УДК 519, 213, 512.64

**Л. Я. Савельев**

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: savelev@math.nsc.ru

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ (НАПРАВЛЕННОСТИ)

В статье излагаются элементы теории пределов для числовых функций на направленных множествах (направленностей). Рассчитано на начинающих изучение математического анализа. Основным для данной теории является понятие *бесконечно малой*. В статье много подробно разобранных примеров. Простые примеры перед общими определениями и утверждениями обосновывают и позволяют лучше понять их, а следующие за ними более сложные примеры закрепляют это понимание.

*Ключевые слова*: функция, направление, направленность, бесконечно малая, сходимость, предел, сумма, суммируемость.

Понятие предела – одно из основных понятий математического анализа. С элементов более или менее общей теории пределов начинается большинство курсов лекций по математическому анализу. Поэтому целесообразно излагать элементы теории пределов в школах и классах, где предусмотрено углубленное изучение математики. Можно посвящать теории пределов специальные курсы.

В соответствии с универсальным принципом приближения сложного более простым понятие предела реализует идею локального приближения данной функции постоянной – простейшей из функций. В теории пределов выделяются три основных метода: аналитический, алгебраический и геометрический. Аналитический метод использует понятие *бесконечно малой*. Алгебраический – понятие *фильтра*. Геометрический – понятие *окрестности*. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки. Выберем аналитический метод. Его использовал Леонард Эйлер в своем классическом курсе, оказавшем огромное влияние на развитие математического анализа. Будем по классическому принципу «Примеры важнее правил!», провозглашенному Исааком Ньютоном, стараться подготавливать и подкреплять теорию содержательными примерами.

Статья продолжает написанные автором в 2010–2011 гг., посвященные последовательностям и рядам [Савельев, 2010а, б; 2011а, б]. В ней излагаются элементы более общей теории пределов направленностей и сумм семейств. Естественная простота понятия направления дает возможность хорошо усваивать содержание теории. Общая точка зрения на предел кратко излагается в дополнении к фундаментальному курсу математического анализа Г. М. Фихтенгольца [1970]. Направленностям посвящена глава книги Дж. Л. Келли [1968]. Впервые теория пределов функций на направленных множествах была подробно описана в книге С. О. Шатуновского, составленной по конспектам его лекций в Одесском университете, и статье Е. Н. Мура, Х. Л. Смита [Moore, Smith, 1922].

Как пример применения общей теории предела кратко описывается задача о суммировании значений функции, обобщающая задачу о суммировании последовательности.

## 1. Направленные множества и направленности

Направленным множеством называется множество с некоторым специальным порядком. Направленностью называется функция на направленном множестве. Каждая последовательность есть направленность, определенная на множестве натуральных чисел со стандартным порядком. Теория пределов для направленностей очень похожа на теорию пределов для последовательностей и является ее естественным обобщением.

**1.1.** ***Направленные множества***. Так называются множества со специальными порядками.

**1.1.1.** ***Определение направления.*** Предлагаемые определения формализуют интуитивно ясные представления о порядке и не нуждаются в особых пояснениях. Вводится удобный математический язык.

Условимся порядком для множества $X$ называть всякое рефлексивное и транзитивное отношение для $X$.

Будем использовать обозначение $\square$ и термин *следует*: запись $y \square x$ для элементов $x$, $y$ множества $X$ означает, что $y$ следует за $x$. Будем также говорить, что *$x$ предшествует $y$* и писать $x \square y$. Порядок $\square$ служит обратным для $\square$. Когда $y \square x$ и $y \neq x$, будем писать $y \square x$ и говорить, что *$y$ строго следует* за $x$. Будем также говорить, что *$x$ строго предшествует $y$* и писать $x \square y$. Часто удобнее рассматривать такие строгие порядки. Отрицание, как всегда, записывается перечеркиванием.

*Рефлексивность* порядка означает, что $x \square x$ для каждого $x \in X$ : каждый элемент следует за самим собой. *Транзитивность* порядка означает, что для каждых $x$, $y$, $z \in X$ из $z \square y$ и $y \square x$ вытекает $z \square x$: если $z$ следует за $y$ и $y$ следует за $x$, то $z$ следует за $x$. Строгие порядки тоже транзитивны. Подчеркнем, что порядок может быть определен не для всех пар элементов множества $X$. Элементы $x$, $y \in X$ , для которых $y \square x$ или $x \square y$, называются *сравнимыми*. Порядок, при котором каждые два элемента множества $X$ сравнимы, называется *линейным* или *полным*. Остальные порядки называются *частичными*.

Множество $X$ и порядок $\square$ для него образуют *упорядоченное множество* $(X, \square)$.

***Замечание***. Знаменитая теорема Цермело утверждает, что для каждого множества существует линейный порядок. Но она не указывает способ линейного упорядочивания произвольного множества и поэтому используется только в теоретических рассуждениях.

Среди порядков для множества $X$ выделяются антисимметричные, при которых для каждых $x, y \in X$ из $y \square x$ и $x \square y$ вытекает $x = y$. При линейном антисимметричном порядке имеет место *трихотомия*: $y \succ x$ либо $x = y$, либо $x \succ y$. Обычно антисимметричность включается в определение порядка, а общие рефлексивные и транзитивные отношения называются *предпорядками*. Мы не будем использовать этот термин и, как правило, не будем требовать от порядка антисимметричности.

Назовем *направлением* в множестве $X$ порядок для $X$, обладающий свойством: для каждых элементов $x, y \in X$ существует следующий за ними элемент $z \in X : z \square x$ и $z \square y$. Заметим, что каждый линейный порядок является направлением: один из любых двух элементов следует за другим. Если существует элемент $z \in X$, следующий за всеми элементами $x \in X$, то направление называется *вырожденным*. Как правило, будут рассматриваться *невырожденные* направления, представляющие основной интерес для теории пределов.

Множество $X$ и направление $\square$ для него образуют *направленное множество* $(X, \square)$.

**1.1.2.** ***Примеры направленных множеств.*** Рассмотрим несколько примеров направленных множеств, встречающихся в математическом анализе.

**Пример 1**. Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с порядком $\square$. Он определяет направление для $\mathbb{N}$, которое обозначается $n \to \infty$. Направление $n \to \infty$ линейное. Каждые два натуральных числа $m$, $n$ сравнимы: $n \square m$ или $m \square n$. Имеет место трихотомия: $n > m$ либо $n = m$, либо $m > n$. В каждой паре различных натуральных чисел следующим считается то число, которое больше. Так как в множестве $\mathbb{N}$ нет наибольшего элемента, то направление $n \to \infty$ невырожденное.

**Пример 2.** Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с порядком $\square$. Он определяет направление для $\mathbb{R}$ *по возрастанию*, которое обозначается $x \to \infty$. Направление $x \to \infty$ линейное. Каждые два вещественных числа $x, y$ сравнимы: $y \square x$ или $x \square y$. Имеет место трихотомия: $y > x$ либо $y = x$, либо $x > y$. В каждой паре различных вещественных чисел следующим считается то число, которое *больше*. Так как в множестве $\mathbb{R}$ нет наибольшего элемента, то направление $x \to \infty$ невырожденное.

Противоположный порядок $\square$ определяет противоположное направление для $\mathbb{R}$ *по убыванию*, которое обозначается $x \to -\infty$. По этому направлению в каждой паре различных вещественных чисел следующим считается то число, которое *меньше*. Направление $x \to -\infty$ линейное и, так как в множестве $\mathbb{R}$ нет наименьшего элемента, невырожденное.

Добавление наименьшего элемента $-\infty$ и наибольшего $+\infty$ превращает $(R, \square)$ в *расширенную* вещественную прямую

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

с порядком $\square$. Направление $x \to +\infty$ в множестве $\overline{\mathbb{R}}$ остается линейным, но становится вырожденным. То же самое верно и для противоположного направления $x \to -\infty$.

Алгебраические действия для $\overline{\mathbb{R}}$ определяться не будут.

**Пример 3.** Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $y \square x$ означает $|y-a| \le |x-a|$: следующим считается число, которое *ближе* к выбранному. Это направление в $\mathbb{R}$ обозначается $x \to a$. Чтобы сделать его невырожденным, выбранную точку $a$ исключают и рассматривают множество $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. В этом случае пишут $x \to a$, $x \ne a$. Как правило, рассматривается именно это направление и для упрощения записей условие $x \ne a$ явно не выписывается. Порядок $\square$, определяющий направление $x \to a$, не антисимметричен: из $|y-a| \le |x-a|$ и $|x-a| \le |y-a|$ (эквивалентно $|y-a| = |x-a|$) не следует, что $y = x$. Равенство $|y-a| = |x-a|$ означает только, что $x$, $y$ одинаково близки к $a$. Геометрически направление $x \to a$ описывается семейством интервалов с центром в точке $a$: чем меньше длина интервала, тем ближе его точки к $a$.

Направление $x \to 0$ выделяется своей простотой: при нем следующим считается число *с меньшей абсолютной величиной*.

**Пример 4.** Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R} \setminus A$. Отношение $y \square x$ по-прежнему означает, что $|y-a| \le |x-a|$, но теперь рассматриваются только точки $x$, $y$ из множества $A$. Такое направление обозначается $x \to a$, $x \in A$ и описывается словами: *x стремится к a по множеству A*. Это направление можно рассматривать как направление для вещественной прямой $\mathbb{R}$ и как направление только для содержащегося в ней множества $A$. Так как по условию $a \notin A$, то направление $x \to a$, $x \in A$ невырожденное.

При $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ направление $x \to a$, $x \in A$, превращается в $x \to a$, $x \ne a$. При $A = ]-\infty, a[$ и $A = ]a, +\infty[$ получаются соответственно направления $x \to a$, $x < a$ и $x \to a$, $x > a$. Они обозначаются также $x \to a-$, $x \ne a$ и $x \to a+$, $x \ne a$. Как правило, рассматриваются именно эти направления и для упрощения записей условие $x \ne a$ явно не выписывается. Эти направления в соответствии с горизонтальным представлением вещественной прямой $\mathbb{R}$ выражаются словами: *x стремится к a слева* и *x стремится к a справа*. В соответствии с вертикальным представлением вещественной прямой $\mathbb{R}$ употребляются также обозначения $x \uparrow a$ и $x \downarrow a$ и слова: *x стремится к a снизу* и *x стремится к a сверху*.

**Пример 5.** Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Она и ее геометрия подробно описаны в статье [Савельев, 2008]. Пусть $a = a_1 + a_2 i$, $x = x_1 + x_2 i$, $y = y_1 + y_2 i \in \mathbb{C}$ ($a_1$, $a_2$, $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2 \in \mathbb{R}$). Тогда $y \square x$ означает $|y-a| \le |x-a|$, что эквивалентно

$$(y_1 - a_1)^2 + (y_2 - a_2)^2 \le (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2:$$

следующим считается число, которое *ближе* к выбранному. Это направление в $\mathbb{C}$ обозначается $x \to a$. Чтобы сделать его невырожденным, точку $a$ исключают и рассматривают множество $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. В этом случае пишут $x \to a$, $x \ne a$. Как правило, рассматривается именно это направление и для упрощения записей условие $x \ne a$ явно не выписывается. Геометрически направление $x \to a$ описывается семейством кругов с центром в точке $a$: чем меньше радиус круга, тем ближе его точки к $a$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{C} \setminus A$. Отношение $y \square x$ по-прежнему означает, что $|y-a| \le$ $\le |x-a|$, но теперь рассматриваются только точки $x$, $y$ из множества $A$. Такое направление обозначается $x \to a$, $x \in A$ и описывается словами: *x стремится к a по множеству A*. Это направление можно рассматривать как направление для комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и как направление только для содержащегося в ней множества $A$. Так как по условию $a \notin A$, то направление $x \to a$, $x \in A$ невырожденное. Выбор различных множеств $A \subseteq \mathbb{C}$ позволяет получать самые различные направления $x \to a$, $x \in A$. Например, направления по данному лучу или сектору с исключенной вершиной в точке $a$. Можно выбрать и более сложные криволинейные направления.

**1.1.3.** ***Параметризация и секвенцирование.*** В примерах 3–5 близость к точке описывалась расстоянием до нее. Рассматриваемое направление сводилось к направлению $\rho\left[x,a\right]=\left|x-a\right|\to 0$ в вещественной прямой. Эта *вещественная параметризация* очень удобна. Но не каждое направление можно так параметризовать.

Для каждого вещественного числа $\rho>0$ существует натуральное число $n$ такое, что $0<1/n<\rho$, поэтому параметризуемое направление можно описать последовательностью точек $u[n]$, для которых

$$\rho\left[u[n],a\right]<1/n\,.$$

Такое *секвенцирование* часто существенно упрощает задачу.

Пусть существует последовательность $(u[n])$ элементов направленного множества $(X,\succ)$ такая, что для каждого элемента $x\in X$ найдется номер $n_0=n_0[x]$ такой, что $u[n]\succ x$ для всех номеров $n\geq n_0$: за каждым элементом множества $X$ следует некоторый *бесконечный отрезок* (*хвост*)

$$(u[n_0],u[n_0+1],\,\ldots]$$

последовательности $(u[n])$. Тогда направленное множество $(X,\succ)$ и его направление $\succ$ называются *секвенцируемыми*. Последовательность $(u[n])$, удовлетворяющую сформулированному условию, назовем *направленной по* $\succ$. Подчеркнем, что по данному определению просто существование какого-нибудь элемента $u[n]\succ x$ недостаточно для того, чтобы последовательность $(u[n])$ была направленной.

Каждое направление, определяемое вещественным параметром, секвенцируемо. При исследовании поведения функции в секвенцируемом направлении можно эффективно использовать последовательности ее значений. Но не все направления секвенцируемы и имеют направленные последовательности.

**Примеры**. Последовательность $u[n]=n$ направлена по $x\to\infty$: для каждого вещественного числа $x$ существует натуральное число $n_0=n_0[x]\geq x$, и неравенство $n\geq x$ верно для всех $n\geq n_0$. Точно так же последовательность $u[n]=-n$ направлена по $x\to-\infty$.

Рассмотрим точку $a\in\mathbb{R}$, направление $x\to a$, $x\in a$ и бесконечно малую последовательность $\alpha[n]\to 0,\ \alpha[n]\neq 0$. Последовательность $u[n]=a+\alpha[n]$ направлена по $x\to a$, $x\neq a$. В самом деле, для каждого $x\neq a$ существует номер $n_0=n_0[x]$ такой, что $\left|u[n]-a\right|=\left|\alpha[n]\right|<\left|x-a\right|$ верно для всех $n\geq n_0$. Это значит, что $u[n]\succ x,\ n\geq n_0$ по направлению $x\to a$, $x\neq a$.

**Контрпример**. Рассмотрим класс

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}[\mathbb{R}]$$

всех конечных множеств вещественных чисел, направленный по включению $\supseteq$: множество $B$ следует за множеством $A$, если $B$ содержит $A$ ($B\succ A\Leftrightarrow B\supseteq A$). Это направление не секвенцируемо. В самом деле, предположим, что существует последовательность $(U[n])$ конечных множеств $U[n]$ вещественных чисел такая, что для каждого точечного множества $\mathcal{K}=\{x\}\subset\mathbb{R}$ найдется номер $n_0=n_0[x]$ такой, что $U[n_0]\supseteq\{x\}$. Каждое вещественное число $x$ принадлежит некоторому множеству $U[n_0]$ последовательности $(U[n])$. Значит, все множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел содержится в объединении $\bigcup\left(U[n]\right)$ множеств этой последовательности: $\mathbb{R}\subseteq\bigcup\left(U[n]\right)$. Но объединение $\bigcup\left(U[n]\right)$ последовательности конечных множеств $U[n]$ счетно, а множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел несчетно. Включение $\mathbb{R}\subseteq\bigcup\left(U[n]\right)$ невозможно. Направленное множество $(\mathcal{K}\left(\mathbb{R}\right),\supseteq)$ несеквенцируемо.

**1.1.4.** ***Двойные направления.*** Рассмотрим направленные множества $(X_1,\succ_1)$, $(X_2,\succ_2)$ и декартово произведение $X=X_1\times X_2$ множеств $X_1,X_2$, составленное из упорядоченных пар $(x_1,x_2)$ их элементов. Направленния $\succ_1,\succ_2$ определяют *совместное* или *двойное* направление $\succ=(\succ_1,\succ_2)$ для множества $X=X_1\times X_2$: $y=\left(y_1,y_2\right)\succ\left(x_1,x_2\right)=x$ означает, что $y_1\succ_1 x_1$ и $y_2\succ_2 x_2$. Пара $y=\left(y_1,y_2\right)$ следует за парой $x=\left(x_1,x_2\right)$, если элементы пары $y$ следуют за соответствующими элементами пары $x$.

Заметим, что если $y_1\succ x_1$, но $y_2\succ x_2$, то пары $y=\left(y_1,y_2\right)$ и $x=\left(x_1,x_2\right)$ несравнимы.

При совмещении произвольных направлений $□_1, □_2$ двойное направление может оказаться слишком искусственным. Обычно совмещают направления, связанные условиями задачи.

Рефлексивность и транзитивность отношения $□ = (□_1, □_2)$ вытекают из рефлексивности и транзитивности отношений $□_1, □_2$. Существование общего следующего легко проверяется. Возьмем произвольные пары $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$. По определению существуют элемент $z_1$ из $X_1$, следующий за $x_1, y_1$, и элемент $z_2$ из $X_2$, следующий за $x_2, y_2$. Из определения двойного направления вытекает, что пара $z = (z_1, z_2)$ следует за парами $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Будем снабженное двойным направлением $□ = (□_1, □_2)$ декартово произведение $X_1 \times X_2$ множеств $X_1, X_2$ с направлениями $□_1, □_2$ называть *произведением направленных множеств* $(X_1, □_1)$, $(X_2, □_2)$ и обозначать $(X_1 \times X_2, □)$. Направления $□_1, □_2$ называются *частными* или *простыми*. В общих рассуждениях все три направления $□, □_1, □_2$ часто обозначаются одинаково $□$.

**Пример 1**. Направление $\geq$ для множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел определяет двойное направление $\geq$ для множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ пар $(m, n)$ натуральных чисел: по определению $(m, n) \geq (l, k)$, если $m \geq l$ и $n \geq k$. Для простоты используется одно и то же обозначение порядка для номеров и их пар. Полученное двойное направление обозначается $m \to \infty,\ n \to \infty$.

**Пример 2.** Направление $\geq$ для множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел определяет двойное направление $\geq$ для множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ пар $(x, y)$ вещественных чисел: по определению $(x, y) \geq (u, v)$, если $x \geq u$ и $y \geq v$. Для простоты используется одно и то же обозначение порядка для чисел и их пар. Полученное двойное направление обозначается $x \to \infty,\ y \to \infty$.

Отношение $(x, y) □ (u, v)$ для $x \geq u$ и $y \leq v$ определяет двойное направление $x \to \infty,\ y \to -\infty$.

Отношение $(x, y) □ (u, v)$ для $x \leq u$ и $y \geq v$ определяет двойное направление $x \to -\infty,\ y \to \infty$.

Отношение $(x, y) \square (u, v)$ для $x \le u$ и $y \le v$ определяет двойное направление $x \to -\infty,\ y \to -\infty$.

**Пример 3.** Рассмотрим точки $a, b$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Направления $x \to a$ и $y \to b$ для прямой $\mathbb{R}$ определяют двойное направление $x \to a$, $y \to b$ для вещественной плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отношение $(x, y) \square (u, v)$ означает, что $|x-a| \le |u-a|$ и $|y-b| \le |v-b|$. Разнообразные двойные направления получаются комбинированием направлений $x \to a-$, $x \to a+$ и $y \to b-$, $y \to b+$. Можно также рассматривать двойные направления $x \to a$, $y \to \pm\infty$ и $x \to \pm\infty$, $y \to b$.

**1.2.** ***Числовые направленности.*** Так называются вещественные и комплексные функции на направленных множествах.

**1.2.1.** ***Определения и примеры.*** Рассмотрим множество $X$ и направление $\square$ для него. Выбор направления превращает любую вещественную или комплексную функцию в *числовую направленность*. Одна и та же функция может порождать различные направленности. По аналогии с обозначением $(X, \square)$ для направленного множества можно использовать обозначение $(f, \square)$ для направленности $f$ на нем. Но это обозначение не общепринято. Используются стандартные обозначения для функций, а направление подразумевается или указывается отдельно. По аналогии с последовательностью значений направленности называются ее *членами*.

**Пример 1.** Каждая последовательность является направленностью по возрастающему направлению $n \to \infty$ для множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

**Пример 2.** Каждая функция вещественной переменной $x$ является направленностью по возрастающему направлению $x \to \infty$ и направленностью по убывающему направлению $x \to -\infty$. Кроме того, она является направленностью по направлению $x \to a$ $(x \ne a)$ для каждой точки $a \in \mathbb{R}$. К ним добавляются направления $x \to a$, $x \in A$ для выбранных множеств $A \subseteq \mathbb{R}$. В частности, направления $x \to a,\ x < a$ и $x \to a,\ x > a$.

