбалансированной траектории мы можем ввести следующую переменную:

$$\tilde{x} = \frac{x}{e^{g_x t}}, \tag{35}$$

где x – любая из макроэкономических переменных. Подобный подход мы можем увидеть, например, в [17]. В таком случае производственную функцию (5) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{y} = A\tilde{k}^{\alpha}\tilde{s}^{\beta}\left(\tilde{b}\tilde{h}\right)^{1-\alpha-\beta}. \tag{36}$$

Так как $g_b = 0$, то (36) запишется в виде

$$\tilde{y} = A\tilde{k}^{\alpha}\tilde{s}^{\beta}\left(b\tilde{h}\right)^{1-\alpha-\beta}. \tag{37}$$

Используя (35) и (10), получим

$$\tilde{k} = \frac{i_K}{(\delta_K + g)e^{gt}}. \tag{38}$$

Подставив (38) в (37), прологарифмируем производственную функцию и получим

$$\ln\tilde{y} = \ln A + \alpha\left[\ln i_K - \ln(\delta_K + g) - gt\right] + \beta\ln\tilde{s} +$$
$$(1-\alpha-\beta)\left(\ln b + \ln\tilde{h}\right).$$

Используя (35), получим

$$\ln y = \ln A - \alpha\ln(\delta_K + g) + (1-\alpha-\beta)\ln b + \alpha\ln i_K + \beta\ln s + (1-\alpha-\beta)\ln h. \tag{39}$$

Итак, переходя к темпам прироста, мы получим из (39) следующее выражение для темпа прироста удельного выпуска на сбалансированной траектории:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{i}_K}{i_K} + \beta \frac{\dot{s}}{s} + (1 - \alpha - \beta) \frac{\dot{h}}{h}.$$

Данное выражение соответствует полученному ранее равенству темпов прироста капитала и инвестиций в основной капитал. Переход к темпам прироста инвестиций в основной капитал был сделан с целью более удобной возможной эмпирической оценки данной модели, поскольку далеко не все страны ведут учет динамики основного капитала, а использование метода непрерывной инвентаризации (*perpetual inventory method*) или иного подхода к определению динамики основного капитала может в определенной степени исказить полученные оценки.

Результаты

Результатом описанных в статье рассуждений стало определение темпов прироста основных макроэкономических показателей, характерных для предложенной модели. Используя выражение (Б.11), для доли человеческого капитала, задействованного в производстве на ТСР, определенной в приложении Б, а также тождество (34), получим следующие значения темпов прироста на ТСР:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{i}_K}{i_K} = \frac{\dot{i}_S}{i_S} = \frac{z - \delta_H}{\psi} - \frac{(z - \delta_H)(1-\theta)(1-\alpha-\beta) - \rho(1-\alpha-\beta\cdot\gamma)}{\psi\left[\beta(\gamma - 1 + \theta) + \theta(\alpha - 1)\right]};$$

$$\frac{\dot{s}}{s} = \frac{\gamma(z - \delta_H)}{\psi} - \frac{\gamma\left[(z - \delta_H)(1-\theta)(1-\alpha-\beta) - \rho(1-\alpha-\beta\cdot\gamma)\right]}{\psi\left[\beta(\gamma - 1 + \theta) + \theta(\alpha - 1)\right]};$$

$$\frac{\dot{h}}{h} = z - \delta_H - \frac{(z - \delta_H)(1-\theta)(1-\alpha-\beta) - \rho(1-\alpha-\beta\cdot\gamma)}{\beta(\gamma - 1 + \theta) + \theta(\alpha - 1)}.$$

Заключение

Описанная в данной статье модификация модели Узавы – Лукаса представляет интерес для анализа экономической системы, так как описывает равновесные темпы роста основных макроэкономических показателей в модели, факторами производства которой являются не только труд и капитал, но также человеческий капитал и природные ресурсы. Несомненно, это усложняет ее верификацию, так как требуется большее количество статистической информации. Тем не менее в настоящий момент описанная модель проходит эмпирическую проверку на данных по группе стран, в том числе России.