**Пример 3.** Каждая функция комплексной переменной $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ является направленностью по каждому направлению $z \to c$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определяемому близостью к выбранной точке $c = a + bi$. К ним добавляются направления $z \to c,,$ $z \in C$ для выбранных множеств $C \subseteq \mathbb{C}$. Выделяются направления $x \to a$ а $y \to b$, определяемые соответственно множествами $C = \mathbb{R} \times \{b\} = \{z = x + bi : x \in \mathbb{R}\}$ и $C = \{a\} \times \mathbb{R} = \{z = a + yi : y \in \mathbb{R}\}$. Дело сводится к вещественным переменным.

**1.2.2.** ***Бесконечно малые направленности***. Среди числовых направленностей выделяются направленности, имеющие как угодно малые значения для всех достаточно продвинутых по данному направлению аргументов.

Эти направленности служат основой для предлагаемой теории пределов.

Рассмотрим направленное множество $(X, \square)$ и числовую функцию $\alpha$ на $X$.

**Определение**. *Направленность* $\alpha$ *называется бесконечно малой, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $x_0 = x_0[\varepsilon]$ *из X такой, что неравенство* $|\alpha[x]| \le \varepsilon$ *верно для всех элементов x из X, следующих за* $x_0 = x_0[\varepsilon]$ *в данном направлении.*

Кванторная запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in X : |\alpha[x]| \le \varepsilon, \ \forall x \square x_0.$$

Если неравенство $|\alpha[x]| \le \varepsilon$ верно для всех элементов $x \square x_0$, то оно тем более верно для всех элементов $x \square x_1$ при любом более продвинутом элементе $x_1 \square x_0$. В теоретических рассуждениях важно только существование таких элементов. Иногда вместо нестрогих отношений $\le, \square$ удобнее использовать строгие $<, \square$. Определение

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in X : |\alpha[x]| < \varepsilon, \ \forall x \square x_0$$

эквивалентно данному. Можно также комбинировать нестрогие и строгие отношения, оставляя неизменным только $\varepsilon > 0$.

Будем бесконечную малость направленности $\alpha$ для большей выразительности записывать как приближенное равенство $\alpha \approx 0$ или $\alpha \to 0$ или $\alpha[x] \to 0$. Говорят, что бесконечно малая направленность $\alpha$ *стремится к нулю* по данному направлению. Направление при этом подразумевается или указывается явно ($x \to a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, …). Число 0 называют *пределом* бесконечно малой направленности. С точностью $\varepsilon > 0$ значения бесконечно малой направленности *начиная с элемента* $x_0$ можно считать равными нулю. Можно также сказать, что *с любой выбранной точностью* члены бесконечно малой направленности *начиная с некоторого элемента* равны нулю.

В прежних статьях было много примеров бесконечно малых последовательностей. Часть из них была связана с функциями. Приведем несколько простых примеров бесконечно малых направленностей.

**Пример 1**. Рассмотрим множество $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и функцию $\alpha[x] = 1/x$. Ясно, что $1/x \to 0$, $x \to \infty$: если $\varepsilon > 0$, то $|1/x| < \varepsilon$ для всех $x > x_0 = 1/\varepsilon$. Точно так $1/x \to 0$, $x \to -\infty$: если $\varepsilon > 0$, то $|1/x| = -1/x < \varepsilon$ для всех $x < x_0 = -1/\varepsilon$.

**Пример 2**. Рассмотрим степенную функцию $\alpha[x] = x^n$ с вещественным аргументом $x$ и натуральным показателем $n$. Ясно, что $x^n \to 0$, $x \to 0$: если $\varepsilon > 0$, то $|x^n| < \varepsilon$ для всех $x$ таких, что $|x| < \varepsilon^{1/n}$. Точно так же $|x - a|^n \to 0$, $x \to a$ для $a \in \mathbb{R}$: если $\varepsilon > 0$, то $|x - a|^n < \varepsilon$ для всех $x$ таких, что $|x - a| < \varepsilon^{1/n}$. По аналогии можно рассматривать степенную функцию $\alpha[z] = z^n$ с комплексным аргументом $z$ и натуральным показателем $n$.

**Пример 3**. Рассмотрим комплексное число $c = a + bi$, функцию $\alpha[z] = z^n - c^n$ с комплексным аргументом $z = x + yi$ и натуральным показателем $n$. Как легко проверить $z^n - c^n \to 0$, $z \to c$. В самом деле, производя деление $z^n - c^n$ на $z - c$ и используя неравенство треугольника, получаем при

$$|z - c| \le 1, \ |z| \le |c| + 1:$$

$$|z^n - c^n| \le |z - c| \sum_{m=0}^{n-1} |c|^{n-m-1} |z|^m \le \gamma |z - c|,$$

где $0 < \gamma \le n \ (|c| + 1)^{n-1}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta \le \varepsilon/\gamma$, $\delta \le 1$. Тогда неравенства $|z^n - c^n| \le \gamma |z - c| < \varepsilon$ верны для всех чисел $z$, для которых верно неравенство $|z - c| \le \delta$.

Значит $z^n - c^n \to 0,\ z \to c$. Разность $z^n - c^n$ бесконечно мала при $z \to c$. При $c = 0$ получаем пример 2.

**1.2.3.** ***Сравнительная бесконечная малость.*** Свойства бесконечно малых направленностей аналогичны свойствам бесконечно малых последовательностей. Но даже функции вещественной переменной гораздо сложнее вещественных последовательностей. Поэтому при перенесении свойств последовательностей на функции нужно соблюдать осторожность. Например, бесконечно малая последовательность обязательно ограничена, а бесконечно малая направленность может не быть ограниченной. В частности, не ограничены направленности в примерах 1–3 п. 1.2.2. Сформулируем простой, но важный

**Принцип сравнения с бесконечно малой**. *Пусть все члены данной направленности, начиная с некоторого, меньше по абсолютной величине соответствующих членов некоторой бесконечно малой направленности. Тогда данная направленность бесконечно мала.*

□ Рассмотрим направленное множество $(X, □)$, произвольную направленность $f$, бесконечно малую направленность $\alpha$ на $X$, число $\varepsilon > 0$. По условию существует элемент $x_1 \in X$ такой, что неравенство $|f[x]| \le |\alpha[x]|$ верно для всех элементов $x □ x_1$. Так как направленность $\alpha$ бесконечно мала, то существует элемент $x_0[\varepsilon] \in X$, при котором $|\alpha[x]| < \varepsilon$ для всех элементов $x □ x_0[\varepsilon]$. По определению направления существует элемент $x_2[\varepsilon] \in X$, следующий за $x_0[\varepsilon]$ и за $x_1$, а благодаря транзитивности из $x □ x_2[\varepsilon]$ вытекает $x □ x_1$ и $x □ x_0[\varepsilon]$. Поэтому неравенство $|f[x]| < \varepsilon$ верно для всех элементов $x □ x_2[\varepsilon]$. Значит, направленность $f$ бесконечно мала. ■

Краткая формулировка принципа сравнения с бесконечно малой:

*Пусть* $|f[x]| \le |\alpha[x]|\ (x □ x_0),\ \alpha[x] \to 0$. *Тогда* $f[x] \to 0$.

По условию для применения сформулированного принципа сравнения достаточно выполнения неравенства для всех достаточно продвинутых аргументов. Значения для них и определяют бесконечную малость. Остальные значения и соотношения между ними у сравниваемых направленностей могут быть произвольными. В частности, последовательность остается бесконечно малой при любом изменении значений для конечного множества номеров. Принцип сравнения с бесконечно малой для последовательностей часто применялся в предыдущих статьях [Савельев, 2010а, б; 2011а, б] .

Во всех примерах со сходящимися к какому-нибудь числу последовательностями $f$ их двойные дельта-последовательности $\Delta = (\Delta[m,n]),\quad \Delta[m,n] = f[m] - f[n]$ были бесконечно малы. Это свойство имеет общий характер: если последовательность сходится к некоторому числу, то ее двойная дельта-последовательность бесконечно мала. Двойная последовательность $\Delta[m,n] = f[m] - f[n]$ является направленностью на множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ пар $(m, n)$ натуральных чисел с направлением □: по определению $(m,n) \ge (1,k)$, если $m \ge 1$ и $n \ge k$.

Принцип сравнения с бесконечно малой неявно применен и в примере 3 п. 1.2.2 ($z - c \to 0$, $z \to c$).

**1.2.4.** ***Алгебра бесконечно малых***. Действия с бесконечно малыми направленноетями приводят снова к бесконечно малым направленностям. Кроме того, произведение бесконечно малой направленности на ограниченную тоже бесконечно мало.

Рассмотрим множество $X$, направление □ на нем и функции $\alpha, \beta, g$ на $X$. Неравенство $|g| \le b\quad (b \ge 0)$ означает, что $|g[x]| \le b$ для всех $x \in X$. Подчеркнем, что бесконечно малые направленности могут быть неограниченными. Действия с бесконечно малыми направленностями описывает

***Лемма об алгебре бесконечно малых***. *Пусть* $\alpha \approx 0,\ \beta \approx 0, |g| \le b$ *и* $c \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\alpha + \beta \approx 0, \alpha\beta \approx 0, \alpha g \approx 0, \alpha c \approx 0.$$

□ (1) Пусть $|\alpha[x]| < \varepsilon/2\ (x □ x_1[\varepsilon/2])$, $|\beta[x]| < \varepsilon/2\ (x □ x_2[\varepsilon/2])$. По определению направления существует элемент $x_0[\varepsilon] \in X$, следующий за $x_1[\varepsilon/2]$ и за $x_2[\varepsilon/2]$, а благодаря транзитивности из $x □ x_0[\varepsilon]$ вытекает $x □ x_1[\varepsilon/2]$ и $x □ x_2[\varepsilon/2]$. Поэтому соотношения $\alpha[x] + \beta[x] \le |\alpha[x] + \beta[x]| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ верны для всех элементов $x □ x_0[\varepsilon]$. Значит, $\alpha + \beta \approx 0$.

(2) Пусть $\left|\alpha[x]\right| < 1 \ (x \square x_1)$, $\left|\beta[x]\right| < \varepsilon$ $(x \square x_2[\varepsilon])$. Тогда $\left|\alpha[x]\,\beta[x]\right| < \varepsilon$ для всех $x \square x_0[\varepsilon]$ при некотором $x_0[\varepsilon]$, следующем за $x_1$ и $x_2[\varepsilon]$. Значит, $\alpha\beta \approx 0$.

(3) Пусть $\left|g[x]\right| \geq b,\ b > 0$ для всех $x \in X$ и $\left|\alpha[x]\right| < \varepsilon/b \ (x \square x_0[\varepsilon/b])$. Тогда

$$\left|\alpha[x]\, g[x]\right| < (\varepsilon/b)b = \varepsilon$$

для всех $x \square x_0[\varepsilon/b]$. Значит, $\alpha g \approx 0$.

(4) Пусть $g[x] = c$ для всех $x \in X$. Из доказанного в (3) следует, что $\alpha c \approx 0$. ■

***Замечание***. В условии леммы требование $\left|g[x]\right| \leq b,\ b > 0$ для всех $x \in X$ можно заменить требованием $\left|g[x]\right| \leq b,\ b > 0$ для всех $x \square x_0$ при некотором $x_0 \in X$. Ограниченность не всех, а только достаточно продвинутых в данном направлении значений часто бывает проверять проще. Требование *для всех* вместо *для всех, начиная с некоторого* введено для упрощения формулировки. Логично было бы ввести термин *ограниченность по направлению*.

Нередко бывает полезна следующая простая

**Лемма**. *Единственной бесконечно малой постоянной является нулевая направленность.*

□ Рассмотрим постоянную направленность $\alpha[x] = c,\ x \in X$ со значением $c$. Так как $\alpha \approx 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ верно неравенство $|c| < \varepsilon$. Следовательно, $c = 0$. В самом деле, если $c \neq 0$, то для $\varepsilon = |c| > 0$ соотношение $\varepsilon = |c| < \varepsilon$ невозможно. ■

Утверждение, что единственной бесконечно малой постоянной по любому направлению является *тождественный ноль* часто используется как очевидное без каких-либо ссылок.

Обобщением принципа сравнения бесконечно малых служит принцип *сжимающих* бесконечно малых. Докажем его, используя лемму об алгебре бесконечно малых. Рассмотрим множество $X$, направление □ на нем и функции $\beta,\ \gamma,\ f$ на $X$. Неравенства $\beta \leq f \leq \gamma$ означают, что $\left|\beta[x]\right| \leq \left|f[x]\right| \leq \left|\gamma[x]\right|$ для всех $x \in X$.

***Принцип сжимающих бесконечно малых***. *Пусть* $\beta \leq f \leq \gamma$ *и* $\beta \to 0$, $\gamma \to 0$. *Тогда* $f \to 0$.

□ Из условий следует, что

$$0 \leq f[x] - \beta[x] \leq \gamma[x] - \beta[x]$$

и, значит,

$$f[x] - \beta[x] = \theta[x]\ \left(\gamma[x] - \beta[x]\right),$$

$$f[x] = \beta[x] + \theta[x]\ \left(\gamma[x] - \beta[x]\right),$$

$0 \leq \theta[x] \leq 1$. По правилам действий с бесконечно малыми $f[x] \to 0$. ■

***Замечание***. Требование

$$\left|\beta[x]\right| \leq \left|f[x]\right| \leq \left|\gamma[x]\right|$$

для всех $x \in X$ можно заменить требованием $\left|\beta[x]\right| \leq \left|f[x]\right| \leq \left|\gamma[x]\right|$ для всех $x \square x_0$ при некотором $x_0 \in X$. Неравенства не для всех, а только для достаточно продвинутых в данном направлении значений часто бывает проверять проще. Требование *для всех* вместо *для всех, начиная с некоторого* введено для упрощения формулировки.

Рассмотрим множество $X$, направление □ на нем, функцию $f : X \to \mathbb{C}$, ее вещественную и мнимую части $\xi :\ X \to \mathbb{R}$ и $\eta :\ X \to \mathbb{R}$. Верна

***Лемма о малости частей***. *Числовая направленность бесконечно мала, если и только если бесконечно малы ее вещественная и мнимая части.*

□ Пусть $f = \xi + in$, $\xi = \mathrm{re} f$, $\eta = \mathrm{im} f$. Тогда $\left|\xi[x]\right|, \left|\eta[x]\right| \leq \left|f[x]\right| = \left(\xi[x]^2 + \eta[x]^2\right)^{1/2} \leq$ $\leq \left|\xi[x]\right| + \left|\eta[x]\right|$ для всех $x \in X$. Из этих неравенств и принципа сжимающих бесконечно малых сразу следует сформулированное утверждение. ■

В качестве еще одного примера применения принципа сжимающих бесконечно малых приведем формальные доказательства следующих очевидных по содержанию утверждений, которые нередко используются в рассуждениях (часто неявно). Рассмотрим вещественную функцию $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве $X$ с направлением □, ее положительную и отрицательную части $f^+$ и $f^-$, а также ее абсолютную функцию $|f|$. По определению

$f^+[x] = f[x]$ при $f[x] > 0$ и

$f^+[x] = 0$ при $f[x] \leq 0$,

$f^-[x] = -f[x]$ при $f[x] < 0$ и

$f^-[x] = 0$ при $f[x] \geq 0$, $|f|[x] = \left|f[x]\right|$.

Заметим, что

$$f^- = -f^+,\ f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-.$$

Из принципа сжимающих бесконечно малых следует, что $f^+ \to 0$, $f^- \to 0$, $|f| \to 0$, если $f \to 0$. В самом деле, $|f| \to 0$ следует из определения. А так как для всех номеров верны неравенства

$$-|f[x]| \le f^+[x],\ f^-[x] \le |f[x]|$$

для всех $x \in X$, то по принципу сжимающих бесконечно малых $f^+ \to 0$, $f^- \to 0$.

Заметим, что $f^+ \to 0$, $f^- \to 0$ при $f \to 0$ следует также из правил действий с бесконечно малыми и равенств

$$f^+ = (|f| + f)/2,\ f^- = (|f| - f)/2.$$

Из этих же правил и равенств $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ следует и обратное: $f \to 0$, $|f| \to 0$, если $f^+ \to 0$, $f^- \to 0$. Бесконечно малые направленности будут постоянно встречаться в дальнейшем.

## 2. Сходимость

**2.1.** ***Сходимость к числу***. Сходящаяся к числу направленность по определению равна сумме постоянной и бесконечно малой по данному направлению функций.

**2.1.1.** ***Определения***. Важнейший для математического анализа класс направленностей составляют функции, значения которых как угодно мало отличаются от значений некоторой постоянной для всех достаточно продвинутых в данном направлении аргументов. Ее называют *сходящейся в данном направлении*. Каждая сходящаяся направленность есть сумма *постоянной* и *бесконечно малой* направленностей. Пренебрегая бесконечно малой, члены сходящейся направленности, начиная с некоторого, можно считать постоянными.

Рассмотрим направленное множество $(X, \square)$, число $c$ и числовую функцию $f$ на $X$.

***Определение***. *Функция f сходится к числу c по направлению □, если f равна сумме постоянной со значением c и некоторой бесконечно малой по направлению □ функции.*

Другими словами, функция $f : X \to \mathbb{C}$ сходится к числу $c \in \mathbb{C}$, если существует бесконечно малая по направлению □ функция $\alpha : X \to \mathbb{C}$ такая, что для всех элементов $x \in X$ верно равенство $f[x] = c + \alpha[x]$. Используя соглашение об отождествлении постоянных функций $c$ их значениями это равенство можно записать как $f = c + \alpha$.

Число $c$, к которому сходится функция $f$, называют ее *пределом по направлению* □ и пишут $\lim_{\square} f = c$. Пишут также $f \to c$ (□) и $f \approx c$ (□). Для конкретных направлений используются общепринятые обозначения: $x \to 0$, $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, … . Направление часто не указывается явно, когда ясно, какое направление имеется в виду. В этом случае пишут $\lim f[x] = c$, $f[x] \to c$ и $f[x] \approx c$.

Из определений следует, что каждая постоянная сходится к своему значению, а каждая бесконечно малая сходится к нулю. Определение бесконечно малой направленности, которое было дано, позволяет сформулировать для сходимости к числу эквивалентное

***ε-определение***. *Функция* $f : X \to \mathbb{C}$ *сходится к числу c по направлению □, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $x_0[\varepsilon] \in X$ *такой, что неравенство* $|f[x] - c| < \varepsilon$ *верно для всех элементов* $x \,\square\, x_0[\varepsilon]$.

Это ε-определение часто используется в качестве основного. Оно означает, что *для всех достаточно продвинутых аргументов x значение* $f[x]$ *функции f произвольно мало отличается от числа c*. Эквивалентность данных определений сходимости очевидна: оба они требуют, чтобы разности $\alpha[x] = f[x] - c$ составляли бесконечно малую по данному направлению. С точностью $\varepsilon > 0$ значения сходящейся к числу $c$ направленности начиная с элемента $x_0 = x_0[\varepsilon]$ можно считать равными $c$.

Можно также сказать, что с *любой выбранной точностью* значения сходящейся к числу $c$ направленности *начиная с некоторого элемента* равны $c$. В статьях [Савельев, 2010а, б] было приведено много примеров сходимости числовых последовательностей $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и вычисления границ $n_0[\varepsilon]$ для номеров $n$.

***Замечание***. Сходимость направленности определяется только ее значениями для *достаточно продвинутых* аргументов. Остальные значения не играют никакой роли и могут быть произвольно изменены. Такие изменения часто позволяют упрощать рассуждения и выкладки. В частности, последовательность продолжает сходиться к данному числу при любом изменении ее значений для конечного множества номеров. Данные формулировки определяют предел сходящейся направленности однозначно (теорема единственности будет доказана).

**2.1.2. *Примеры.*** Приведем несколько простых примеров сходящихся направленностей, модифицируя примеры п. 1.2.2 для бесконечно малых. Проведенные там рассуждения позволяют указать и в новых примерах для каждого числа $\varepsilon > 0$ элементы $x_0[\varepsilon]$, $z_0[\varepsilon]$ такие, что для всех следующих за ними элементов $x \,\square\, x_0[\varepsilon]$, $z \,\square\, z_0[\varepsilon]$ (*достаточно продвинутых в данном направлении*) значения функций можно заменить предельными с абсолютной погрешностью не больше выбранного ε.

**Пример 1.** Рассмотрим множество $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и функцию $f[x] = 1 + 1/x$. Как было показано, $1/x \to 0$, $x \to \infty$. Следовательно, $1 + 1/x \to 1$, $x \to \infty$, ($1 + 1/x \approx 1$, $x \to \infty$). Если $\varepsilon > 0$, то $\left|(1 + 1/x) - 1\right| \le \varepsilon$ для всех $x \ge x_0 = 1/\varepsilon$. При $\varepsilon = 10^{-3}$ это неравенство верно для всех $x \ge 10^3$, т. е. $1 + 1/x$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ можно считать равным 1 при всех $x \ge 10^3$: $1 - 10^{-3} < 1 + 1/x < 1 + 10^{-3}$, $x \ge 10^3$.

Аналогично

$1 + 1/x \to 1$, $x \to -\infty$ и $1 + 1/x$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ можно считать равным 1 при всех $x \le -10^3$.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию $f[z] = 1 + z^n$ на $\mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$). Как было показано, $z^n \to 0$, $z \to 0$. Следовательно,

$$1 + z^n \to 1,\ z \to 0.$$

Точно так же $1 + (z - c)^n \to 1$, $z \to c$ для $c \in \mathbb{C}$. Если $\varepsilon > 0$, то $\left|z - c\right|^n \le \varepsilon$ для всех $z$ таких, что $\left|z - c\right| < \varepsilon^{1/n}$. Пусть $n = 2$, $c = 1$. Тогда при $\varepsilon = 10^{-4}$ неравенство

$$\left|1 + (z - c)^n - 1\right| \le 10^{-4}$$

верно для всех $z$ таких, что $\left|z - c\right| \le 10^{-2}$ (для всех $z$ внутри круга $B[c, r] \subset \mathbb{C}$ с центром $c$ и радиусом $r = 10^{-2}$), т. е. $1 + (z - c)^n$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ можно считать равным 1 при всех $z$ таких, что $\left|z - c\right| \le 10^{-2}$.

**Пример 3**. Рассмотрим комплексное число $c = a + bi$, степенную функцию $f[z] = z^n$ с комплексным аргументом $z = x + yi$ и натуральным показателем $n$. Как было показано,

$$\alpha[z] = z^n - c^n \to 0,\ z \to c.$$

Следовательно,

$$f[z] = c^n + \alpha[z],\ \alpha[z] = z^n - c^n \to 0.$$

Значит $z^n \to c^n$, $z \to c$.

Пусть $0 < \gamma \le n\left(\left|c\right| + 1\right)^{n-1}$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta \le \varepsilon/\gamma$, $\delta \le 1$. Было показано, что неравенства $\left|\left|f[z] - c^n\right| \le \gamma\left|z - c\right| < \varepsilon$ верны для всех чисел $z$, для которых верно неравенство $\left|z - c\right| \le \delta$ (для всех $z$ внутри круга $B[c, \delta] \subset \mathbb{C}$ с центром $c$ и радиусом δ), т. е. значение $f[z] = z^n$ с точностью $\varepsilon > 0$ можно считать равным $c^n$ при всех $z$ таких, что $\left|z - c\right| \le \delta$ (*достаточно близких* $c$). Пусть $n = 2$, $c = 1$ и $\varepsilon = 10^{-3}$. Тогда $\gamma = 4$ и $z^n \approx 1$ с точностью $10^{-3}$ для всех $z$ таких, что $\left|z - 1\right| \le 0{,}00025$.

***Замечание***. Рассмотрим направленное множество ($X$, □) с *вырожденным* направлением □: существует элемент $a \in X$, который следует за всеми элементами $x$ множества $X$. В этом случае $\lim_{\square} f = f[a]$ для *любой* числовой функции $f$ на $X$. Поэтому вырожденные направления в теории пределов рассматриваются редко, хотя предполагаемая невырожденность часто явно не отмечается. Например, вместо $x \to a$, $x \ne a$ обычно пишут просто $x \to a$.

**2.1.3. *Непрерывность.*** Функция, значения которой во всех точках, близких к данной, близки к ее значению в этой точке, называется *непрерывной*. График непрерывной вещественной функции вещественной переменной имеет вид непрерывной нити, без разрыва в данной точке. Непрерывные функции обладают многими важными свойствами.

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$, точку $z_0 \in \mathbb{C}$, круг

$$B[z_0, r_0] = \{z : \left|z - z_0\right| < r_0\} \subseteq \mathbb{C}$$

с центром $z_0$ и радиусом $r_0 > 0$, *окрестность* $A \supseteq B[z_0, r_0]$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и функцию $f : A \to \mathbb{C}$. Так как множество $A$ содержит круг $B[z_0, r_0]$, то для $A$ определено направление $z \to z_0$.

***Определение***. *Функция $f$ непрерывна в точке $z_0$, если* $\lim\limits_{z\to z_0,\, z\neq z_0} f[z] = f[z_0]$.

Другими словами, функция $f : A \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке $z_0 \in A$, если существует бесконечно малая при $z \to z_0$, $z \neq z_0$ функция $\alpha : A \to \mathbb{C}$ такая, что $f[z] = f[z_0] + \alpha[z]$, $z \in A$. Пишут также $f[z] \to f[z_0]$, $z \to z_0$ и $f[z] \approx f[z_0]$, $z \approx z_0$. Условие $z \neq z_0$ явно не выписывается, хотя оно существенно: без него $\lim_{z\to z_0} f[z] = f[z_0]$ для любой функции $f : A \to \mathbb{C}$.

Часто бывает полезно эквивалентное

***ε-определение***. *Функция $f : A \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке $z_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0[\varepsilon, z_0] > 0$ такое, что $|f[z] - f[z_0]| < \varepsilon$ при всех $|z - z_0| < \delta_0$.*

Другими словами, непрерывность функции в данной точке означает, что для всех точек, достаточно близких к данной, значения функции в них произвольно близки к ее значению в данной точке.

**Примеры.** Функции

$$f[x] = |x| \text{ и } g[x] = \mathrm{Sig}n[x]$$

на $\mathbb{R}$ служат классическими примерами непрерывной и разрывной функций (рис. 1).

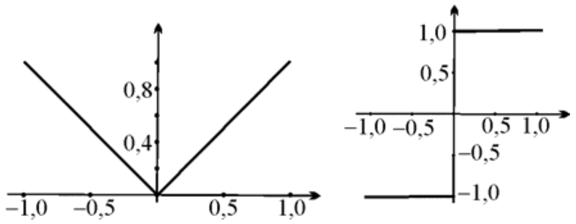


*Рис. 1*

Так как

$$f[x]/x = g[x] = -1 \text{ при } x < 0$$

$$\text{и } f[x]/x = g[x] = 1 \text{ при } x > 0,$$

то пределов $f[x]/x$ и $g[x]$ при $x \to 0$ не существует. Бесконечно малая $\alpha : A \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке ноль, если $\alpha[0] = 0$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она непрерывна на этом множестве. Непрерывную в каждой точке области определения функцию называют *всюду непрерывной* или просто *непрерывной*.

Из определений следует, что каждая постоянная непрерывна. Почти все рассматриваемые в дальнейшем функции непрерывны.

Определим также важное понятие *равномерной* непрерывности функции на множестве. Рассмотрим множество $A \subseteq \mathbb{C}$, обладающее свойством: для каждой точки $x \in A$ и числа $\delta > 0$ существует хотя бы одна точка $y \in A$, $y \neq x$ такая, что $|x - y| < \delta$. Геометрически это означает, что в каждой окрестности точки $x \in A$ есть другие точки множества $A$. Пусть функция $f : X \to \mathbb{C}$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{C}$, содержащем множество $A$.

***Определение***. *Функция $f$ равномерно непрерывна на множестве $A$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0[\varepsilon] > 0$ такое, что $|f[x] - f[y]| < \varepsilon$ при всех $x, y \in A$, для которых $|x - y| < \delta_0$.*

Другими словами, равномерная непрерывность функции означает, что для всех достаточно близких точек из данного множества ее значения в них произвольно близки. Из определений следует, что равномерная непрерывность функции на множестве влечет ее непрерывность в каждой точке этого множества. Обратное в общем случае неверно.

Сравнение данного определения равномерной непрерывности с ε-определением непрерывности в точке выявляет существенную разницу между равномерной непрерывностью и непрерывностью в каждой точке: в ε-определении $\delta_0 = \delta_0[\varepsilon, z_0]$ зависит от данной точки $z_0$, а в определении равномерной непрерывности $\delta_0 = \delta_0[\varepsilon]$ зависит только от ε. В этом и заключается равномерность.

**Примеры.** Функция $f[x] = |x|$ равномерно непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция $h[x] = x^2$ на $\mathbb{C}$ непрерывна, но не равномерно. В самом деле, $\left|x^2 - (x + \delta/2)^2\right| > x\delta = 1$ при $x = 1/\delta$. Если $x = 1/\delta$ и $y = 1/\delta + \delta/2$, то $|x - y| < \delta$, но $|h[x] - h[y]| > 1$ при любом $\delta > 0$ и неравенство определения не выполняется при $\varepsilon = 1$. Вместе с тем функция $h[x] = x^2$ непрерывна в каждой точке плоскости $\mathbb{C}$.

Хотя в общем случае из непрерывности в каждой точке не следует равномерная непрерывность функции, в некоторых частных случаях эти понятия эквивалентны. Назовем множество $A \subseteq \mathbb{C}$ *замкнутым*, если ему принадлежат пределы всех сходящихся последовательностей его точек. Отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и круг $\overline{B}[c,r] = \{x : |x-c| \leq r\} \subset \mathbb{C}$ замкнуты. Интервалы $[a,b[,]a,b]$, $]a,b[ \subset$ $\subset \mathbb{R}$ и круг $B[c,r] = \{x : |x-c| < r\} \subset \mathbb{C}$ не замкнуты.

***Теорема Кантора***. *Функция, непрерывная в каждой точке ограниченного замкнутого множества, равномерно непрерывна на нем.*

□ Пусть функция $f : A \to \mathbb{C}$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $A \subseteq \mathbb{C}$. Предположим, что $f$ не равномерно непрерывна на $A$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $\varepsilon_0 > 0$ и точки $x_n$, $y_n \in A$ такие, что $|x_n - y_n| < 1/n$ и $|f[x_n] - f[y_n]| \geq \varepsilon_0$. Последовательности точек $x_n$, $y_n$ ограничены вместе с множеством $A$. По теореме Вейерштрасса [Савельев, 2011a], существует сходящаяся подпоследовательность $x_{r[n]}$ последовательности $x_n$ и сходящаяся подпоследовательность $v_n = y_{s[r[n]]}$ последовательности $y_{r[n]}$. Подпоследовательность $u_n = x_{s[r[n]]}$ последовательности $x_{r[n]}$ тоже сходится. Так как $s[r[n]] \to \infty$ при $n \to \infty$, то из неравенства $|u_n - v_n| < 1/s[r[n]]$ следует, что последовательности $u_n$, $v_n$ имеют один и тот же предел. Пусть это точка $c \in \mathbb{C}$. Так как множество $A$ замкнуто, то $c \in A$. А так как функция $f$ непрерывна на $A$, то из $u_n \to c$, $v_n \to c$ следует $f[u_n] \to f[c]$, $f[v_n] \to f[c]$. Переходя к пределу в неравенстве $|f[u_n] - f[v_n]| \geq \varepsilon_0$, получаем противоречие: $0 = |f[c] - f[c]| \geq \varepsilon_0 > 0$. Функция $f$ не может не быть равномерно непрерывной. ■

Таким образом, для функций на ограниченных замкнутых множествах понятия непрерывности и равномерной непрерывности эквивалентны. Заметим, что функция $f[x] = x^2$, неравномерно непрерывная на $\mathbb{C}$, равномерно непрерывна на каждом круге $\overline{B}[c,r] \subset \mathbb{C}$, как легко проверить и непосредственно.

**2.1.4.** ***Свойства сходящихся направленностей.*** Данные определения предела сходящейся направленности гарантируют его единственность. Рассмотрим направленное множество ($X$, □), числовые функции $f$, $\alpha$, $\beta$ на $X$ и числа $a$, $b$. Верна

**Лемма**. *Пусть* $f = a + \alpha = b + \beta$, $\alpha \approx 0$, $\beta \approx 0$ (□). *Тогда*: $a = b$, $\alpha = \beta$.

□ Если $a + \alpha = b + \beta$, то $a - b = \beta - \alpha$. Так как $\alpha \approx 0$, $\beta \approx 0$, то по правилам действий с бесконечно малыми $\alpha - \beta \approx 0$. Следовательно, постоянная $a - b$ бесконечно мала, и поэтому $a = b$. Так как $a + \alpha = b + \beta$ и $a = b$, то $\alpha = \beta$.■

Из леммы сразу следует

**Теорема единственности предела**. Если $f \to a$ и $f \to b$, то $a = b$.

□ Пусть $f = a + \alpha$, $f = b + \beta$ ($\alpha \approx 0$, $\beta \approx 0$). Тогда $a + \alpha = b + \beta$ и по лемме $a = b$.■

Теорема единственности выражает корректность данного определения предела: оно определяет предел функции по данному направлению однозначно. Естественно, что пределы по разным направлениям могут быть разными. Равенство бесконечно малых в лемме тоже иногда бывает полезно.

Рассмотрим множество $X$, направление □ в $X$ и числовую функцию $f$ на $X$. Для каждого $x \in X$ определено непустое множество $F[x] = \{f[y] : y \,□\, x\}$ значений функции $f$ для $y \,□\, x$. Будем говорить, что функция $f$ *ограничена по направлению* □, если для некоторого $x_0 \in X$ множество $F[x_0]$ ограничено. Так как $F[x] \subseteq f[X]$ при каждом $x \in X$, то ограниченная функции $f$ ограничена по каждому направлению. Но ограниченная по данному направлению функция может не быть ограниченной.

**Примеры.** Функция $f[x] = 1 + 1/x$ на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ограничена по направлениям $x \to \infty$ и $x \to -\infty$, но не ограничена. Неограниченная функция $f[z] = z^2$ на множестве $X = \mathbb{C}$ ограничена по направлению $z \to 0$. Ограниченная по направлению $n \to \infty$ последовательность ограничена.

**Лемма.** *Сходящаяся числовая направленность ограничена начиная с некоторого члена.*

□ Пусть функция $f : X \to \mathbb{C}$ сходится к числу $c$ по направлению □. Тогда существует элемент $x_0 = x_0[1] \in X$ такой, что неравенство $|f[x] - c| < 1$ верно для всех элементов $x \,□\, x_0$. По неравенству треугольника

$\left\|f[x]\right| - |c|\right| \le \left|f[x]-c\right|$ и, следовательно,

$|c|-1 \le |f[x]| \le |c|+1$ при $x$ □ $x_0$.

Множество $F[x_0]$ ограничено. Значит, функция $f$ ограничена по направлению □. ■

Эта лемма часто бывает полезна.

**2.1.5.** ***Алгебра сходящихся направленностей***. Алгебраические действия со сходящимися направленностями приводят снова к сходящимся направленностям. Действия с направленностями переносятся на их пределы.

Рассмотрим направленное множество ($X$, □), сходящиеся по направлению □ функции $f$, $g$ на множестве $X$ и числа $a$, $b$, $c$. Верна

***Теорема об алгебре пределов***. Если $f \to a$, $g \to b$, то $f+g \to a+b$, $fg \to ab$, $cf \to ca$.

□ Пусть

$$f = a+\alpha, g = b+\beta,\ \ \alpha \approx 0,\ \ \beta \approx 0 .$$

Тогда

$$f+g = a+b+(\alpha+\beta),$$

$$fg = ab + (\alpha b + \beta a),\ cf = ca + (c\alpha).$$

По правилам действий с бесконечно малыми $\alpha+\beta \approx 0,\quad \alpha b+\beta a \approx 0,\quad c\alpha \approx 0.$ Значит, $f+g \to a+b,\ \ fg \to ab,\ \ cf \to ca.$ ■

***Замечание***. Эта теорема выражает согласованность сходимости и алгебраических действий. Теорема естественно обобщается на несколько слагаемых или множителей. Доказательство проводится по индукции.

Теорему добавляет

**Предложение.** *Если* $f \to a$, $g \to b$, $g[x] \ne 0$ *(* $x \in X$ *) и* $b \ne 0$, *то* $f/g \to a/b$.

□ По условию $f = a+\alpha, g = b+\beta,\ \ \alpha \approx 0,$ $\beta \approx 0$. Следовательно,

$$\frac{f[x]}{g[x]} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha[x]}{b+\beta[x]} - \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{1}{b^2+b\beta[x]}\left(b\alpha[x]-a\beta[x]\right).$$

Так как $b \ne 0$ и $\beta \approx 0$, то существует элемент $x_0[b]$ такой, что $|\beta[x]| < |b|/2$ для всех элементов $x$ □ $x_0[b]$. Следовательно,

$$\left|b^2+b\beta[x]\right| \ge b^2 - |b|\left|b[x]\right| >$$

$$> b^2 - b^2/2 = b^2/2 > 0,$$

$$\left|\frac{1}{b^2+b\beta[x]}\right| = \frac{1}{\left|b^2+b\beta[x]\right|} < \frac{2}{b^2} \quad (x\ □\ x_0[b]),$$

$$\left|\frac{1}{b^2+b\beta[x]}\left(b\alpha[x]-a\beta[x]\right)\right| \le \frac{2}{b^2}\left|b\alpha[x]-a\beta[x]\right|,$$

$$\left|\frac{f[x]}{g[x]} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{b^2}\left|b\alpha[x]-a\beta[x]\right| \quad (x\ □\ x_0[b]).$$

Так как $\alpha \approx 0,\ \beta \approx 0,$ то по правилам действий с бесконечно малыми

$$\left(2/b^2\right)\left|b\alpha[x]-a\beta[x]\right| \approx 0.$$

По принципу сравнения с бесконечно малой и из определения предела следует, что $f/g - a/b \approx 0,\ \ f/g \approx a/b.$ ■

**Пример 1**. Вычислим предел при $x \to -2$ вещественной функции

$$f[x] = \frac{(x-6)^{1/3}+2}{x^3+8},\ \ x<0,\ \ x \ne -2.$$

Чтобы избавиться от корней из отрицательных чисел, действия с которыми требуют особой осторожности из-за комплексных значений, заменим переменную $x$ на $u=-x$, а направление $x \to -2$ на $u \to 2$. По условию рассматриваются только вещественные числа и переменные. Поэтому $(-1)^{1/3} = -1$ и $\left(-(-x)-6\right)^{1/3} = (-1)^{1/3}(-x+6)^{1/3} = -(u+6)^{1/3}$.

Замена превращает функцию $f$ в функцию

$$g[u] = f[-x] = \frac{\left(\left(-(-x)-6\right)^{1/3}+2\right)}{\left(-(-x)^2+8\right)} =$$

$$= \frac{2-(u+6)^{1/3}}{8-u^3},$$

где $u>0, u\ne 2$. Эквивалентная задача: вычислить предел при $u \to 2$ вещественной функции $g$.

*Решение 1*. Чтобы перейти к бесконечно малым, заменим переменную $u$ на $z = 2-(u+6)^{1/3}$, а направление $u \to 2$ на $z \to 0$. Заметим, что $u = (2-z)^3-6$. Рассмотрим функцию

$$h[z] = g\left[(2-z)^3-6\right] = z\Big/\left(8-\left((2-z)^3-6\right)^3\right),$$

$z \ne 0$. Эквивалентная задача: вычислить предел при $z \to 0,\ \ z \ne 0,$ функции $h$.

Рассмотрим полином

$$q[z] = 8-\left((2-z)^3-6\right)^3.$$

Заметим, что свободный член полинома $q$ равен нулю $\left(q[0] = 8-\left(2^3-6\right)^3 = 0\right)$ и

$q[z] = cz + z^2 r[z] = z(c + zr[z])$, где $c$ – первый коэффициент полинома $q$, а $r$ – некоторый полином. Так как $z \neq 0$, то

$$h[z] = \frac{z}{z(c + zr[z])} = \frac{1}{c + zr[z]}.$$

По правилам действий с пределами, сформулированным в теореме,

$$\lim_{z\to 0}(c + zr[z]) = \lim_{z\to 0} c + \lim_{z\to 0} zr[z] =$$
$$= c + 0 \lim_{z\to 0} r[z] = c.$$

Если $c \neq 0$, то по правилу, сформулированному в предложении,

$$\lim_{z\to 0} h[z] = \frac{(\lim_{z\to 0} 1)}{(\lim_{z\to 0}(c + zr[z]))} = \frac{1}{c}.$$

Задача сводится к вычислению первого коэффициента полинома $q$. Отбрасывая все члены степени выше первой, получаем $(2 - z)^3 - 6 \approx 2 - 12z$. Точно так же $8 - (2 - 12z)^3 \approx 144z$. Следовательно,

$$c = 3 \times 2^2 \times 12 = 144 \text{ и } \lim_{z\to 0} h[z] = \frac{1}{144}.$$

Замены переменных и направлений для функций $f$, $g$, $h$ сохраняли предел. Поэтому $\lim_{x\to 2} f[x] = \lim_{u\to 2} g[u] = \lim_{z\to 0} h[z] = 1/144$.

***Замечание***. Можно провести выкладки более подробно. Последовательное умножение дает:

$$(2 - z)^3 - 6 = 2 - 12z + 6z^2 - z^3,$$
$$8 - (2 - 12z + 6z^2 - z^3) = 144z - 936z^2 +$$
$$+2604z^3 - 2952z^4 + 1800z^5 - 654z^6 +$$
$$+144z^7 - 18z^8 + z^9,$$
$$q[z] = z(144 + zr[z]),$$
$$r[z] = -936 + 2604z - 2952z^2 + 1800z^3 -$$
$$-654z^4 + 144z^5 - 18z^6 + z^7,$$
$$h[z] = \frac{z}{z(144 + z(-936 + 2604z - ... + z^7))} =$$
$$= \frac{1}{144 + zr[z]} \to \frac{1}{144}$$

при $z \to$, $z \neq 0$. Вычисление коэффициентов при степенях выше первой бесполезно.