Список литературы

1. *Uzawa H.* Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth // International Economic Review. 1965. Vol. 6 (1). P. 18–31.
2. *Lucas R., Jr.* On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol. 22 (1). P. 3–42.
3. *Rebelo S.* Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth // Journal of Political Economy. 1991. Vol. 99 (3). P. 500–521.
4. *Gorostiaga A., Hromcova J., García M. A. L.* Optimal Taxation in the Uzawa – Lucas Model with Externality in Human Capital / Instituto Valenciano de Investigaciones Economicas, S. A. (Ivie), Working Papers. Serie AD. 2011. 18 p.
5. *Gomez M.* Optimal Fiscal Policy in the Uzawa – Lucas Model with Externalities // Economic Theory. 2003. Vol. 22 (4). P. 917–925.

6. *Benhabib J., Perli R.* Uniqueness and Indeterminacy: Transitional Dynamics in a Model of Endogenous Growth / C.V. Starr Center for Applied Economics. New York University, 1993. 27 p.

7. *Bethmann D.* The Open-Loop Solution of the Uzawa – Lucas Model of Endogenous Growth with *N* Agents // Journal of Macroeconomics. 2008. Vol. 30 (1). P. 396–414.

8. *Gomez M.* Equilibrium Efficiency in the Uzawa – Lucas Model with Sector-Specific Externalities // Economics Bulletin. 2006. Vol. 8 (3). P. 1–8.

9. *Xie D.* Divergence in Economic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equilibria // Journal of Economic Theory. 1994. Vol. 63 (1). P. 97–112.

10. *Mulligan C. B., Sala-i-Martin X.* Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1993. Vol. 108 (3). P. 739–773.

11. *Barro R. J., Sala-i-Martin X.* Economic Growth. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2004. xvi, 654 p.

12. *Acemoglu D.* Introduction to Modern Economic Growth. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009. xviii, 990 p.

13. *Aghion P., Howitt P.* Endogenous Growth Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1998. xiii, 694 p.

14. *Savvides A., Stengos T.* Human Capital and Economic Growth. Stanford, Calif.: Stanford Economics and Finance, 2009. x, 240 p.

15. *Баранов А. О., Неустроев Д. О.* Взаимоувязка макромоделей и точечных динамических межотраслевых моделей с позиции отображения влияния инновационных процессов на развитие экономической системы // Инновационное развитие Сибири: теория, методы, эксперименты / Под ред. В. И. Суслова. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2011. Гл. 4. С. 53–64.

16. *Mattana P.* The Uzawa – Lucas Endogenous Growth Model. Aldershot; Hants; Burlington: Ashgate, 2004. xxv, 155 p.

17. *Cavalcanti T. V. V., Mohaddes K., Raissi M.* Growth, Development and Natural Resources: New Evidence Using a Heterogeneous Panel Analysis. University of Cambridge, 2009. 28 p.

18. *Groth C., Schou P.* Can Non-Renewable Resources Alleviate the Knife-Edge Character of Endogenous Growth? // Oxford Economic Papers. 2002. Vol. 54 (3). P. 386–411.

19. *Färnstrand Damsgaard E.* Exhaustible Resources, Technology Choice and Industrialization of Developing Countries. Research Institute of Industrial Economics, Working Paper Series. 2010. 31 p.

20. *Benchekroun H., Withagen C.* Global Dynamics in a Growth Model with an Exhaustible Resource. McGill University, Department of Economics, Departmental Working Papers. 2008. 28 p.

21. *Gaitan B., Roe T. L.* Natural Resource Abundance and Economic Growth in a Two Country World. DEGIT, Dynamics, Economic Growth, and International Trade, DEGIT Conference Papers. 2005. 29 p.

22. *Mangasarian O. L.* Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems // SIAM Journal on Control. 1966. Vol. 4 (1). P. 139–152.

23. *Simon C. P., Blume L.* Mathematics for economists. N. Y.: Norton, 1994. xxiv, 930 p.