*Решение 2*. Рассмотрим функцию

$$g[u] = \frac{2 - (u + 6)^{1/3}}{8 - u^3}, \ u > 0, \ u \neq 2.$$

Задача, эквивалентная поставленной: вычислить предел функции $g$ при $u \to 2$.

Для каждых $\alpha \in \mathbb{R}$ при условии $|v| < 1$ верна общая биномиальная формула [Савельев, 2011а, б]:

$$(1 + v)^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(m)}}{m!} v^m,$$

где

$$\alpha^{(0)} = 1, \ \alpha^{(1)} = \alpha, \ \alpha^{(2)} = \alpha(\alpha - 1),$$
$$\alpha^{(3)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2),$$
$$\alpha^{(m)} = \prod_{k=0}^{m-1}(\alpha - k) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - (m - 1)),$$
$$m \geq 3.$$

Следовательно, $(1 + v)^\alpha = 1 + \alpha v + o[v]$, где $o[v]/v \to 0$ при $v \to 0$. Заметим, что

$$(u + 6)^{1/3} = (u - 2 + 8)^{1/3} = 2(1 + v)^{1/3},$$

где $v = (u - 2)/8$. Заменим переменную $u$ на $v$, а направление $u \to 2$ на $v \to 0$. Так как $u = 2 + 8v$, то

$$g[u] = g[2 + 8v] = \frac{2(1 - (1 + v)^{1/3})}{8 - (2 + 8v)^3}, \ v \neq 0.$$

Эквивалентная сформулированной задача: вычислить предел при $v \to 0$ функции

$$p[v] = \frac{2(1 - (1 + v)^{1/3})}{8 - (2 + 8v)^3}.$$

Так как $(1 + v)^{1/3} = 1 + (1/3)v + o[v]$, то

$$2(1 - (1 + v)^{1/3}) = -(2/3)v + o[v]$$
$$(o[v]/v = o[1] \to 0, v \to 0).$$

Вместе с тем $8 - (2 + 8v)^3 = -96v + o[v]$ $(o[v]/v = o[1] \to 0, v \to 0)$ и, следовательно,

$$p[v] = \frac{-(2/3)v + o[v]}{-96v + o[v]} = \frac{-(2/3) + o[1]}{-96 + o[1]} =$$
$$= \frac{(2/3) + o[1]}{96 + o[1]}.$$

Так как $o[1]$ обозначает произвольную бесконечно малую, то знак перед ней можно не изменять.

По правилам действий с пределами, сформулированным в теореме,

$$\lim_{v\to 0}(2/3 + o[1]) = \lim_{v\to 0} 2/3 + \lim_{v\to 0} o[1] =$$
$$= 2/3 + o[1] = 2/3,$$

$$\lim_{v\to 0}(96 + o[1]) = \lim_{v\to 0} 96 + \lim_{v\to 0} o[1] = 96 + 0 = 96.$$

$= 2/3 + o[1] = 2/3.$

По правилу, сформулированному в предложении,

$$\lim_{v\to 0} p[v] = \frac{\left(\lim_{v\to 0}\left(2/3 + o[1]\right)\right)}{\left(\lim_{v\to 0}\left(96 + o[1]\right)\right)} = \frac{2}{3\times 96} = \frac{1}{144}.$$

Значит $\lim_{u\to 2} g[u] = \lim_{v\to 0} p[v] = \dfrac{1}{144}.$

***Замечание***. Равенство $\lim_{v\to 0}\left(c + o[1]\right) = c$ для любого числа $c$ сразу следует из определения предела через бесконечно малую и не требует применения теоремы о действиях с пределами. Но переход к пределу в дробях нуждается в обосновании.

**Пример 2.** Вычислим предел при $v\to 0$ функции

$$f[v] = \frac{(x+v)^{x+v} - x^x}{v},\ x>0,\ v\to 0,\ 0<v<x.$$

Правила действий со степенями дают равенства

$$\frac{(x+v)^{x+v} - x^x}{v} = \frac{1}{v}\left(x^{x+v}\left(1+\frac{v}{x}\right)^{x+v} - x^x\right) =$$

$$= x^x\frac{1}{v}\left(x^v\left(1+\frac{v}{x}\right)^{x+v} - 1\right).$$

Из биномиальной формулы следует, что

$$\left(1+\frac{v}{x}\right)^{x+v} = 1 + (x+v)\frac{v}{x} + o[v] = 1 + v + o[v],$$

$$\frac{x^v\left(1+v/x\right)^{x+v} - 1}{v} = \frac{1}{v}\left(x^v\left(1+v+o[v]-1\right)\right) =$$

$$= \frac{x^v - 1}{v} + x^v + o[1].$$

Так как $o[1]\to 0$, $x^v\to 1$, $v\to 0$, то остается вычислить предел функции $g[v] = \left(x^v - 1\right)/v$ при $v\to 0$. По определению $x^v = \mathrm{e}^{v\ln[x]}$. Следовательно,

$$\frac{x^v - 1}{v} = \frac{\mathrm{e}^{v\ln[x]} - 1}{v} = \frac{1}{v}\left(1 + v\ln[x] + o[v] - 1\right) =$$

$$= \ln[x] + o[1].$$

Значит

$$\frac{x^v - 1}{v} \to \ln[x],\ v\to 0,\ \text{и}$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{(x+v)^{x+v} - x^x}{v} = x^x\left(\ln[x] + 1\right).$$

В заключение отметим простое, но важное свойство сходящихся направленностей, аналогичное соответствующему свойству бесконечно малых и определяющееся им. Рассмотрим множество $X$, направление □ на нем, функцию $f: X\to\mathbb{C}$, ее вещественную и мнимую части $\xi: X\to\mathbb{R}$ и $\eta: X\to\mathbb{R}$ ($f = \xi + \eta i$), число $c = a + bi$. Верна

**Лемма о сходимости частей.** *Числовая направленность сходится к данному числу, если и только если ее вещественная и мнимая части сходятся соответственно к вещественной и мнимой частям этого числа.*

□ Если $\xi\to a$, $\eta\to b$, то по теореме об алгебре пределов $f = \xi + \eta i \to a + bi = c.$ Обратно, если $f\to c$, то $f - c\to 0$ и из неравенств

$$\left|\xi[x] - a\right| \le \left|f[x] - c\right|,\quad \left|\eta[x] - b\right| \le \left|f[x] - c\right|$$

$(x\in X)$ по принципу сравнения с бесконечно малой следует, что $\xi[n]\to a$, $\eta[n]\to b$. ■

**2.1.6.** ***Порядок для сходящихся направленностей***. Порядок для сходящихся вещественных направленностей сохраняется и для их пределов. В частности, сходящаяся направленность с положительными значениями имеет положительный предел (□ 0).

Рассмотрим множество $X$, направление □ на нем, вещественные функции $f$, $g$, $h$ на $X$ и веществение числа $a$, $b$, $c$. Верна

***Лемма о положительности предела***. *Если $h[x]\ge 0$ для всех элементов, начиная с некоторого, и $h\to c$, то $c\ge 0$.*

□ Пусть $c<0$. Тогда $\varepsilon = -c > 0$ и для некоторого элемента $x_0\in X$ верны соотношения $h[x_0] < c + \varepsilon = c - c = 0$. Это противоречит условию. Значит $c\ge 0$. ■

Лемму обобщает следующая из нее

***Теорема о порядке для пределов***. *Если $f[x]\le g[x]$ для всех элементов, начиная с некоторого, и $f\to a$, $g\to b$, то $a\le b$.*

□ Пусть $h[x] = g[x] - f[x] \ge 0$ для всех $x\ge x_0$. Тогда по теореме об алгебре пределов $h\to b - a$, а по лемме $b - a\ge 0$ и значит $a\le b$. ■

Эти лемма и теорема выражают согласованность сходимости вещественных направленностей с порядком для вещественных чисел. Из принципа сжимающих бесконечно малых и теоремы о порядке для пределов следует обобщающий его

***Принцип сжимающих направленностей***. *Пусть для всех элементов, начиная* *с некоторого*, $g[x] \leq f[x] \leq h[x]$, $g \to c$, $h \to c$. *Тогда* $f \to c$.

□ Пусть $g = c + \beta$, $h = c + \gamma$, $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$, и $\alpha[x] = f[x] - c$, $f[x] = c + \alpha[x]$ $(x \in X)$. Из условий вытекают неравенства
$c + \beta[x] \leq f[x] \leq c + \gamma[x]$, $\beta[x] \leq \alpha[x] \leq \gamma[x]$
для всех $x \square x_0$ при некотором $x_0 \in X$ и $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$. По принципу сжимающих бесконечно малых $\alpha \approx 0$ и $f \to c$. ■

Принцип сжимающих направленностей часто применяется. Условие *для всех элементов*, *начиная с некоторого*, нередко упрощает проверку неравенств.

**Пример.** Пусть $1 - 1/x \leq f[x] \leq 1 + 1/x$ $(x > 0)$. Тогда $f \to 1$, $x \to \infty$.

Этот пример показывает, что из строгих неравенств сходящихся направленностей не обязательно следуют строгие неравенства для их пределов:

$$g[x] = 1 - 1/x < 1 + 1/x = h[x] \ (x \in X),$$

но вместе с тем $\lim g[x] = \lim h[x] = 1$, $x \to \infty$.

**2.2.** ***Нижний и верхний пределы***. Эти пределы определяются для ограниченных по данному направлению вещественных направленностей, не обязательно сходящихся.

**2.2.1.** ***Монотонные направленности.*** В [Савельев, 2011а, б] подробно рассматривались монотонные вещественные последовательности. Естественно по аналогии описать и монотонные вещественные направленности.

Напомним основные определения и факты. Рассмотрим непустое множество $A$ вещественных чисел: $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}$. Скажем, что число $y$ ограничивает множество $A$ *снизу* или является его *минорантой*, если неравенство $y \leq x$ верно для всех элементов $x$ из множества $A$: $y \leq x$ $(x \in A)$. Скажем, что число $z$ ограничивает множество $A$ *сверху* или является его *мажорантой*, если неравенство $x \leq z$ верно для всех элементов $x$ из множества $A$: $x \leq z$ $(x \in A)$. Множество, ограниченное снизу и сверху, называется *ограниченным*. Если указанные в определениях неравенства строгие, то говорят о *строгой* ограниченности (снизу, сверху). Соответственно будем коротко писать $y \leq A$, $A \leq z$, $y < A$, $A < z$. Элемент $a \in A$, для которого неравенство $a \leq x$ верно для всех элементов $x$ из множества $A$, называют *наименьшим* элементом множества $A$ и обозначают $\min A : a = \min A \in A$, $a = \min A \leq x$ $(x \in A)$. Элемент $b \in A$, для которого неравенство $x \leq b$ верно для всех элементов $x$ из множества $A$, называют *наибольшим* элементом множества $A$ и обозначают

$$\max A : b = \max A \in A, \ x \leq b = \max A \ (x \in A).$$

Ясно, что наименьший и наибольший элементы есть не у всех ограниченных множеств.

Понятия нижней и верхней граней множества обобщают понятия наименьшего и наибольшего элементов. Наибольшая миноранта множества $A$ называется его *нижней гранью* и обозначается $\inf A$. Наименьшая мажоранта множества $A$ называется его *верхней гранью* и обозначается $\sup A$. Наименьший элемент множества, если он есть, является и его нижней гранью. Наибольший элемент множества, если он есть, является и его верхней гранью. Но грани есть и у множеств, не имеющих наименьшего и наибольшего элементов: возможно $\inf A \notin A$, $\sup A \notin A$. Верна [Савельев, 2010б]

**Теорема о гранях**. (1) *Для каждого непустого ограниченного сверху множества вещественных чисел существует верхняя грань.*

(2) *Для каждого непустого ограниченного снизу множества вещественных чисел существует нижняя грань.*

Среди вещественных направленностей выделяется важный класс монотонных направленностей. Он состоит из возрастающих и убывающих по данному направлению функций. Рассмотрим множество $X$, направление □ в $X$ и вещественную функцию $f$ на $X$. Направленность $f$ называется *возрастающей*, если $f[y] \geq f[x]$, когда $y \square x$, и *убывающей*, если $f[y] \leq f[x]$, когда $y \square x$. Из определений следует, что направленность $f$ убывает тогда и только тогда, когда направленность $-f$ возрастает. Одновременно возрастающими и убывающими являются постоянные направленности и только они. Возрастающие направленности и убывающие направленности называются *монотонными*. Примерами могут служить рассматривавшиеся монотонные последовательности и элементарные функции на интервалах вещественной прямой.

Как правило, рассматриваются линейные направления □ в множестве $X$ (при котором каждые два элемента $y$, $x$ множества $X$ сравнимы: $y \square x$ или $x \square y$). Монотонные функции по направлениям с несравнимыми элементами могут обладать непривычными искусственными свойствами. Для линейных *антисимметричных* направлений по аналогии с последовательностями определяются *строго возрастающие* направленности и *строго убывающие* направленности.

В отличие от последовательностей монотонные направленности могут не быть ограниченными ни снизу, ни сверху (иметь не ограниченное ни снизу, ни сверху множество значений). Из определений следует только, что ограниченная сверху возрастающая направленность и ограниченная снизу убывающая направленность ограничены по направлению.

Из теоремы о гранях следует

***Теорема о пределе монотонной направленности***.

(1) *Каждая ограниченная сверху возрастающая направленность сходится к верхней грани множества своих значений.*

(2) *Каждая ограниченная снизу убывающая направленность сходится к нижней грани множества своих значений.*

□ (1) Пусть функция $f$ на $X$ возрастает по направлению □ и ограничена сверху (множество ее значений ограничено сверху). Тогда по теореме о гранях существует верхняя грань $b = \sup f[x]$ множества $f[X]$ ее значений. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно доказать, что $b - \varepsilon < f[x] < b + \varepsilon$ для всех $x \square x_0$ при некотором $x_0 = x_0[\varepsilon] \in X$. Так как $f[x] \leq b$ для всех $x \in X$, то можно рассматривать неравенства $b - \varepsilon < f[x] \leq b$. А так как верхняя грань $b$ есть наименьшая мажоранта множества $f[X]$, то существует $x_0[\varepsilon] \in X$ такой, что $b - \varepsilon < f[x_0[\varepsilon]] \leq b$. По условию направленность $f$ возрастает. Следовательно, для всех $x \square x_0 = x_0[\varepsilon]$ верны неравенства $b - \varepsilon < f[x_0] < f[x] \leq b < b + \varepsilon$. Значит $b = \lim f[x]$ по направлению □.

(2) Пусть функция $g$ на $X$ убывает по направлению □ и ограничена снизу (множество ее значений ограничено снизу). Тогда функция $f = -g$ на $X$ возрастает по направлению □ и ограничена сверху. Из определений следует, что

$\lim g[x] = -\lim f[x]$ и $\inf g[x] = -\sup f[X]$.

По доказанному $-\sup f[X] = -\lim f[x]$. Значит,

$$\lim g[x] = \inf g[X]. \ \blacksquare$$

Теорема о пределе монотонной направленности часто применяется. В частности, из нее и леммы об ограниченности по направлению сходящейся направленности сразу следует отмечавшаяся ограниченность по направлению ограниченной сверху возрастающей направленности и ограниченной снизу убывающей направленности.

***Замечание***. Пусть функция $f$ на $X$ возрастает по направлению □ и имеет наибольшее значение $\max f[X] = f[a]$ в некоторой точке $a \in X$. Тогда $f$ ограничена сверху числом $f[a]$ и $\sup f[X] = f[a]$. Следовательно, $\lim_{\square} f[x] = f[a]$. Например,

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + x^2\right) = 2.$$

Пусть функция $g$ на $X$ убывает по направлению □ и имеет наименьшее значение $\min g[X] = g[a]$ в некоторой точке $a \in X$. Тогда $f$ ограничена снизу числом $g[a]$ и $\inf g[X] = g[a]$. Следовательно,

$$\lim_{\square} g[x] = g[a].$$

Например, $\lim_{x \to 1} \left(1 - x^2\right) = 0$.

**2.2.2. *Нижняя и верхняя направленности***. В [Савельев, 2011а, б] рассматривались нижняя и верхняя последовательности для ограниченной вещественной последовательности. По аналогии можно определить нижнюю и верхнюю направленности для ограниченной по направлению вещественной направленности.

Рассмотрим множество $X$, направление □ в $X$ и вещественную направленность $f$ на $X$, *ограниченную начиная с некоторого члена*: существует $x_0 \in X$ такой, что множество $F[x_0] = \{f[y] : y \square x_0\}$ следующих членов $f[y]$ ограничено. Так как

$$F[x] = \{f[y] : y \square x\} \subseteq F[x_0]$$

при $x \square x_0$, то вместе с $F[x_0]$ ограничены множества $F[x]$ для всех $x \square x_0$. Будем говорить также, что направленность $f$ *ограничена начиная с члена* $x_0$, когда нужно явно указать элемент $x_0$. Функция $f$ при этом может быть не ограничена. Чтобы не усложнять обозначений и рассуждений, будем в дальнейшем часто рассматривать сужение функции $f$ на множество $X_0 = \{x \in X : x \square x_0\}$, сохраняя для них прежние обозначения $f$, $X$ и $\square$. Функция $f$ становится тогда ограниченной.

Ограниченное множество $F[x] \subseteq F[x_0]$ при $x \square x_0$ имеет нижнюю и верхнюю грани: $g[x] = \inf F[x]$ и $h[x] = \sup F[x]$. Назовем направленность $g$ *нижней*, а направленность $h$ *верхней* для $f$. Вместе с $f$ эти направленности ограничены. Для них используются также обозначения

$$g[x] = \inf{}_{y \square x} f[y] \quad \text{и} \quad h[x] = \sup{}_{y \square x} f[y].$$

Подчеркнем, что нижняя и верхняя направленности $g$ и $h$ могут быть определены не на всем множестве $X$, на котором определена функция $f$, а только на его части $X_0 = \{x \in X : x \square x_0\}$, на которой функция $f$ ограничена, т. е. значения $g[x]$ и $h[x]$ определены начиная с некоторого элемента, если направленность $f$ ограничена начиная с некоторого элемента.

Формально можно было бы сразу от $X$ и $f$ перейти к части $X_0$ и сужению $f_0$, рассматривать только ограниченные функции. Но часто в рассуждениях важны все множество $X$ и функция $f$ на $X$. Поэтому исключать их не всегда целесообразно.

**Пример 1.** Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с направлением $n \to \infty$. Пусть $f[n] = (-1)^n$, $n \geq 1$. Тогда

$$g[n] = \inf{}_{p \geq n} (-1)^p = -1 \text{ и}$$

$$h[n] = \sup{}_{p \geq n} (-1)^p = 1.$$

Если $f[n] = 1/n$, $n \geq 1$, то

$$g[n] = \inf{}_{p \geq n} (1/p) = 0 \text{ и}$$

$h[n] = \sup_{p \geq n} (1/p) = 1/n$. А если $f[n] = -1/n$, $n \geq 1$, то $g[n] = \inf_{p \geq n} (-1/p) = -1/p$ и $h[n] = \sup_{p \geq n} (-1/p) = 0$.

Это хорошо видно на графике (рис. 2).

**Пример 2.** Рассмотрим множество $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и гиперболу $f[x] = 1/x$, $x \neq 0$ на нем. Функция $f$ не ограничена, но она ограничена начиная с некоторого элемента по направлениям $x \to \infty$ и $x \to -\infty$. Не изменяя обозначений, рассмотрим интервал $X = [1, \infty[$ и ограниченное сужение $f[x] = 1/x$, $x \geq 1$, функции $f$ на него. Ясно, что $g[x] = \inf_{y \geq x} (1/y) = 0$ и

$$h[x] = \sup{}_{y \geq x} (1/y) = 1/x.$$

Пусть $X = ]-\infty, -1]$, направление $x \to -\infty$ и $f[x] = 1/x$, $x \leq -1$. Тогда

$$g[x] = \inf{}_{y \leq x} (1/y) = 1/x \text{ и}$$

$$h[x] = \sup{}_{y \leq x} (1/y) = 0.$$

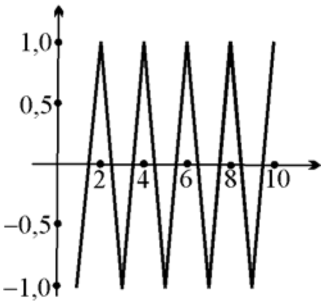


*Рис. 2*

Это хорошо видно на графике (рис. 3).

**Пример 3.** Рассмотрим вещественную прямую $\mathbb{R}$ и параболу $f[x] = x^2$ на ней. Функция $f$ не ограничена, но она ограничена начиная с некоторого элемента по направлению $x \to 0$. Рассмотрим отрезок $X = [-1, 1]$ прямой $\mathbb{R}$ и ограниченное сужение $f[x] = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, функции $f$ на него. Ясно, что $g[x] = \inf_{|y| \geq |x|} y^2 = 0$ и

$$h[x] = \sup{}_{|y| \leq |x|} y^2 = y^2.$$

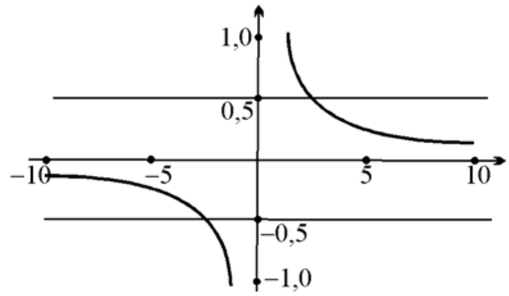


*Рис. 3*

Аналогично для кубической параболы $f[x] = x^3$, также ограниченной начиная с некоторого элемента по направлению $x \to 0$, нижняя и верхняя направленности при $x \to 0$ определяются равенствами

$$g[x] = \inf{}_{|y| \leq |x|} y^3 = -|x|^3, \; h[x] = \sup{}_{|y| \leq |x|} y^3 = |x|^3.$$

Это хорошо видно на графиках (рис. 4).

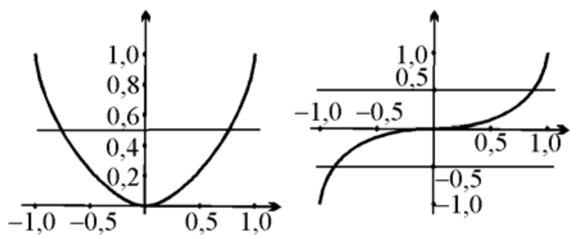

*Рис. 4*

**2.2.3.** ***Нижний и верхний пределы***. С помощью нижней и верхней направленности можно по аналогии с последовательностями определить нижний и верхний пределы для ограниченной начиная с некоторого элемента вещественной направленности.

Рассмотрим множество *X*, направление □ в *X*, вещественную функцию *f* на *X*, ограниченную начиная с элемента $x_0$, ее нижнюю направленность $g$ и верхнюю направленность *h*. Пусть $x \,\square\, x_0$. Обозначим $F[x] = \{f[y] : y \,\square\, x\}$ множество значений функции *f* для всех $y \,\square\, x$.

**Лемма 1.** *Нижняя направленность* $g$ *возрастает, а верхняя направленность h убывает.*

□ Будем рассматривать только элементы множества *X*, следующие за $x_0$. Благодаря транзитивности направления □ при продвижении *x* по направлению □ множество *F*[*x*] сужается: если $x_2 \,\square\, x_1$, то из $y \,\square\, x_2$ следует $y \,\square\, x_1$ и из $f[y] \in F[x_2]$ следует $f[y] \in F[x_1]$. Значит, $F[x_2] \subseteq F[x_1]$ при $x_2 \,\square\, x_1$. Поэтому

$$g[x_2] = \inf F[x_2] \ge \inf F[x_1] = g[x_1] \text{ и}$$

$$h[x_2] = \sup F[x_2] \le \sup F[x_1] = h[x_1]$$

при $x_2 \,\square\, x_1$. Нижняя направленность $g$ возрастает, а верхняя направленность *h* убывает. ■

Так как функция *f* ограничена на множестве $X_0 = \{x \in X : x \,\square\, x_0\}$, то ее нижняя и верхняя направленности ограничены:

$$g[X_0] \subseteq f[X_0],\ h[X_0] \subseteq f[X_0].$$

**Лемма 2.**

(1) *Для всех элементов* $x \,\square\, x_0$ *верны неравенства* $g[x] \le f[x] \le h[x]$.

(2) *Для любых элементов* $y,\ z \,\square\, x_0$ *верно неравенство* $g[y] \le h[z]$.

□ (1) Так как $f[x] \in F[x]$, то $g[x] = \inf F[x] \le \sup F[x] = h[x]$ для всех элементов $x \,\square\, x_0$.

(2) Будем рассматривать только элементы множества *X*, следующие за $x_0$. Неравенство $g[y_0] > h[z_0]$ для некоторых элементов $y_0, z_0$ влечет неравенства $g[x] \ge g[y_0] > h[z_0] \ge h[x]$ при $x \,\square\, y_0$, $x \,\square\, z_0$. Такие элементы $x \in X$ по определению направления существуют. Но неравенство $g[x] = \inf F[x] > \sup F[x] = h[x]$ невозможно. Нижняя грань непустого множества не может быть строго больше его верхней грани. ■

Каждое значение нижней направленности ограничивает снизу все значения верхней, а каждое значение верхней направленности ограничивает сверху все значения нижней.

Из леммы 1 и теоремы о пределе монотонной направленности следует, что нижняя и верхняя направленности сходятся. Это позволяет сформулировать

***Определение***. *Нижним пределом ограниченной вещественной направленности f называется предел ее нижней направленности g.*

*Верхним пределом ограниченной вещественной направленности f называется предел ее верхней направленности h.*

Для нижнего и верхнего пределов приняты обозначения $\liminf$, $\limsup$ и $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ по определению $\liminf[f] = \underline{\lim} f = \lim g$,

$$\limsup[f] = \overline{\lim} f = \lim h.$$

Как и для обычного предела, когда это необходимо, направление указывается явно. В примерах 1–3 п. 2.1.1 нижний и верхний пределы легко вычисляются.

**Пример 1.**

$$\liminf(-1)^n = -1,\ \limsup(-1)^n = 1.$$

**Пример 2.**

$$\liminf_{x\to\infty} 1/x = \limsup_{x\to\infty} 1/x = 0,$$

$$\liminf_{x\to-\infty} 1/x = \limsup_{x\to-\infty} 1/x = 0.$$

**Пример 3.**

$$\liminf_{x\to 0} x^2 = \limsup_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\liminf_{x\to 0} x^3 = \limsup_{x\to 0} x^3 = 0.$$

В примерах 2–3 направленности сходятся, нижний и верхний пределы равны пределу направленности. Это общее свойство сходящихся направленностей.

**2.2.4.** ***Теорема о нижнем и верхнем пределах***. Как было показано в п. 1.3.4, каждая сходящаяся вещественная направленность ограничена начиная с некоторого члена. Поэтому для нее определены нижняя и верхняя направленности, нижний и верхний пределы. Естественно ожидать, что, как и в случае последовательностей, эти пределы равны пределу направленности. Обратно, аналогия с последовательностями подсказывает, что если нижний и верхний пределы ограниченной начиная с некоторого члена вещественной направленности равны, то она сходится к их общему значению.

***Теорема о нижнем и верхнем пределах***. *Ограниченная начиная с некоторого члена вещественная направленность сходится к данному вещественному числу тогда и только тогда, когда ее нижний и верхний пределы равны этому числу.*

□ (1) Пусть вещественная направленность *f* сходится к числу *c* по направлению □. Тогда существует элемент $x_0 \in X$ такой, что неравенство $c-1 \le f[x] \le c+1$ верно для всех элементов $x \square x_0$. На множестве $X_0 = \{x \in X : x \square x_0\}$ для *f* определены нижняя и верхняя направленности $g[x] = \inf_{y \square x} f[y]$ и $h[x] = \sup_{y \square x} f[y]$, нижний и верхний пределы $a = \lim g$ и $b = \lim h$. Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_1 = x_1[\varepsilon] \square x_0$ такой, что неравенство $c-\varepsilon \le f[x] \le c+\varepsilon$ верно для всех элементов $x \square x_1$. Поэтому $c-\varepsilon \le g[x] \le f[x] \le h[x] \le \le c+\varepsilon$ для всех $x \square x_1$. Откуда $c-\varepsilon \le \le a \le b \le c+\varepsilon$ для каждого $\varepsilon > 0$ и $a = b = c$.

(1) Верно и обратное. Рассмотрим ограниченную начиная с некоторого члена вещественную направленность *f*, ее нижнюю и верхнюю направленности *g* и $h$. По лемме 2 п. 2.1.2 для всех членов этих направленностей, начиная с некоторого, верны неравенства $g[x] \le f[x] \le h[x]$. Если $g[x] \to c$, $h[x] \to c$, то по теореме о сжимающих направленностях $f[n] \to c$. ■

Теорему о нижнем и верхнем пределе можно записать кратко:

$$\lim f = c \Leftrightarrow \liminf f = \limsup f = c .$$

Добавим к примерам 1–3 п. 2.1.1 еще несколько, в которых нижний и верхний пределы тоже легко вычисляются.

**Пример 1.** Пусть $f[x] = \sin[x]$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\liminf_{x\to\infty} \sin[x] = -1$ и

$\limsup_{x\to\infty} \sin[x] = 1$.

Функция $\sin[x]$ не имеет предела при $x \to \infty$.

Вместе с тем

$\liminf_{x\to 0} \sin[x] = \limsup_{x\to 0} \sin[x] = 0$ и

$\lim_{x\to 0} \sin[x] = 0$.

**Пример 2.** Пусть $f[x] = \sin[1/x]$, $x \ne 0$. Тогда

$\liminf_{x\to 0} \sin[1/x] = -1$ и

$\limsup_{x\to 0} \sin[1/x] = 1$. Функция $\sin[1/x]$ не имеет предела при $x \to 0$.

Вместе с тем

$\liminf_{x\to\infty} \sin[1/x] = \limsup_{x\to\infty} \sin[1/x] = 0$

и $\lim_{x\to\infty} \sin[1/x] = 0$. То же самое и при $x \to -\infty$.

**Пример 3.** Пусть $f[x] = x\sin[1/x]$, $x \ne 0$. Тогда $\liminf_{x\to 0} \left(x\sin[1/x]\right) =$

$$= \limsup_{x\to 0} \left(x\sin[1/x]\right) = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(x\sin[1/x]\right) = 0.$$

Пример 2 получается из примера 1 заменой переменной $x$ на $1/x$ и направления $x \to \infty$ на $x \to 0$. Такая замена часто бывает полезна.

***Замечание***. Нижний и верхний пределы последовательностей связывались с их частичными пределами. По аналогии можно было бы определить частичные направленности и частичные пределы направленностей. Но это сложнее.

**2.3. *Повторные и двойные пределы***. Для двойных числовых направленностей, кроме двойных пределов определяются также тесно связанные с ними простые и повторные пределы.

**2.3.1. *Простые*, *повторные и двойные пределы***. Рассмотрим определенное в п. 1.1.4 произведение $(X \times Y, \square)$ направленных множеств (*X*, □), (*Y*, □). В общих рассуждениях одинаковое обозначение □ для *простых* направлений □$_1$, □$_2$ в множествах *X*, *Y* и *двойного* направления □ = (□$_1$, □$_2$) в их декартовом произведении $X \times Y$ не приводит к путанице: обычно по тексту ясно, какое из них имеется в виду, а когда нужно, делаются уточнения. Введем общее обозначение *F* для множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ вещественных и комплексных чисел.

Каждая *двойная* направленность

$h : X \times Y \to F$

определяет *простые* направленности

$$h(x, \bullet) : Y \to F \text{ и } h(\bullet, y) : X \to F$$

($x \in X$, $y \in Y$). Все они являются числовыми (вещественными или комплексными) функциями на множествах с направлениями. Будем называть предел $c \in F$ сходящейся двойной направленности *h* *двойным* пределом и писать $\lim_{x,y} h(x,y) = c$.

Пределы $\lim_{y} h(x,y) = f(x)$ и

$\lim_{x} h(x,y) = g(y)$

сходящихся в точках $x \in X$ и $y \in Y$ по направлениям соответственно в множествах $Y$ и $X$ простых направленностей

$h(x,\bullet): Y \to F$ и $h(\bullet, y): X \to F$

назовем *простыми* пределами в точках $x \in X$ и $y \in Y$.

Пусть простые пределы $f(x)$, $g(y)$ существуют во всех точках $x \in X, y \in Y$ и *предельные функции* $f: X \to F$, $g: Y \to F$ сходятся по направлениям в множествах $X$, $Y$. Пределы $\lim_{x} \lim_{y} h(x,y) = \lim_{x} f(x) = a$ и $\lim_{y} \lim_{x} h(x,y) = \lim_{y} g(y) = b$ называются *повторными* пределами двойной направленности $h: X \times Y \to F$.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Рассмотрим множества $X = Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с одинаковыми направлениями $x \to \infty$, $y \to \infty$ и функцию $h[x,y] = 1/x + \sin[1/y]$. Ясно, что

$$c = \lim_{x\to\infty, y\to\infty} (1/x + \sin[1/y]) = 0.$$

Точно так же

$f[x] = \lim_{y\to\infty} (1/x + \sin[1/y]) = 1/x$, $x \in X$ и

$a = \lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} (1/x + \sin[1/y]) =$

$= \lim_{x\to\infty} (1/x) = 0$. Аналогично

$g[y] = \lim_{x\to\infty} (1/x + \sin[1/y]) = \sin[1/y]$,

$y \in Y$ и $b = \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} (1/x + \sin[1/y]) = \lim_{y\to\infty} \sin[1/y] = 0$. Двойной, все простые, оба повторные пределы существуют, и верны равенства $a = b = c = 0$. Все сказанное остается верным при замене любого из направлений $x \to \infty$, $y \to \infty$ на $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. При замене $x \to \infty$ на $x \to 0$ простых пределов $g[y] = \lim_{x\to 0} (1/x + \sin[1/y])$ не существует. Аналогично при замене $y \to \infty$ на $y \to 0$ не существует простых пределов $f[x] = \lim_{y\to 0} (1/x + \sin[1/y])$. В обоих случаях нет двойных пределов. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что конечных пределов

$h[1/n, n] = n + \sin[1/n]$ и

$h[n, 1/n] = 1/n + \sin[n]$

не существует при $n \to \infty$.

**Пример 2.** Заменим в примере 1 сумму на произведение и рассмотрим функцию $h[x,y] = (1/x)\sin[1/y]$. Ясно, что $c = \lim_{x\to\infty, y\to\infty} ((1/x)\sin[1/y]) = 0$. Точно так же $f[x] = \lim_{y\to\infty} ((1/x)\sin[1/y]) = 0$, $x \in X$. Предельная функция $f$ равна нулю тождественно и $a = \lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} ((1/x)\sin[1/y]) = \lim_{x\to\infty} f[x] = 0$. Аналогично $g[y] = \lim_{x\to\infty} ((1/x)\sin[1/y]) = 0$, $y \in Y$. Предельная функция $g$ равна нулю тождественно и

$b = \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} ((1/x)\sin[1/y]) =$

$= \lim_{y\to\infty} g[y] = 0$.

Снова двойной, все простые, оба повторные пределы существуют, и верны равенства $a = b = c = 0$. Все сказанное также остается верным при замене любого из направлений $x \to \infty$, $y \to \infty$ на $x \to -\infty$, $y \to -\infty$. При замене $x \to \infty$ на $x \to 0$ все простые пределы

$f[x] = \lim_{y\to 0} ((1/x)\sin[1/y]) = 0$

и повторный предел $a = \lim_{x\to\infty} f[x] = 0$. Но простых пределов

$g[y] = \lim_{x\to 0} ((1/x)\sin[1/y])$

и, следовательно, повторного предела $b = \lim_{y\to\infty} g[y] = 0$ не существует. В обоих случаях нет двойных пределов. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что предела $h[1/n, n] = n\sin[1/n]$ не существует при $n \to \infty$.

**Пример 3.** В [Савельев, 2011а, б] подробно рассматривалась двойная геометрическая прогрессия. Диагональная нумерация позволяла превратить ее в последовательность. Изменим обозначения и рассмотрим двойной ряд $p: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ со значениями $p[i,j] = u^i v^j$ ($u \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}$). Будем предполагать, что $|u| < 1$, $|v| < 1$. Пусть

$h[m,n] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u^i v^j$. Тогда

$$f[m] = \lim_{n\to\infty} h[m,n] = \sum_{i=1}^{m} u^i \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} v^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u^i \sum_{j=1}^{\infty} v^j = \left( \sum_{i=1}^{m} u^i \right) v (1 - v)^{-1},$$

$$a = \lim_{m\to\infty} f[m] = \left(\sum_{i=1}^{\infty} u^i\right) v(1-v)^{-1} =$$

$$= u(1-u)^{-1} v(1-v)^{-1}.$$

Точно так же

$$g[n] = \lim_{m\to\infty} h[m,n] = \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} u^i\right) \sum_{j=1}^{n} v^j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} u^i\right) \sum_{j=1}^{n} v^j = u(1-u)^{-1} \sum_{j=1}^{n} v^j,$$

$$b = \lim_{n\to\infty} g[n] = u(1-u)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} v^j =$$

$$= u(1-u)^{-1} v(1-v)^{-1}.$$

Из сказанного прежде о двойной геометрической прогрессии следует, что существует и двойной предел

$$c = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} h[m,n] = uv(1-u)^{-1}(1-v)^{-1}.$$

Верны равенства $a = b = c$. Они эквивалентны равенствам

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(u^i \sum_{j=1}^{\infty} v^j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u^i v^j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u^i v^j.$$

Верно также равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} u^i v^j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} u^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} v^j\right).$$

Аналогичные равенства верны и для рядов более общего вида.

**2.3.2.** ***Теорема о повторных пределах***. При вычислении пределов функций двух переменных нередко существенную роль играет порядок переменных, по которым производится вычисление. Удачный выбор этого порядка может значительно упростить вычисление предела. В обозначениях п. 2.2.1 верна

***Теорема о повторных пределах***. *Пусть существует двойной предел*

$$\lim_{x,y} h(x,y) = c.$$

(1) *Если для каждого x есть простой предел* $\lim_y h(x,y) = f(x)$, *то существует повторный предел*

$$\lim_x \lim_y h(x,y) = \lim_x f(x) = a \ \text{ и } \ a = c.$$

(2) *Если для каждого y есть простой предел* $\lim_y h(x,y) = g(y)$, *то существует повторный предел*

$$\lim_y \lim_x h(x,y) = \lim_y g(y) = b \ \text{ и } \ b = c.$$

□ (1) По условию для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют элементы $x_0 = x_0[\varepsilon] \in X$, $y_1 = y_1[\varepsilon] \in Y$, $y_2 = y_2[\varepsilon, x] \in Y$ такие, что неравенство $|h[x,y] - c| < \varepsilon/2$ верно для всех $x \square x_0$, $y \square y_1$ и при каждом $x \in X$ неравенство $|h[x,y] - f[x]| < \varepsilon/2$ верно для всех $y \square y_2$. По определению направления существует элемент $y_0 = y_0[\varepsilon, x] \in Y$, следующий за $y_1, y_2$. Для каждого $x \square x_0$ верны неравенства

$|h[x,y_0] - c| < \varepsilon/2$, $|h[x,y_0] - f[x]| < \varepsilon/2$ и, следовательно, соотношения

$$|f[x] - c| = |f[x] - h[x,y_0] + h[x,y_0] - c| \le$$

$$\le |h[x,y_0] - f[x]| + |h[x,y_0] - c| < \varepsilon.$$

Значит $\lim_x f(x) = c$.

(2) Симметричное второе утверждение теоремы получается из (1) заменой переменных $x \leftrightarrow y$, $g \to f$, $b \to a$. ■

Из доказанной теоремы вытекает достаточное условие равенства повторных пределов.

***Следствие***. *Пусть существует двойной предел и все простые пределы. Тогда оба повторных предела существуют и равны двойному.*

Примеры в п. 2.2.1 поясняют сказанное. Приведем еще пример, который показывает, что повторные пределы могут существовать и быть равными даже тогда, когда двойной предел не существует.

**Пример.** Рассмотрим множества $X = Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с одинаковыми направлениями $x \to 0$, $y \to 0$ и функцию

$$h[x,y] = xy/(x^2 + y^2).$$

Ясно, что $f[x] = \lim_{y\to 0}\left(xy/(x^2+y^2)\right) = 0$, $x \in X$, и $a = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(xy/(x^2+y^2)\right) = 0$.

Аналогично $g[y] = \lim_{x\to 0}\left(xy/(x^2+y^2)\right) = 0$, $y \in Y$, и $b = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(xy/(x^2+y^2)\right) = 0$.

Оба повторные предела существуют и равны.

Вместе с тем двойной предел $c = \lim_{x\to 0, y\to 0}\left(xy/(x^2+y^2)\right)$ не существует. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $h[1/n, 1/n] = 1/2$ и $h[1/n, 2/n] = 2/5$.

**2.3.3.** ***Теорема о двойном пределе.*** Введем важное понятие *равномерной* сходимости. Рассмотрим множество *X*, его часть *A*, направленное множество (*Y*, $\square$), функцию $h : X \times X \to F$, ее частные функции

$h(x,\bullet): Y \to F$ $(x \in X)$ и функцию $f: X \to F$.

***Определение***. *Направленность* $h(x,\bullet)$ *сходится к функции* $f(x)$ *равномерно на множестве A, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $y_0 = y_0[\varepsilon] \in Y$ *такой, что* $|h[x, y_0] - f[x]| < \varepsilon$ *для всех* $x \in A$ *и всех* $y \,\square\, y_0$.

Предположим, что для всех элементов *y*, начиная с некоторого, множества

$$\{h(x,y) - f(x) : x \in A\}$$

ограничены и положим

$$\Delta[y] = \sup\{|h[x,y] - f(x)|, x \in A\}.$$

Равномерная сходимость $h(x,\bullet)$ к $f(x)$ означает бесконечную малость направленности $\Delta$, которая описывает *равномерное* расстояние между функциями $h(\bullet, y)$ и *f* на множестве *A*. Если $A = X$, то говорят просто о равномерной сходимости направленности $h(x,\bullet)$.