24. *Arrow K. J., Kurz M.* Public investment, the rate of return, and optimal fiscal policy. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1970. xxviii, 218 p.

Приложение А

Анализ достаточного условия оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления

Для решения задачи оптимального управления необходимо убедиться в том, что гамильтониан (12) представляет собой выпуклую функцию по отношению к переменным состояния и управления. В этом заключается условие достаточности Мангасаряна [22]. Для того чтобы функция была выпуклой, необходимо, чтобы ее матрица Гессе была отрицательно полуопределена [23]. Проверка знаков главных миноров данной матрицы, которая будет иметь размерность 6×6, представляется весьма затруднительной ввиду невозможности точно определить знак ряда миноров. Поэтому воспользуемся условием достаточности Эрроу, показанным в работе [24]. Из (14)–(16) определим значения переменных управления и подставим их в гамильтониан (12). Оптимальными значениями переменных управления, максимизирующих гамильтониан, являются:

$$c = \lambda_1^{-\frac{1}{\theta}}; \tag{A.1}$$

$$b = \frac{1}{h}\left(\frac{\lambda_1(1-\alpha-\beta)Ak^{\alpha}s^{\beta}}{\lambda_2 z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}; \tag{A.2}$$

$$i_S = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3\gamma\eta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{A.3}$$

Подставив (A.1)–(A.3) в (12), получим следующее выражение для гамильтониана (назовем его $H_{\max}$):

$$\begin{aligned}H_{\max} = {} & \frac{\lambda_1^{\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}-1}{1-\theta} + \lambda_1\left[Ak^{\alpha}s^{\beta}\left(\frac{\lambda_1(1-\alpha-\beta)Ak^{\alpha}s^{\beta}}{\lambda_2 z}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} - \lambda_1^{-\frac{1}{\theta}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3\gamma\eta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} - \delta_K k\right] + \\ & + \lambda_2\left(hz\left[1-\frac{1}{h}\left(\frac{\lambda_1(1-\alpha-\beta)Ak^{\alpha}s^{\beta}}{\lambda_2 z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] - \delta_H h\right) + \lambda_3\left[\eta\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3\gamma\eta}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \delta_S s\right].\end{aligned} \tag{A.4}$$

Согласно условию достаточности Эрроу необходимо, чтобы гамильтониан (A.4) являлся выпуклой функцией относительно переменных состояния k, h и s. Таким образом, матрица Гессе будет иметь вид

$$Hess = \begin{pmatrix} H_{kk} & H_{kh} & H_{ks} \\ H_{hk} & H_{hh} & H_{hs} \\ H_{sk} & H_{sh} & H_{ss} \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Необходимо, чтобы главные миноры нечетного порядка данной матрицы были неположительны, а четного – неотрицательны. Главные миноры определены следующим образом:

$$H_{kk} = \frac{-\alpha\beta\lambda_2 z\left(\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\right)}{k^2(\alpha+\beta)^2\left(\dfrac{\lambda_2 z}{\lambda_1(1-\alpha-\beta)Ak^{\alpha}s^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} < 0 \text{ (так как } \alpha+\beta<1\text{)},$$

$$H_{hh} = 0,$$

$$H_{ss} = \frac{-\alpha\beta\lambda_2 z\left(\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\right)}{s^2(\alpha+\beta)^2\left(\dfrac{\lambda_2 z}{\lambda_1(1-\alpha-\beta)Ak^{\alpha}s^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} < 0 \text{ (так как } \alpha+\beta<1\text{)},$$

$$\begin{vmatrix} H_{kk} & H_{kh} \\ H_{hk} & H_{hh} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} H_{kk} & H_{ks} \\ H_{sk} & H_{ss} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} H_{hh} & H_{hs} \\ H_{sh} & H_{ss} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} H_{kk} & H_{kh} & H_{ks} \\ H_{hk} & H_{hh} & H_{hs} \\ H_{sk} & H_{sh} & H_{ss} \end{vmatrix} = 0 .$$

Мы видим, что матрица Гессе (А.5) отрицательно полуопределена и соответственно условие достаточности Эрроу для данной модели выполняется.