***Замечание***. Можно было бы упростить определения равномерной сходимости, заменив рассматриваемые функции их сужениями и не вводя множество *A*. Но часто в рассуждениях важны все множество *X* и некоторые его части. Поэтому сразу считать $A = X$ не всегда целесообразно.

**Примеры.** В примере 2 п. 2.2.1 сходимость $h[x, y] = (1/x)\sin[1/y] \to 0$ при $y \to \infty$ равномерна на интервале $A = [1, \infty[$, так как $\Delta[y] = |\sin[1/y]| \le 1/y \to 0$ при $y \to \infty$. На множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ эта сходимость неравномерна.

В примере с функцией

$$h[x, y] = xy/(x^2 + y^2)$$

сходимость $h[x, y] \to 0, \ \ y \to 0$ неравномерна на $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, так $\Delta[y] \ge |h[y, y] = |1/2$.

Рассмотрим множество *Y*, его часть *B*, направленное множество (*X*, □), функцию $h: X \times X \to F$, ее частные функции

$$h(\bullet, y): X \to F \ \ (y \in Y)$$

и функцию $g: Y \to F$. Повторим определение равномерной сходимости в этих обозначениях.

**Определение.** *Направленность* $h(\bullet, y)$ *сходится к функции* $g(y)$ *равномерно на множестве B, если для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $x_0 = x_0[\varepsilon] \in X$ *такой, что* $|h(x, y) - g(y)| < \varepsilon$ *для всех* $y \in B$ *и всех* $x \,\square\, x_0$.

Рассмотрим направленные множества (*X*,□) и (*Y*, □), функцию $h: X \times X \to F$, ее частные функции $h(x,\bullet): Y \to F$ $(x \in X)$ и

$$h(\bullet, y): X \to F \ \ (y \in Y),$$

функции $f: X \to F$ и $g: Y \to F$. К ним применимы оба сформулированных определения. Если направленность $h(x,\bullet)$ сходится к функции *f*(*x*) равномерно на множестве $A = \{x \in X : x \ge x_0\}$ при некотором $x_0 \in X$, то будем говорить, что она сходится равномерно *начиная с элемента* $x_0$ *или начиная с некоторого элемента*. Аналогично будем говорить о равномерной сходимости направленности $h(\bullet, y)$ к функции $g(y)$ на множестве $B = \{y \in Y : y \ge y_0\}$ для некоторого $y_0 \in Y$.

При таком соглашении верна

***Теорема о двойном пределе***.

(1) *Если направленность* $h(x,\bullet)$ *сходится к функции f(x) равномерно начиная с некоторого элемента и есть повторный предел* $\lim_x f(x) = a$, *то двойной предел* $\lim_{x,y} h(x, y)$ *существует и равен a*.

(2) *Если направленность* $h(\bullet, y)$ *сходится к функции* $g(y)$ *равномерно начиная с некоторого элемента и есть повторный предел* $\lim_y g(y) = b$, *то двойной предел* $\lim_{x,y} h(x, y)$ *существует и равен* $b$.

□ (1) Так как $h(x,\bullet) \to f(x)$ равномерно начиная с некоторого элемента и $f(x) \to a$, то для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют элементы, $x_1 = x_1[\varepsilon] \in X$, $x_2 = x_2[\varepsilon] \in X$, $y_0 = y_0[\varepsilon] \in Y$ такие, что $|h[x, y] - f[x]| < \varepsilon/2$ для всех $x \,\square\, x_1$, $y \,\square\, y_0$ и $|f[x] - a| < \varepsilon/2$ для всех $x \,\square\, x_2$. По определению направления существует элемент $x_0 = x_0[\varepsilon] \in X$, следующий за $x_1, x_2$. Для каждых $x \,\square\, x_0$, $y \,\square\, y_0$ верны неравенства

$$|h[x, y] - f[x]| < \varepsilon/2, \ |f[x] - a| < \varepsilon/2$$

и, следовательно, соотношения

$$\left|h[x,y]-f[x]\right|=\left|h[x,y]-a+a-f[x]\right|\le$$
$$\le\left|h[x,y]-a\right|+\left|f[x]-a\right|<\varepsilon.$$

Значит, $\lim_{x,y} h(x,y)=a$.

(2) Симметричное второе утверждение теоремы получается из (1) заменой переменных $x\leftrightarrow y$, $g\to f$, $b\to a$. ■

Для двойной направленности из доказанных теорем вытекает

***Следствие.*** *Если начиная с некоторых элементов существуют все простые пределы, сходимость по одной из переменных равномерна и есть соответствующий повторный предел, то существуют двойной предел, другой повторный предел и эти три предела равны.*

□ (1) Пусть все простые пределы $f(x)$, $g(y)$ существуют начиная с некоторых элементов, сходимость $h(x,\bullet)\to f(x)$ равномерна начиная с некоторого элемента и есть повторный предел $\lim_x f(x)=a$. Тогда по доказанной теореме $\lim_{x,y} h(x,y)=a$. А так как начиная с некоторого элемента существуют простые пределы $g(y)$, то по теореме о повторных пределах существует повторный предел $\lim_y g(y)=b$ и $b=a$. Таким образом,

$$\lim_{x,y} h(x,y)=\lim_x \lim_y h(x,y)=$$
$$=\lim_y \lim_x h(x,y).$$

Симметричное утверждение получается из доказанного заменой переменных $x\leftrightarrow y$, $g\to f$, $b\to a$. ■

**Примеры.** В примере 2 п. 2.2.1 сходимость $h[x,y]=(1/x)\sin[1/y]\to 0$ при $y\to\infty$ равномерна на интервале $A=[1,\infty[$, так как

$$\Delta[y]=\left|\sin[1/y]\right|\le 1/y\to 0 \quad \text{при} \quad y\to\infty.$$

Существуют все простые пределы

$$f[x]=\lim_{y\to\infty} h[x,y]=0,\ x\in A, \text{ и}$$
$$g[y]=\lim_{x\to\infty} h[x,y]=0,\ y\in Y.$$

Ясно, что $a=\lim_{x\to\infty} f[x]=0$. По только что доказанному существуют двойной предел $c=\lim_{x\to\infty,y\to\infty} h[x,y]$, второй повторный предел $b=\lim_{y\to\infty} g[y]$ и верны равенства $a=b=c$.

В примере 3 п. 2.2.1 с двойной геометрической прогрессией $h[m,n]=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n u^i v^j$ существуют все простые пределы

$$f[m]=\lim_{n\to\infty} h[m,n]=\left(\sum_{i=1}^m u^i\right)v/(1-v),$$

$m\in\mathbb{N}$, и

$$g[n]=\lim_{m\to\infty} h[m,n]=\left(\sum_{j=1}^n v^j\right)u/(1-u),$$

$n\in\mathbb{N}/$. Сходимость

$$h[m,n]=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n u^i v^j\to\left(\sum_{i=1}^m u^i\right)\frac{v}{1-v}=f[m]$$

при $n\to+\infty$ равномерна по $m\in\mathbb{N}$. В самом деле, используя неравенства треугольника для конечных и бесконечных сумм ([Савельев, 2011а, б]), получаем:

$$\left|h[m,n]-f[m]\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^m u^i\right)\left(\sum_{j=n+1}^\infty v^j\right)\right|\le$$
$$\le\left(\sum_{i=1}^m |u|^i\right)\left(\sum_{j=n+1}^\infty |v|^j\right)\le\frac{|u|}{1-|u|}\frac{|v|^{n+1}}{1-|v|},$$

$$\Delta[n]=\sup\left\{\left|h(m,n)-f(m)\right|, m\in\mathbb{N}\right\}\le$$
$$\le\frac{|u|}{1-|u|}\frac{|v|^{n+1}}{1-|v|}\to 0,$$

при $n\to\infty$, так как по условию $|v|<1$. Есть повторный предел

$$a=\lim_{m\to\infty} f[m]=\left(\sum_{i=1}^\infty u^i\right)\frac{v}{1-v}=\frac{u}{1-u}\frac{v}{1-v}$$

при $y\to\infty$, так как по условию $|v|<1$. По только что доказанному существуют двойной предел $c=\lim_{x\to\infty,y\to\infty} h[x,y]$, второй повторный предел $b=\lim_{y\to\infty} g[y]$ и верны равенства $a=b=c=uv(1-u)^{-1}(1-v)^{-1}$. В примере 3 п. 2.2.1 существование двойного предела предполагалось.

***Замечание***. Равномерная непрерывность функции $f$ на множестве $A\subseteq\mathbb{R}$ означает, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta_0=\delta_0[\varepsilon]>0$ такое, что $\left|f[x]-f[y]\right|<\varepsilon$ при $x,y\in A$, $|x-y|<\delta_0$. Ее можно связать с пределом по направлению $|x-y|\to 0$ ($|x-y|\ne 0$) для плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, при котором $(x,y)\,\square\,(u,v)\Leftrightarrow|x-y|<|u-v|$. Следующей является пара ($x$, $y$), которая ближе к диагонали

$$D=\left\{(x,x):x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(x,y):|x-y|=0\right\}.$$

Если диагональ исключена, что обычно

предполагается, то это направление не вырожденное. Направление $|x-y| \to 0$ для плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ индуцирует направление $|x-y| \to 0$ для квадрата $A \times A$ со стороной $A \subseteq \mathbb{R}$.

Равномерная непрерывность функции $f$ на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$ означает, что $f[x]-f[y] \to 0$ при $|x-y| \to 0$. А непрерывность функции $f$ в точке $x_0 \in A$ означает

$$f[x]-f[x_0] \to 0 \text{ при } |x-x_0| \to 0,$$

$|x-x_0| \neq 0$, что эквивалентно $f[x] \to f[x_0]$ при $x \to x_0$, $x \neq x_0$. В этом случае точка $(x, x_0)$ движется по горизонтальной прямой, проходящей через точку $(x_0, x_0)$. Скорость сходимости $f[x] \to f[x_0]$ при этом можно измерять числами $\delta_0[\varepsilon, x_0]$. Если непрерывность не равномерна, то скорости сходимости для разных $x_0$ могут быть разными. При равномерной непрерывности скорости сходимости по всем таким прямым одинаковы и измеряются числом $\delta_0[\varepsilon]$.

Вместо плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ можно рассматривать пространство $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Все сказанное останется верным. Вещественная плоскость взята для наглядности.

**2.4. *Сходимость в себе*.** О сходящихся в себе вещественных последовательностях подробно рассказывалось в [Савельев, 2011а, б]. Здесь основные определения и утверждения обобщаются на числовые направленности.

**2.4.1. *Определения и свойства*.** Рассмотрим направленное множество ($X$, □), числовую направленность $f: X \to \mathbb{C}$ и ее *двойную направленность* $\Delta: X \times X \to \mathbb{C}$, составленную из разностей $\Delta[x, y] = f[x]-f[y]$, $x, y \in X$. Как легко проверить, во всех примерах со сходящимися к какому-нибудь числу направленностями $f$ их двойные направленности $\Delta$ были бесконечно малы. Это свойство сходящихся к числу направленностей имеет общий характер. Верна

***Лемма о бесконечной малости***. *Если направленность сходится к некоторому числу, то ее двойная направленность бесконечно мала*.

□ Пусть $f \to c$ по направлению □. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 = x_0[\varepsilon/2]$ такой, что $|f[x]-c| < \varepsilon/2$, $|f[y]-c| < \varepsilon/2$ при $x, y$ □ $x_0$. И, следовательно,

$$|f[x]-f[y]| = |f[x]-c-(f[y]-c)| \leq$$
$$\leq |f[x]-c||f[y]-c| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

при $x, y$ □ $x_0$. Двойная направленность $\Delta$ бесконечно мала. ■

Бесконечная малость двойной направленности $\Delta$ означает, что члены данной направленности $f$ начиная с некоторого элемента как угодно мало отличаются друг от друга: направленность *стабилизируется*. Сформулируем

***Определение***. *Направленность сходится в себе, если ее двойная направленность бесконечно мала*.

Данное определение позволяет дать доказанной лемме другую формулировку:

***Лемма о сходимости в себе***. *Если направленность сходится к некоторому числу, то она сходится в себе*.

Примерами сходящихся в себе направленностей служат все сходящиеся к числу направленности. Удобно сходимость в себе направленности $f$ записывать $f[x] \to$ □, $x \to$ □ или $f \to$ □, не указывая направление явно.

Сформулируем эквивалентное ε-определение сходимости в себе.

***ε-определение***. *Направленность $f$ сходится в себе, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 = x_0[\varepsilon]$ такой, что неравенство $|f[x]-f[y]| < \varepsilon$ верно для всех $x, y$ □ $x_0$.*

По этому определению, которое можно использовать и в качестве основного, сходимость в себе направленности $f$ означает, что *при всех достаточно продвинутых аргументах $x$, $y$ разность значений $f[x]$, $f[y]$ функции $f$ произвольно мала*. Часто для проверки сходимости удобно использовать следующее формально несколько более простое условие сходимости в себе направленности.

***Лемма***. *Направленность $f$ сходится в себе тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 = x_0[\varepsilon]$ такой, что неравенство $|f[x]-f[x_0]| < \varepsilon$ верно для всех элементов $x$ □ $x_0$.*

□ Это условие получается из ε-определения при $y = x_0$. А условие ε-определения следует из него благодаря неравенствам

$$|f[x]-f[y]| \le |f[x]-f[x_0]| +$$
$$+|f[y]-f[x_0]| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

при $x, y \square x_0 = x_0[\varepsilon/2]$. ■

Рассмотрим комплексную направленность $f=\xi+\eta i$ со значениями $f[x]= =\xi[x]+\eta[x]i$ и вещественные направленности $\xi=\operatorname{re} f$, $\eta=\operatorname{im} f$ со значениями $\xi[x]$, $\eta[x]$ – вещественную и мнимую части направленности $f$.

***Лемма о сходимости частей***. *Направленность сходится в себе если и только если ее вещественная и мнимая части сходятся в себе.*

□ Сформулированное утверждение сразу следует из определений и неравенств

$$|\xi[x]-\xi[y]|,\ |\eta[x]-\eta[y]| \le |f[x]-f[y]| \le$$
$$\le |\xi[x]-\xi[y]|+|\eta[x]-\eta[y]|. \blacksquare$$

Для направленностей, сходящихся в себе, как и для сходящихся к числу, верна

***Лемма об ограниченности***. *Каждая сходящаяся в себе направленность ограничена начиная с некоторого элемента.*

□ Пусть направленность $f$ сходится в себе. Тогда по ε-определению при $\varepsilon=1$ для всех элементов $x \square x_0 = x_0[1]$ верны неравенства $|f[x]-f[x_0]|<1$ и $|f[x]|<1+|f[x_0]|$. Следовательно, направленность $f$ ограничена начиная с элемента $x_0$. ■

**2.4.2. *Критерий Коши***. Утверждение критерия об эквивалентности сходимости в себе и сходимости к некоторому числу для направленностей является одним из фундаментальных утверждений теории пределов.

Сначала рассматриваются вещественные направленности, для которых критерий Коши выводится из теоремы о нижнем и верхнем пределах.

***Лемма о сходимости к числу***. *Каждая сходящаяся в себе вещественная направленность сходится к некоторому вещественному числу.*

□ Рассмотрим сходящуюся в себе вещественную направленность $f$. По только что доказанному она ограничена. Поэтому для нее определены нижняя и верхняя направленности $g$ и $h$, нижний и верхний вещественные пределы $a=\lim g$, $b=\lim h$. Сходимость направленности $f$ в себе влечет равенство $a=b$. В самом деле, благодаря возрастанию $g$, убыванию $h$ и лемме 2 п. 2.1.2, для всех элементов $x$, $y$, следующих за некоторым элементом $x_1$, верны неравенства $g[x] \le a \le b \le h[y]$. Так как направленность $f$ сходится в себе, то для каждого $\varepsilon>0$ существует элемент $x_2=x_2[\varepsilon]$ такой, что $|f[u]-f[v]|<\varepsilon/3$ и $f[v]<f[u]+\varepsilon/3$ для всех элементов $u$, $v$, следующих за $x_2$. А так как $g[x]=\inf_{u\ge x} f[u]$ и $h[y]=\sup_{v\ge y} f[v]$, то $f[u]-\varepsilon/3 \le g[x]$ и $h[y] \le f[v]+\varepsilon/3$ для некоторых $u \square x$, $v \square y$. Поэтому

$$f[u]-\varepsilon/3 \le a \le b \le f[v]+\varepsilon/3 \le f[u]+2\varepsilon/3$$

при каждом $\varepsilon>0$ и некотором элементе $u=u[\varepsilon]$. Следовательно, $0 \le b-a \le \varepsilon$ при каждом $\varepsilon>0$ и $a=b$. Пусть $a=b=c$. Тогда по теореме о нижнем и верхнем пределах $f \to c$. ■

***Следствие***. *Каждая сходящаяся в себе числовая направленность сходится к некоторому числу.*

□ Пусть направленность $f=\xi+\eta i$ сходится в себе. Тогда по лемме о сходимости частей ее вещественная и мнимая части $\xi$ и $\eta$ тоже сходятся в себе. По лемме о сходимости к числу они сходятся к некоторым вещественным числам: $\xi \to a$, $\eta \to b$. Следовательно, $f \to a+bi$. ■

Из доказанных лемм сразу следует важный критерий существования предела для направленностей. Этот критерий был впервые сформулирован Коши и поэтому носит его имя.

***Критерий Коши***. *Числовая направленность сходится к некоторому числу тогда и только тогда, когда она сходится в себе.*

Короткая кванторная формулировка критерия: $\exists c : f \to c \Leftrightarrow f \to$ .

Критерий Коши позволяет, когда это не приводит к путанице, применять термин *сходящаяся направленность* как к сходящимся *к числу*, так и сходящимся *в себе* направленностям. О сходящихся в себе направленностях говорят, что они удовлетворяют *условию Коши*. Их называют также *направленностями Коши*.

Критерий сходимости Коши широко применяется в теоретических рассуждениях.

**2.4.3. *Критерий Гейне***. Предел секвенцируемой направленности тесно связан с пределами ее направленных подпоследовательностей.

Рассмотрим секвенцируемое направленное множество ($X$, □), числовую направленность $f : X \to \mathbb{C}$ и направленную по □ последовательность элементов $u[n] \in X$ : для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $n_0 = n_0[x]$ такой, что $u[n] \square x$ для всех номеров $n \geq n_0$. Назовем числовую последовательность $f[u[n]]$ *направленной подпоследовательностью* $f$. Подчеркнем, что по данному определению направленной подпоследовательностью *f* является не всякая последовательность ее значений $f[x[n]]$, а только определяемая направленной последовательностью аргументов

$x[n] \in X$.

***Критерий Гейне***. *Секвенцируемая направленность f сходится к числу c тогда и только тогда, когда каждая ее направленная подпоследовательность сходится к c.*

□ (1) Пусть $f \to c$ и, значит, для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_0 = x_0[\varepsilon] \in X$ такой, что $|f[x] - c| < \varepsilon$ для всех $x \square x_0$. Рассмотрим направленную последовательность точек $u[n] \in X$. Выберем номер $n_0 = n[x_0]$ такой, что $u[n] \square x_0$ для всех номеров $n > n_0$. Неравенство $|f[u[n]] - c| < \varepsilon$ верно для всех номеров $n > n_0$ и, значит, $f[u[n]] \to c$ при $n \to \infty$.

(2) Пусть теперь $f[u[n]] \to c$, $n \to \infty$ для каждой направленной подпоследовательности $\left(f[u[n]]\right)$ направленности *f*. Нужно доказать, что $f \to c$. Предположим, что это неверно и, значит, существует $\alpha > 0$ такое, что, какой бы элемент $x \in X$ ни взять, неравенство $|f[y[x]] - c| \geq \alpha$ будет верно при некотором $y[x] \square x$. Возьмем направленную последовательность элементов $x[n]$ и определим по ней последовательность $u[n] = y[x[n]] \square x[n]$. Она направлена вместе с ($x[n]$): для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $n_0 = n_0[x]$ такой, что $u[n] = y[x[n]] \square x[n] \square x$ для всех номеров $n \geq n_0$. Следовательно, $|f[u[n]] - c| \geq \alpha$ для всех значений направленной подпоследовательности ($f[u[n]]$). Все ее значения находятся вне круга $B[c, \alpha]$ с центром $c$ и радиусом $\alpha > 0$, и она не может сходиться к числу $c$. Это противоречит условию. ■

Для проверки сходимости последовательности часто используется вытекающее из критерия Гейне

***Следствие***. *Пусть существуют направленные подпоследовательности*

$f[u[n]] \to a$, $f[v[n]] \to b$, *причем* $a \neq b$. *Тогда направленность f не имеет предела.*

□ Пусть $f \to c$ при некотором $c \in \mathbb{C}$. Тогда по критерию Гейне $f[u[n]] \to c$, $f[v[n]] \to c$. По теореме о единственности предела отсюда следует, что $a = b = c$. Это противоречит условию. Следовательно, направленность *f* не имеет предела. ■

**Пример.** Пусть $f[x] = \sin\left[1/x\right]$ ($-1 < x < 1$, $x \neq 0$) и направление и $x \to 0$. Рассмотрим последовательности $u[n] = 1/\left(\pi n\right) \to 0$, $v[n] = 2/\left(\left(4n-3\right)\pi\right) \to 1$ при $n \to \infty$. Выделим подпоследовательности $f[u[n]] = \sin[\pi n] = 0$,

$$f[v[n]] = \sin\left[\left(4n-3\right)\pi/2\right] = 1 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Так как $f[u[n]] \to 0$, $f[v[n]] \to 1$, то по критерию Гейне функция *f* не имеет предела при $x \to 0$.

Из критериев Гейне и Коши вытекает

***Предложение***. *Секвенцируемая направленность сходится в себе тогда и только тогда, когда каждая ее направленная подпоследовательность сходится в себе.*

Благодаря критерию Коши и тому факту, что направленная подпоследовательность сходящейся направленности имеет тот же предел, это предложение эквивалентно критерию Гейне.

### 3. Суммы

Использование пределов специальных направленностей позволяет суммировать значения функции. Предлагаемое определение суммы значений функции обобщает понятие суммы абсолютно суммируемого ряда.

**3.1. Сумма значений функции.** Сумма ряда определялась как предел последовательности конечных сумм, составленных из членов с подряд идущими номерами. С помощью предела по направлению можно определить сумму значений функции, не нумеруя их аргументы. Такие суммы удобно использовать в тех случаях, когда нет естественной нумерации, согласованной с содержанием задачи.

**3.1.1. *Определения и примеры*.** Рассмотрим произвольное множество $A$ и класс $\mathcal{K} = \mathcal{K}[A]$ всех конечных частей множества $A$. Определим включением $\subseteq$ *направление* $X \to A$ для класса $\mathcal{K}$ : следующим считается каждое множество, содержащее данное. Общим следующим для двух множеств $X$, $Y$ служит их объединение $X \cup Y$, конечное вместе с $X$, $Y$. Если множество $A$ конечно, то направление $X \to A$ для $\mathcal{K}$ *вырожденное*: $A$ следует за каждым $X \in \mathcal{K}$ .

Для каждых числовой функции $f$ на множестве $A$ и конечного множества $X \subseteq A$ определена сумма

$$s[f, X] = \sum_{x \in X} f[x]$$

значений $f[x]$ для $x \in X$. Такие конечные суммы $s[f, X]$ для функции $f$ составляют числовую направленность $s[f, \bullet]$ на классе $\mathcal{K}$ , которая может сходиться и иметь предел по направлению $X \to A$.

**Определение.** *Пусть направленность* $s[f, \bullet]$ *сходится по направлению* $X \to A$. *Суммой значений функции* $f$ *называется предел направленности* $S[f, \bullet]$:

$$s[f] = \lim_{X \to A} s[f, X].$$

Сумму значений функции будем коротко называть ее суммой. Имеющую сумму функцию условимся называть *суммируемой*. По аналогии с рядами определяющее сумму равенство можно записать

$$\sum_{x \in A} f[x] = \lim_{X \to A} \sum_{x \in X} f[x].$$

***Замечание.*** Это определение применимо и для конечного множества $A$. В этом случае переход к пределу можно описать индуктивно, как это делается в алгебре. Термины *суммируемая функция* и *сумма функции* не общеприняты. Обычно говорят о *суммируемом семействе* и *сумме семейства*, используя индексную запись $f_x = f[x]$ значений функции. Здесь термины *функция* и *семейство значений* функции считаются эквивалентными. Подчеркнем, что семейство значений функции нужно отличать от множества ее значений. Например, семейство значений тождественной единицы на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел выражается множеством $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$ пар, а множество $\{1\}$ значений этой постоянной состоит из единственного элемента.

**Пример 1.** Рассмотрим числа $0 < p < 1$, $q > 1$ и функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ со значениями $f[k] = p^k$, $k \geq 0$ и $f[k] = q^k$, $k < 0$. Заметим, что $q^k = r^{|k|}$, $0 < r = 1/q < 1$. Так как

$f[k] > 0$, то направленность конечных сумм $s[f,X]$ строго возрастает:

$$s[f,Y]-s[f,X]=s[f,Y\setminus X]=\sum_{x\in Y\setminus X} f[x]>0$$

при $X\subset Y$. Выделим положительную и строго отрицательную части

$X_+=\{k\in X : k\geq 0\}$, $X_-=\{k\in X : k<0\}$

множества *X*. Из формулы для суммы геометрической прогрессии следует, что $s[f,X_+]<1/(1-p)$ и $s[f,X_-]<1/(1-r)$. Так как $s[f,X]=s[f,X_+]+s[f,X_-]$, то направленность $s[f,X_+]$ ограничена числом $c=1/(1-p)+1/(1-r)$ и по теореме о монотонных направленностях сходится по направлению $X\to\mathbb{Z}$. А так как

$$0<c-s[f,X]\leq p^{m+1}/(1-p)+r^{n+1}/(1-r),$$

где $m=\max\{k : k\in X\}\to\infty$ и

$$n=\max\{|k| : k\in X\}\to\infty \text{ при } X\to\mathbb{Z}.$$

Значит, $s[f,X]\to c$ при $X\to\mathbb{Z}$ и

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} f[x]=\sum_{x\in\mathbb{Z}_+} f[x]+\sum_{x\in\mathbb{Z}_-} f[x]=\frac{1}{1-p}+\frac{1}{1-1/q}.$$

Результат естественный: складываются две геометрические прогрессии.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ со значениями $f[k]=(-1)^k/k$. Заметим, что

$f[2k-1]=-1/(2k-1)$ и

$f[2k-1]=-1/(2k-1)$.

Рассмотрим последовательность сумм $s[f,X[n]]$, $X[n]=\{2k : k\leq n\}$ значений с четными номерами:

$$s[f,X[n]]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

По доказанному в [Савельев, 2011а, б] для гармонического ряда $s[f,X[n]]\to\infty$, $n\to\infty$. Следовательно, направленность $s[f,X]$ не может сходиться. Если бы она сходилась, то по лемме п. 2.1.4 была бы ограничена начиная с некоторого конечного множества номеров $X_0 : s[f,Y]\leq b$, $Y\supseteq X_0$ для некоторого числа *b*. Неравенство $s[f,Y]\leq b$ должно выполняться, в частности, для всех множеств $Y=X_0\cup Y[n]$, $Y[n]=\{2k : \max X_0<k\leq n\}$. Это противоречит неограниченности последовательности $s[f,X[n]]$. Функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ со значениями $f[k]=(-1)^k/k$ не имеет суммы. Вместе с тем, как было показано в [Савельев, 2011а, б], лейбницевский *ряд* $\left((-1)^k/k\right)$ имеет сумму. Но он не *абсолютно* суммируем. Это не позволяет суммировать его члены в произвольном порядке, выбирая, например, сначала только члены с четными номерами.

**Пример 3.** По основной теореме арифметики [Хинчин, 1951]) для каждого натурального числа $n>1$ существуют единственные семейства простых чисел $p_i$ и натуральных $a[i]$ таких, что $n=\prod_{i=1}^{m} p_i^{a[i]}$ ($p_1<\ldots<p_m$ при $m>1$). Обозначим $k$ наибольший общий делитель показателей $a[i]$ и положим $\alpha[i]=a[i]/k$. Верно равенство $n=p^k$, где $p=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha[i]}$ и показатели $\alpha[i]$ *взаимно просты*. Назовем такие числа *p* *примитивными* и обозначим их множество *P*. Например, простые числа примитивны. Каждое натуральное число $n>1$ либо примитивно, либо является степенью с показателем $k>1$ некоторого примитивного числа *p*. Обозначим *A* множество таких *степеней*: $A=\{x=p^k : p\in P, k>1\}$. Рассмотрим функцию $f:A\to\mathbb{R}$ со значениями

$$f[x]=1/(x-1),\ x\in A.$$

Нужно вычислить сумму

$$s=\sum_{x\in A}\frac{1}{x-1}.$$

Каждое конечное множество $X\subset A$ определяется некоторым конечным множеством $P[X]$ примитивных чисел *p* и семейством множеств $K[p]$ показателей $k>1$ таких, что $x=p^k\in X$ при $p\in X$. Возьмем $n>1$ и рассмотрим множество $X[n]=$ $=\{x=m^k : 2\leq m\leq n, 2\leq k\leq n\}\subset A$. Заметим, что некоторые элементы множества $X[n]$ могут быть записаны не один раз (например, $2^4=4^2, 2^6=4^3=8^2$). Такая запись яснее показывает структуру множеств $X[n]$: это квадраты с пустыми клетками вместо повторов. Ясно, что $X[n]\supseteq X$ при $n\geq\max X$. Последовательность $X[n]$ секвенцирует направление $X\to A$ в классе $\mathcal{K}=\mathcal{K}[A]$ конечных частей множества *A*.

Пусть $P[n] = P[X[n]]$ и $[2, n] = \{2, 3, ..., n\}$. Заметим, что из $p^k \le n$, $k \ge 2$ следует $p \le n^{1/k} \le n$, а из $p^k \le n$, $2 \le p \le n$ следует $k \le \log_p n \le n$. Поэтому если $2 \le m \le n$, то либо $m = p \in P[n]$, либо $m = p^k$ при некоторых $p \in P$, $p \le n$ и $2 \le k \le n$. Следовательно,

$$[2, n] \subseteq P[n] \cup X[n].$$

Кроме того, $[2, n] \subseteq K[p]$ при каждом $p \in P[n]$.

Пусть, например, $X = \{2^2, 2^3, 3^2\}$. Тогда $P[X] = \{2, 3\}$, $K[2] = \{2, 3\}$, $K[3] = 2$, $\max[X] = 9$ и $X[9] = \{2^2, 2^3, ..., 2^9; 3^2, 3^3, ..., 3^9; ...; 9^2, 9^3, ..., 9^9\}$. Как легко проверить, $P[9] = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ и $K[2] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21, 24, 27\}$, $K[3] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$, $K[5] = K[6] = K[7] = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Заметим, что $X = \{2^2, 2^3, 3^2\} \subseteq X[9]$ и $[2, 9] = \{2, 3, 2^2, 5, 6, 7, 2^3, 3^2\} \subseteq P[9] \cup X[9]$. Кроме того, $[2, 9] \subseteq K[p]$ при каждом

$$p \in P[n] = \{2, 3, 5, 6, 7\}.$$

Рассмотрим направленность конечных сумм

$$s[X] = \sum_{x \in X} f[x] = \sum_{x \in X} \frac{1}{x-1} = \sum_{p \in P[X]} \sum_{k \in K[p]} \frac{1}{p^k - 1}.$$

Так как $f[x] = 1/(x-1) > 0$, то направленность $s[X]$, $X \to A$, возрастает. Докажем, что она ограничена. Заметим, что для каждых $m$, $k \ge 2$ верны равенства

$$\frac{1}{m^k - 1} = \frac{1}{m^k\left(1 - 1/m^k\right)} = \frac{1}{m^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m^{k-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{m^{k-1}}$$

и вследствие абсолютной суммируемости геометрического ряда

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^{k-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{m^{ik}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{m^{2i}} - \frac{1}{m^{(n+1)i}} \right) \frac{1}{1 - 1/m^i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^i\left(m^i - 1\right)} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^{ni}\left(m^i - 1\right)}.$$

Поэтому при $n \ge \max\{k : p^k \in X\}$ верны соотношения

$$s[X] = \sum_{p \in P[X]} \sum_{k \in K[p]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ki}} \le$$

$$\le \sum_{p \in P[X]} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i\left(p^i - 1\right)} =$$

$$= \sum_{p \in P[X]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ni}\left(p^i - 1\right)}.$$

Следовательно,

$$s[X] \le \sum_{p \in P} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i\left(p^i - 1\right)} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

Равенство сумм следует из определения множества $P$ примитивных чисел: каждое натуральное число $m \ge 2$ либо примитивно, либо однозначно представляется степенью $p^i$ некоторого примитивного числа $p$ с показателем $i > 1$. А равенство единице доказывается с помощью простого преобразования слагаемых:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=2}^{n} \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Таким образом, направленность $s[X]$, $X \to A$, возрастает и ограничена. По теореме о монотонных направленностях она имеет предел. По критерию Гейне он равен пределу ее направленной подпоследовательности $s[n] = s[X[n]]$. Докажем, что этот предел равен единице. Так как $[2, n] \subseteq K[p]$ при каждом $p \in P[n]$, то

$$s[n] = \sum_{p \in P[n]} \sum_{k \in K[p]} \frac{1}{p^k - 1} \ge \sum_{p \in P[n]} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p^k - 1}.$$

Отсюда и из доказанных для сумм чисел $1/\left(m^k - 1\right)$ соотношений следует, что

$$s[n] \ge \sum_{p \in P[n]} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ki}} = t[n] - r[n],$$

где

$$t[n] = \sum_{p \in P[n]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i\left(p^i - 1\right)},$$

$$r[n] = \sum_{p \in P[n]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ni}\left(p^i - 1\right)}.$$

Чтобы доказать, что $s[n] \to 1$, $n \to \infty$, оценим суммы $s[n]$ снизу элементами сходящейся к единице последовательности. Для этого оценим суммы $t[n]$ снизу, а остатки $r[n]$ – сверху. Так как $[2, n] \subseteq P[n] \cup X[n]$, то среди $p^i$ при $p \in P[n]$, $i \ge 1$, есть все натуральные числа $m$ из отрезка $[2, n]$.

Поэтому

$$t[n] \geq \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{n} \left( \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Оценим остаток $r[n]$ сверху. Так как $p \geq 2$, то

$$p^{ni}\left(p^i - 1\right) = p^{(n-1)i} p^i \left(p^i - 1\right) \geq 2^{n-1} p^i \left(p^i - 1\right)$$

и $1\big/\left(p^{ni}\left(p^i-1\right)\right) \leq \left(1/2^{n-1}\right) 1\big/\left(p^i\left(p^i-1\right)\right)$. Поэтому

$$r[n] \leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{p \in P[n]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^{ni}\left(p^i - 1\right)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{p \in P} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i\left(p^i - 1\right)}.$$

Как было показано, последняя сумма равна единице. Следовательно, $r[n] \leq 1/2^{n-1}$ и $s[n] \geq t[n] - r[n] \geq 1 - 1/n - 1/2^{n-1}$. Последовательность $s[n]$ вместе с направленностью $s[X]$ ограничена сверху единицей, и поэтому $1 - 1/n - 1/2^{n-1} \leq s[n] \leq 1$. Следовательно, $s[n] \to 1$, $n \to \infty$, и по критерию Гейне $s[X]$, $X \to A$. Значит,

$$s = \sum_{x \in A} \frac{1}{x-1} = 1.$$

***Замечание***. Такие суммы рассматриваются в теории чисел. Равенство $s = 1$ было впервые доказано Гольдбахом. Элементы множества $A$ можно занумеровать в порядке возрастания и рассматривать сумму полученного ряда. Но определять элемент с каждым данным номером и номер каждого данного элемента множества $A$ при такой нумерации будет непросто.

**3.1.2.** ***Критерии суммируемости***. Эффективные критерии суммируемости следуют из определения суммы функции и критерия Коши сходимости направленностей. Всюду в этом пункте рассматриваются: множество $A$, класс $\mathcal{K} = \mathcal{K}[A]$ конечных частей множества $A$ с направлением $X \to A$, функция $f : A \to \mathbb{C}$, направленность $s[X] = s[f, X]$, $X \in \mathcal{K}$ ее конечных сумм.

***Критерий Коши***. *Числовая функция суммируема тогда и только тогда, когда направленность ее конечных сумм сходится в себе.*

□ Суммируемость функции $f : A \to \mathbb{C}$ означает существование предела при $X \to A$ направленности ее конечных сумм $s[X]$, $X \in \mathcal{K}$. По критерию Коши сходимости такой предел существует тогда и только тогда, когда направленность $s[X]$ сходится в себе при $X \to A$. ■

Часто бывает полезен следующий критерий суммируемости, вытекающий из критерия Коши.

***ε-критерий.*** *Функция $f : A \to \mathbb{C}$ суммируема тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $X_0[\varepsilon] \in \mathcal{K}$ такое, что неравенство $|s[Z]| < \varepsilon$ верно для всех множеств $Z \in \mathcal{K}$, не имеющих общих элементов с $X_0[\varepsilon]$.*

□ Если функция $f$ суммируема, то по критерию Коши направленность $s[X]$ сходится в себе при $X \to A$. По ε-определению эта сходимость означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $X_0[\varepsilon] \in \mathcal{K}$ такое, что неравенство $|s[X] - s[Y]| < \varepsilon$ верно для всех множеств $X, Y \in \mathcal{K}$, содержащих $X_0[\varepsilon]$. Пусть $X \supseteq Y$. Тогда

$$s[X] - s[Y] = \sum_{x \in X} f[x] - \sum_{x \in Y} f[x] =$$

$$= \sum_{x \in X \setminus Y} f[x] = s[X \setminus Y].$$

Возьмем множество $Z \in \mathcal{K}$, не имеющее общих элементов с $X_0[\varepsilon]$ и множества $X = X_0[\varepsilon] \cup Z$, $Y = X_0[\varepsilon]$. Ясно, что $X \setminus Y = Z$. Так как $X \supseteq Y \supseteq X_0[\varepsilon]$, то $|s[Z]| = |s[X] - s[Y]| < \varepsilon$ по определению множества $X_0[\varepsilon]$. Условие ε-критерия выполнено.

Обратно: пусть условие ε-критерия выполнено. Возьмем множества $X, Y \in \mathcal{K}$, содержащие $X_0[\varepsilon]$. Пусть $X \supseteq Y$. Тогда множество $Z = X \setminus Y$ не имеет общих элементов с $X_0[\varepsilon]$ и по условию

$$|s[X] - s[Y]| = |s[Z]| < \varepsilon.$$

Направленность $s[X]$ сходится в себе и по критерию Коши функция $f$ суммируема. ■

Условие ε-критерия можно пояснить следующими словами: *при исключении достаточно большого числа значений функции любая конечная сумма оставшихся произвольно мала.*

Из ε-критерия легко выводятся два важных следствия.

***Следствие 1***. *Все сужения суммируемой функции суммируемы*.

□ Рассмотрим дополнительно: множество $B \subseteq A$, класс $K\,[B] = K$ конечных частей множества $B$ с направлением $Y \to B$, сужение $g : B \to \mathbb{C}$ функции $f : A \to \mathbb{C}$, направленность $s[Y] = s[f, Y] = s[g, Y]$, $Y \in K\,[B]$ конечных сумм функции $g$. Если функция $f$ суммируема, то по ε-критерию каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $X_0[\varepsilon] \in K$ такое, что неравенство $|s[Z]| < \varepsilon$ верно для всех множеств $Z \in K$, не имеющих общих элементов с $X_0[\varepsilon]$. Пусть

$$Y_0[\varepsilon] = B \cap X_0[\varepsilon] \in K\,[B].$$

Каждое $Z \subseteq B$, не имеющее общих элементов с $Y_0[\varepsilon]$, не имеет их и с $X_0[\varepsilon]$: так как $Z = Z \cap B$, то

$$Z \cap X_0[\varepsilon] = (Z \cap B) \cap X_0[\varepsilon] =$$
$$= Z \cap (B \cap X_0[\varepsilon]) = Z \cap Y_0[\varepsilon] = \emptyset.$$

Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $Y_0[\varepsilon] \in K\,[B]$ такое, что неравенство $|s[g, Y]| = |s[f, Y]| < \varepsilon$ верно для всех множеств $Z \in K$, не имеющих общих элементов с $Y_0[\varepsilon]$. Условие ε-критерия для функции $g$ выполнено и она суммируема. ■

***Замечание***. Аналогичное утверждение для рядов неверно. Например, лейбницевский ряд $\left((-1)^k / k\right)$ имеет *порядковую сумму*, а получающиеся его сужениями с сохранением порядка ряды $\left((-1)^{2k-1} / (2k-1)\right)$ и $\left((-1)^{2k} / (2k)\right)$ несуммируемы. Это объясняется тем, что при вычислении суммы ряда учитывается порядок его членов, а при вычислении суммы значений функции они не связываются с определенным порядком. В связи с этим такое суммирование называют *неупорядоченным*.

Суммируемость функции $f$ означает сходимость направленности ее конечных сумм $s[X]$. Из сходимости направленности $s[X]$ следует ее ограниченность начиная с некоторого множества $X_0 \in K$. Оказывается, что она вообще ограничена.

***Следствие 2***. *Если числовая функция суммируема, то множество всех ее конечных сумм ограничено*.

□ Если функция $f$ суммируема то по ε-критерию существует множество $X_0[1] \in K$ такое, что для всякого множества $Z \in K$, не имеющего общих элементов с $X_0[1]$, верно неравенство $|s[Z]| < 1$. Так как множество $X_0[1]$ конечно, то класс $K_0 = K\,[X_0[1]]$ всех его частей $U$ тоже конечен и множество абсолютных значений сумм $s[U]$ ограничено: $c = \max\{|s[U]| : U \in K_0\} < \infty$.