Приложение Б

Определение значения доли человеческого капитала, задействованного в производстве (b), на траектории сбалансированного роста

Для определения равновесного значения доли человеческого капитала введем следующие переменные:

$$\varphi_1 = \frac{h}{k},\ \varphi_2 = \frac{h}{s},\ \varphi_3 = \frac{c}{k},\ \varphi_4 = \frac{i_s}{k},\ \varphi_5 = \frac{\eta i_s^{\gamma}}{s} .$$

Из выражения (15) получим соотношение λ_1 / λ_2, которое будет определено следующим образом:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{hzb}{(1-\alpha-\beta)y} = \frac{z}{(1-\alpha-\beta)A}\varphi_1^{\alpha}\varphi_2^{\beta}b^{\alpha+\beta} . \tag{Б.1}$$

Используя (17), получим соотношение $\dot{\lambda}_1 / \lambda_1$:

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = \rho - \alpha\frac{y}{k} + \delta_K = \rho - \alpha A b^{1-\alpha-\beta}\varphi_1^{1-\alpha}\varphi_2^{-\beta} + \delta_K . \tag{Б.2}$$

Из (18), используя (Б.1), получим $\dot{\lambda}_2 / \lambda_2$:

$$\frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} = \rho - z + \delta_H . \tag{Б.3}$$

Взяв производную (Б.1) и используя (Б.2) и (Б.3), найдем темп прироста величины λ_1 / λ_2:

$$\frac{\dot{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} = \left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2}\right) = \frac{\frac{z}{(1-\alpha-\beta)A}\varphi_1^{\alpha}\varphi_2^{\beta}b^{\alpha+\beta}\left(\alpha\frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} + \beta\frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2} + (\alpha+\beta)\frac{\dot{b}}{b}\right)}{\frac{z}{(1-\alpha-\beta)A}\varphi_1^{\alpha}\varphi_2^{\beta}b^{\alpha+\beta}} = \left(\alpha\frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} + \beta\frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2} + (\alpha+\beta)\frac{\dot{b}}{b}\right). \tag{Б.4}$$

Используя выражения (6), (9) и (10), найдем величину $\frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1}$:

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} = \left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{k}}{k}\right) = z(1-b) - \delta_H - \frac{y}{k} + \varphi_3 + \varphi_4 + \delta_K . \tag{Б.5}$$

Используя выражения (6) и (11), найдем величину $\frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2}$:

$$\frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2} = \left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\dot{s}}{s}\right) = z(1-b) - \delta_H - \varphi_5 + \delta_S . \tag{Б.6}$$

Подставив (Б.2), (Б.3), (Б.5) и (Б.6) в тождество (Б.4) и преобразовав его, получим следующее выражение для темпа прироста доли человеческого капитала, задействованного в производстве:

$$\frac{\dot{b}}{b} = z \cdot b - \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}(\varphi_3 + \varphi_4) + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)}\varphi_5 + \chi, \qquad (Б.7)$$

где $\chi = \dfrac{(z-\delta_H)(1-\alpha-\beta) + \delta_K(1-\alpha) - \delta_S\beta}{(\alpha+\beta)}$.

Используя выражения (9), (10), (14) и (17), найдем величину $\dfrac{\dot{\varphi}_3}{\varphi_3}$:

$$\frac{\dot{\varphi}_3}{\varphi_3} = \left(\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k}\right) = \frac{y}{k}\left(\frac{\alpha-\theta}{\theta}\right) - \frac{\rho}{\theta} - \delta_K\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + \varphi_3 + \varphi_4. \qquad (Б.8)$$

Используя выражения (9)–(11) и (33), найдем величину $\dfrac{\dot{\varphi}_4}{\varphi_4}$:

$$\frac{\dot{\varphi}_4}{\varphi_4} = \left(\frac{\dot{i}_S}{i_s} - \frac{\dot{k}}{k}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\varphi_5}{\gamma} - \frac{\delta_S}{\gamma} - \frac{y}{k} + \varphi_3 + \varphi_4 + \delta_K. \qquad (Б.9)$$