Возьмем произвольное множество $X \in K$. Ясно, что $X = U \cup Z$, где $U = X \cap X_0[1]$, $Z = X \setminus X_0[1]$ и $Z$ не имеет общих элементов с $X_0[1]$. Поэтому

$$|s[X]| = |s[U] + s[Z]| \le |s[U]| + |s[Z]| \le c + 1.$$

Множество конечных сумм $s[X]$ значений функции $f$ ограничено. ■

***Замечание***. Будет доказано и обратное утверждение: если множество всех конечных сумм значений функции ограничено, то она суммируема.

Ясно, что из ограниченности множества всех сумм значений функции следует ограниченность множества ее значений: они являются суммами с одним слагаемым. Из следствия 2 вытекает

***Следствие 3***. *Суммируемая функция ограничена*.

Приведем простой пример применения ε-критерия.

**Пример.** Рассмотрим числа $0 < p < 1$, $q > 1$ и функцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ со значениями $f[k] = p^k$, $k \ge 0$ и $f[k] = q^k$, $k < 0$. Рассмотрим последовательность множеств $X[n] = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \le n\}$. Для каждого непересекающегося с $X[n]$ множества $Z$ и для $r = 1/q < 1$ верны неравенства

$$0 < s[Z] \le c[n] = p^{n+1} / (1-p) + r^{n+1} / (1-r).$$

Так как $c[n] \to 0$, $n \to \infty$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0[\varepsilon]$ такой, что $c[n_0] < \varepsilon$ и $0 < s[Z] < \varepsilon$. По ε-критерию функция $f$ суммируема.

Направленность $s[f, X]$ ограничена числом $c = 1/(1-p) + 1/(1-r)$, как было показано в примере 1 п. 3.1.1.

**3.1.3.** ***Алгебраические свойства***. Сумма значений функции сохраняет основные свойства обычной суммы с конечным множеством слагаемых. Ее свойства аналогичны свойствам суммы абсолютно суммируемого ряда. Одним из главных свойств суммы является ее линейность. Как и прежде, всюду в этом пункте рассматриваются абстрактное множество $A$ и класс $\mathcal{K}$ конечных частей множества $A$ с направлением $X \to A$, вещественные или комплексные функции на множестве $A$ и направленности их конечных сумм на классе $\mathcal{K}$.

Рассмотрим числа $a, b$, множество $A$, числовые функции $f, g, h = af + bg$ на $A$, конечное множество $X \subseteq A\left(X \in \mathcal{K}\right)$ и конечные суммы

$$s[f, X] = \sum_{x \in X} f[x],$$

$$s[g, X] = \sum_{x \in X} g[x], \ s[h, X] = \sum_{x \in X} h[x].$$

***Лемма о линейности***. *Если функция $f$ имеет сумму $s[f]$ и функция $g$ имеет сумму $s[g]$, то функция $h$ имеет сумму $s[h] = = as[f] + bs[g]$.*

□ Это следует из линейности конечной суммы и предельного перехода. Так как множество $X$ конечно, то

$$s[h, X] = \sum_{x \in X} h[x] = \sum_{x \in X}\left(af[x] + bg[x]\right) =$$
$$= as[f, X] + bs[g, X].$$

Следовательно,

$$s[h] = \lim_{X \to A} s[h, X] = \lim_{X \to A}\left(as[f, X] + bs[g, X]\right) =$$
$$= a \lim_{X \to A} s[f, X] + b \lim_{X \to A} s[g, X] =$$
$$= as[f] + bs[g]. \ \blacksquare$$

В частности, $s[f + g] = s[f] + s[g]$ при $a = 1$, $b = 1$ и $s[af] = as[f]$ при $b = 0$. Эти равенства выражают соответственно *линейность*, *аддитивность* и *однородность* операции суммирования функций. Аддитивность и однородность в совокупности эквивалентны линейности.

Рассмотрим вещественные функции $f$, $g$ на $A$ и функцию $h = f + gi$. Из леммы о линейности и леммы о сходимости вещественной и мнимой частей направленности вытекает

***Лемма 1 о частях***. *Функция $h = f + gi$ суммируема тогда и только тогда, когда ее вещественная часть $f$ и мнимая часть $g$ суммируемы. В этом случае верно равенство $s[h] = s[f] + s[g]i$.*

□ Если функции $f$, $g$ суммируемы, то суммируемость $h$ и равенство для сумм следует из леммы о линейности суммы.

Докажем обратное утверждение. Для каждого конечного множества $X \subseteq A$ верны равенства $s[h, X] = s[f, X] + s[g, X]i.$ Если $h$ суммируема, то по лемме о сходимости вещественной и мнимой частей из $s[h, X] \to$ $\to c = a + bi$ следует, что $s[f, X] \to a$ и $s[g, X] \to b$ при $X \to A$. Значит, $s[h] = c$, $s[f] = a$, $s[g] = b$ и $s[h] = s[f] + s[g]i$. ■

Рассмотрим вещественную функцию $f : A \to \mathbb{R}$ и определенные в п. 1.2.4 ее положительную и отрицательную части $f^+$, $f^-$.

***Лемма 2 о частях***. *Вещественная функция $f$ суммируема тогда и только тогда, когда ее положительная часть $f^+$ и отрицательная часть $f^-$ суммируемы. В этом случае верно равенство*

$$s[f] = s[f^+] - s[f^-].$$

□ Если функции $f^+$, $f^-$ суммируемы, то суммируемость $f$ и равенство для сумм следует из равенства $f = f^+ + f^-$ и леммы о линейности суммы.

Докажем обратное утверждение. Из определений следует, что для каждого конечного множества $X \subseteq A$ верны равенства $s[f, X] = s[f^+, X] - s[f^-, X]$. Так как

$$f^+[x] \geq 0 \ \text{ и } \ f^-[x] \geq 0,$$

то направленности $s[f^+, X]$ и $s[f^-, X]$ возрастают по направлению $X \to A$. Заметим, что

$$s[f^+, X] = s[f, X_+] \ \text{ и } \ s[f^-, X] = s[f, X_-],$$

где

$$X_+ = \left\{x \in X : f[x] > 0\right\} \ \text{и}$$
$$X_- = \left\{x \in X : f[x] < 0\right\}.$$

Если функция $f$ суммируема, то множество всех ее конечных сумм ограничено (следствие 2 ε-критерия). Следовательно, направленности $s[f^+, X]$ и $s[f^-, X]$ возрастают и ограничены. Значит, они сходятся: $s[f^+, X] \to s[f^+]$ и $s[f^-, X] \to s[f^-]$ при $X \to A$. По лемме о линейности суммы отсюда следует, что $s[f, X] \to s[f]$ при $X \to A$ и $s[f] = s[f^+] - s[f^-]$. ■

***Замечание***. Аналогичное утверждение для рядов неверно. Например, лейбницевский ряд $f[k] = \left(-1\right)^k / k$ имеет *порядковую* сумму, а его положительная и отрицательная части $f^+[k]=(-1)^{2k}/(2k)$, $f^-[k]=-(-1)^{2k}/(2k)$ их не имеют.

В доказательстве можно вместо положительной и отрицательной частей $f^+$, $f^-$ рассматривать сужения $f_+$, $f_-$ функции $f:A\to\mathbb{R}$ на множества

$$A_+=\{x\in A: f[x]>0\} \text{ и}$$
$$A_-=\{x\in A: f[x]<0\}.$$

Если функция $f$ суммируема, то и ее сужения $f_+$, $f_-$ суммируемы (следствие 1 п. 3.1.2). Ясно, что $s[f_+]=s[f^+]$, $s[f_-]=-s[f^-]$ и $s[f]=s[f_+]+s[f_-]$.

Рассмотрим: вещественные функции $f$, $g$ на $A$, их положительные и отрицательные части $f^+, g^+$ и $f^-$, $g^-$, функцию $h=f+gi$. Верна

***Теорема о суммируемости частей***. *Функция* $h=f+gi$ *суммируема тогда и только тогда, когда функции* $f^+, g^+$ *и* $f^-$, $g^-$ *суммируемы. В этом случае верно равенство*

$$s[h]=s[f^+]-s[f^-]+\left(s[g^+]-s[g^-]\right)i.$$

□ Если функции $f^+, g^+$ и $f^-$, $g^-$ суммируемы, то суммируемость $h$ и равенство для сумм следует из леммы о линейности суммы.

Докажем обратное утверждение. Если $h$ суммируема, то по лемме 1 суммируемы функции $f$ и $g$, а по лемме 2 отсюда следует суммируемость функций $f^+, f^-$ и $g^+$, $g^-$. По лемме о линейности верно и нужное равенство для сумм. ■

**Пример.** Рассмотрим числа $0<\alpha$, $\beta<1$, $\gamma,\delta>1$ и вещественные функции $f$, $g$ на $\mathbb{Z}$ со значениями $f[k]=(-1)^k\alpha^k, k\ge 0,$ и $f[k]=(-1)^k\gamma^k$, $k<0$; $g[k]=(-1)^k\beta^k, k\ge 0,$ и $g[k]=(-1)^k\delta^k, k<0$. Составим комплексную функцию $h=f+gi$. Положительные и отрицательные части функций $f$, $g$ имеют значения:

$$f^+[k]=\alpha^{2k},\ k\ge 0 \text{ и } f^+[k]=\gamma^{2k},\ k<0;$$
$$f^-[k]=\alpha^{2k+1},\ k\ge 0 \text{ и } f^-[k]=\gamma^{2k+1},\ k<0;$$
$$g^+[k]=\beta^{2k},\ k\ge 0 \text{ и } g^+[k]=\delta^{2k},\ k<0;$$
$$g^-[k]=\beta^{2k+1},\ k\ge 0 \text{ и } g^-[k]=\delta^{2k+1},\ k<0.$$

Как было показано в примере 1 п. 3.1.1, их суммы вычисляются по формулам для сумм геометрической прогрессии:

$$s[f^+]=\frac{1}{1-\alpha^2}-\frac{1}{1-\gamma^2},\ s[f^-]=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}-\frac{\gamma}{1-\gamma^2},$$
$$s[g^+]=\frac{1}{1-\beta^2}-\frac{1}{1-\delta^2},\ s[g^-]=\frac{\beta}{1-\beta^2}-\frac{\delta}{1-\delta^2}.$$

Следовательно,

$$s[f]=\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\gamma},\ s[g]=\frac{1}{1+\beta}-\frac{1}{1+\delta},$$
$$s[g]=\frac{1}{1-\beta^2}-\frac{\beta}{1-\beta^2}=\frac{1}{1+\beta},$$
$$s[h]=s[f]+s[g]i=$$
$$=\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\gamma}\right)+\left(\frac{1}{1+\beta}-\frac{1}{1+\delta}\right)i.$$

Результат естественный: комбинируются четыре геометрические прогрессии.

**3.1.4.** ***Абсолютная суммируемость***. Рассмотрим множество $A$, класс $\mathcal{K}=\mathcal{K}[A]$ конечных частей множества $A$ с направлением $X\to A$, функцию $f:A\to\mathbb{C}$ и ее абсолютную функцию $|f|$ со значениями $|f|[x]=|f[x]|$, $x\in A$. Будем говорить, что функция $f$ *абсолютно суммируема*, если ее абсолютная функция $|f|$ суммируема.

***Замечание***. Как будет показано, абсолютная суммируемость функции эквивалентна ее суммируемости. Но суммы функций $f$ и $|f|$ в общем случае различны. Поэтому и для того, чтобы сравнивать суммирование рядов и функций, абсолютную суммируемость функции целесообразно выделять особо.

Из ε-критерия суммируемости следует эффективно применяемый для проверки абсолютной суммируемости принцип сравнения. Назовем *мажорантой* функции $f$ всякую положительную функцию $\varphi$ на множестве $A$, для значений которой верны неравенства $|f[x]|\le\varphi[x]$, $x\in A$.

***Принцип сравнения***. *Функция абсолютно суммируема тогда и только тогда, когда у нее есть суммируемая мажоранта*.

□ Если функция $f$ абсолютно суммируема, то суммируемой мажорантой для нее служит абсолютная функция $|f|$. Обратное утверждение следует из ε-критерия и неравенства $\sum_{x\in Z}|f[x]|\le\sum_{x\in Z}\varphi[x]$, верного для всех множеств $Z\in\mathcal{K}$. ■

Также легко из критерия выводится

***Лемма***. *Если функция абсолютно суммируема, то она суммируема.*

□ Если функция $f$ абсолютно суммируема и функция $|f|$ суммируема, то по неравенству треугольника и ε-критерию при каждом $\varepsilon>0$ неравенство $\left|\sum_{x\in Z}f[x]\right|\le\sum_{x\in Z}|f[x]|<\varepsilon$ верно для всех множеств $Z\in\mathcal{K}$, не имеющих общих элементов с некоторым $X_0[\varepsilon]\in\mathcal{K}$. По ε-критерию функция $f$ суммируема. ■

Для функций верно и обратное совсем не очевидное утверждение. Их объединяет

***Теорема об абсолютной суммируемости***. *Функция суммируема тогда и только тогда, когда она абсолютно суммируема.*

□ Благодаря лемме нужно доказать только утверждение, обратное утверждению леммы: если функция суммируема, то она абсолютно суммируема.

Рассмотрим суммируемую функцию $h=f+gi$ на $A$, ее вещественную и мнимую части $f$, $g$. Из леммы 1 о суммируемости частей следует, что функции $f$, $g$ суммируемы. По лемме 2 о суммируемости частей, положительные и отрицательные части $f^+,g^+$ и $f^-,g^-$ функций $f$, $g$ суммируемы. Из леммы о линейности следует, что абсолютные функции $|f|=f^++f^-$, $|g|=g^++g^-$ суммируемы и их сумма $\varphi=|f|+|g|$. Функция φ мажорирует $f$: по неравенству треугольника

$$|h[x]|=|f[x]+g[x]i|\le|f[x]|+|g[x]|=\varphi[x],$$

$x\in A$. По принципу сравнения функция $h$ абсолютно суммируема. ■

***Замечание***. Аналогичное утверждение для рядов неверно. Например, лейбницевский ряд $f[k]=(-1)^k/k$ имеет порядковую сумму, а гармонический ряд $f[k]=1/k$ ее не имеет.

Из теоремы об абсолютной суммируемости легко вывести эффективный и простой критерий суммируемости: для того, чтобы функция была суммируема, необходимо и достаточно, чтобы множество ее конечных сумм было ограничено. Верна

***Лемма***. *Если множество конечных сумм положительной функции ограничено, то она суммируема.*

□ Направленность $s[f,X]$ конечных сумм положительной функции $f$ возрастает. Если эта направленность ограничена, то она сходится и функция $f$ суммируема. ■

***Критерий ограниченности***. *Функция суммируема тогда и только тогда, когда множество ее конечных сумм ограничено.*

□ Рассмотрим: функцию $h=f+gi$ на множестве $A$, ее вещественную и мнимую части $f$, $g$, их положительные и отрицательные части $f^+,g^+$ и $f^-$, $g^-$. Если функция $h$ суммируема, то по следствию 2 ε-критерия множество ее конечных сумм ограничено.

Докажем обратное утверждение. Пусть множество конечных сумм функции $h$ ограничено: $c=\max\{|s[h,X]|:X\in\mathcal{K}\}<\infty$. Так как абсолютная величина комплексного числа больше абсолютных величин его вещественной и мнимой частей, то $|s[f,X]|$, $|s[g,X]|\le|s[h,X]|\le c$ для всех множеств $X\in\mathcal{K}$. В частности,

$$s[f^+,X]=s[f,X_+]\le c \text{ и}$$

$$s[f^-,X]=s[f,X_-]\le c,$$

где

$$X_+=\{x\in X:f[x]>0\} \text{ и}$$

$$X_-=\{x\in X:f[x]<0\}.$$

Точно так же

$$s[g^+,X]\le c \text{ и } s[g^-,X]\le c.$$

Функции $f^+,f^-$, $g^+$, $g^-$ положительны и по лемме ограниченность конечных сумм влечет суммируемость этих функций. Из суммируемости функций $f^+,f^-$, $g^+$, $g^-$ следует суммируемость их линейной комбинации

$$h=f+gi=\left(f^+-f^-\right)+\left(g^+-g^-\right)i. \ ■$$

Этот критерий часто бывает удобен. В примерах 1 и 3 п. 3.1.1 множества конечных сумм были ограничены, а в примере 2 – нет. Так как ограниченность конечных сумм функции автоматически влечет ограниченность конечных сумм всех ее сужений, то из критерия ограниченности сразу следует выведенная раньше из ε-критерия суммируемость всех сужений суммируемой функции.

**Пример 1.** Рассмотрим множество $A=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:m,n>1\}$ пар натуральных чисел строго больших единицы и функцию $f$ на $A$, имеющую значения $f[m,n]=1/n^m$. Докажем, что функция $f$ суммируема.

Рассмотрим произвольное конечное множество $X \subset A$ и возьмем натуральное число $p = \max\{m+n : (m,n) \in X\}$ и множество $Y = \{(m,n) : 2 \le m \le p, 2 \le n \le p\}$. Ясно, что $X \subseteq Y$. Сумму $s[f,Y]$ по аналогии с примером 3 в п. 3.1.1 легко оценить. Так как конечная сумма обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то, суммируя члены геометрического ряда $(1/n)^m$, $2 \le m \le p$, получаем:

$$s[f,Y] = \sum_{n=2}^{p}\sum_{m=2}^{p}\frac{1}{n^m} =$$

$$= \sum_{n=2}^{p}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^p(n-1)}\right) \le \sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n(n-1)}.$$

А так как

$$\sum_{n=2}^{p}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{p}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{p} \le 1$$

и функция $f$ положительна, то для всех конечных $X \subset A$ верны неравенства $s[f,X] \le s[f,Y] \le 1$. По критерию ограниченности функция $f$ суммируема.

**Пример 2.** Рассмотрим множество $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ и функцию $f$ на $A$ со значениями $f[x] = 1/(2^n n)$, если $x$ несократимая рациональная дробь $m/n$, и $f[x] = 0$, если $x$ иррационально. Докажем, что функция $f$ суммируема.

Рассмотрим произвольное конечное множество $X \subset A$. Ясно, что в сумме $s[f,X]$ нужно учитывать только ненулевые рациональные слагаемые $f[x] = 1/(2^n n)$, $x = m/n \in X$. Пусть $X[n]$ – множество дробей $x \in X$, имеющих знаменатель $n$; $K = K[X]$ – множество таких знаменателей; $n \in K$ означает, что $x = m/n \in X$ при некотором $m$; $M[n]$ – множество числителей $m$ дробей $x = m/n \in X$. Заметим, что несократимых дробей $m/n$ со знаменателем $n$ не больше $n$. Поэтому в каждом множестве $M[n]$ не больше $n$ элементов и

$$s[f,Y] = \sum_{x \in X} f[x] = \sum_{n \in K}\sum_{x \in X[n]} f[x] =$$

$$= \sum_{n \in K}\sum_{m \in M[n]}\frac{1}{n2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

По критерию ограниченности функция $f$ суммируема.

***Замечание.*** Функцию со значениями $f[x] = 1/n$, $x = m/n \in [0,1]$, для взаимно простых *m*, *n* рассматривал Риман, исследуя условия интегрируемости. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$ и каждой иррациональной точке отрезка [0, 1]. В каждой ненулевой рациональной точке она разрывна. Используя критерий ограниченности, нетрудно убедиться в том, что такая функция $f$ не суммируема.

## Список литературы


*Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1968.

*Савельев Л. Я.* Комплексные числа и геометрические преобразования // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 2–17.

*Савельев Л. Я.* Элементы теории пределов (последовательности) (часть 1) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2010а. Т. 11, вып. 1. С. 3–23.

*Савельев Л. Я.* Элементы теории пределов (последователности) (часть 2) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2010б. Т. 11, вып. 2. С. 3–29.

*Савельев Л. Я.* Элементы теории пределов (ряды) (часть 1) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011а. Т. 12, вып. 1. С. 3–26.

*Савельев Л. Я.* Элементы теории пределов (ряды) (часть 2) // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Педагогика. 2011б. Т. 12, вып. 2. С. 3–35.

*Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Ч. 1–3.

*Шатуновский С. О.* Введение в анализ. Одесса: Mathesis, 1923.

*Хинчин А. Я.* Элементы теории чисел. Энциклопедия элементарной математики. М.: Гостехиздат, 1951. Кн. 1. Арифметика.

*Moore E. N.*, *Smith H. L.* A general theory of limits // Amer. J. Math. 1922. Vol. 44. P. 102–121.


*Материал поступил в редколлегию 20.09.2011*

**L. J. Saveljev**

**ELEMENTS OF THEORY OF LIMITS (NETS)**

Elements of the theory of limits for numerical functions on the directed sets (nets) are stated. The article is intended for beginners studying the mathematical analysis. The concept of infinitesimal is considered to be the principal for this theory. Many detailed examples are presented. Simple examples are followed by more difficult ones to help understanding general definitions.

*Keywords*: function, direction, net, infinitesimal, convergence, limit, sum, summation.