Используя полученное на сбалансированной траектории равенство $\dfrac{\dot{h}}{h} = \psi\dfrac{\dot{k}}{k}$, получим

$$z(1-b) - \delta_H - \psi\left(\frac{y}{k} - \varphi_3 - \varphi_4 - \delta_K\right) = 0. \qquad (Б.10)$$

Используя выражения (Б.7)–(Б.10) и учитывая, что на ТСР $\dot{b}$, $\dot{\varphi}_3$ и $\dot{\varphi}_4$ равны нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z \cdot b - \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}(\varphi_3 + \varphi_4) + \dfrac{\beta}{(\alpha+\beta)}\varphi_5 + \chi = 0 \\ \dfrac{y}{k}\left(\dfrac{\alpha-\theta}{\theta}\right) - \dfrac{\rho}{\theta} - \delta_K\left(\dfrac{1}{\theta} - 1\right) + (\varphi_3 + \varphi_4) = 0 \\ \dfrac{\varphi_5}{\gamma} - \dfrac{\delta_S}{\gamma} - \dfrac{y}{k} + (\varphi_3 + \varphi_4) + \delta_K = 0 \\ z(1-b) - \delta_H - \psi\left[\dfrac{y}{k} - (\varphi_3 + \varphi_4) - \delta_K\right] = 0 \end{cases},$$

решив которую относительно b, $\varphi_3 + \varphi_4$, φ_5 и $\dfrac{y}{k}$, получим следующие значения:

$$b^* = \frac{(z-\delta_H)(1-\theta)(1-\alpha-\beta) - \rho(1-\alpha-\beta\cdot\gamma)}{z\left[\beta(\gamma-1+\theta) + \theta(\alpha-1)\right]}, \qquad (Б.11)$$

$$(\varphi_3 + \varphi_4)^* = \frac{\alpha^2(\rho + \delta_H - z - \theta\cdot\delta_K) + \rho\left[\beta(\alpha+\gamma-1) - \alpha\right] + \delta_K\left[\beta(\alpha-1)(1-\gamma-\theta) - \theta(1-2\alpha)\right]}{\alpha\left[\theta(\alpha+\beta-1) - \beta(1-\gamma)\right]} +$$

$$+ \frac{\delta_H\left[\theta(1-\alpha-\beta) - \alpha(1-\beta)\right] + z\left[(1-\beta)(\alpha-\theta) + \alpha\cdot\theta\right]}{\alpha\left[\theta(\alpha+\beta-1) - \beta(1-\gamma)\right]}$$

$$\varphi_5^* = \frac{\gamma(\delta_H - z + \rho)(1-\alpha-\beta) + \delta_S\left[\theta(\beta+\alpha-1) - \beta(1-\gamma)\right]}{\beta(\gamma-1+\theta) - \theta(1-\alpha)},$$

$$\left(\frac{y}{k}\right)^* = \frac{\theta(1-\alpha-\beta)(\delta_H - \delta_K - z) + \beta(\gamma-1)(\delta_K + \rho)}{\alpha\left[\theta(\alpha-1) - \beta(1-\theta-\gamma)\right]}.$$

В данном случае мы видим, что значение доли человеческого капитала, задействованного в производстве на ТСР (b^*), выражено исключительно через константы модели и, следовательно, представляет собой величину постоянную.

Материал поступил в редколлегию 29.05.2012

D. O. Neustroev

UZAWA – LUCAS GROWTH MODEL WITH NATURAL RESOURCES

This article offers a modification of the Uzawa – Lucas growth model. The model includes natural resources as a factor of production. The necessary and sufficient optimal growth conditions for this model were considered. Growth rates of the main macroeconomic indicators along balanced growth path were derived.

Keywords: Uzawa – Lucas model, human capital, natural resources.