

Б. А. Князев¹, В. С. Черкасский²

¹ Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 11, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: Knyazev@inp.nsk.su

² Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: Cherk@phys.nsu.ru

ОТРАЖАЮЩИЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЕМ ТЕРАГЕРЦОВОГО ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ *

Отражательные дифракционные оптические элементы (ДОЭ) имеют большие перспективы в качестве устройств для управления монохроматическим излучением мощного терагерцового лазера на свободных электронах и создания оптических систем на рабочих станциях. Они характеризуются высокой лучевой стойкостью по сравнению с пропускающими элементами, менее массивны и трудоемки в изготовлении по сравнению с параболическими зеркалами, на их основе могут быть созданы фокусаторы для формирования изображений со сложными очертаниями. При работе «на отражение» для разделения падающего и отраженного пучков излучение должно падать на ДОЭ под углом. В работе проведен анализ дифракции плоской электромагнитной волны и гауссова пучка при наклонном падении на отражательный ДОЭ и рассмотрены частные случаи зонной пластинки Френеля и киноформной линзы. Детально описана техника численных расчетов дифрагированных пучков в параксиальном приближении. Описаны способы изготовления отражательных зонных пластинок и киноформной линзы. Выполнены измерения распределения интенсивности терагерцового излучения вдоль оптической оси и в поперечном сечении областей перегибки для зонных пластинок и киноформной линзы при фокусировке стоваттного пучка Новосибирского лазера на свободных электронах диаметром около восьми сантиметров при нескольких длинах волн в интервале 130–180 мкм. Показано, что результаты экспериментов и численных расчетов достаточно хорошо совпадают. Расчеты построения изображения с помощью киноформной линзы подтверждают перспективность создания оптических систем для лазеров на свободных электронах на основе отражательных дифракционных оптических элементов.

Введение

Дифракционные оптические элементы (ДОЭ) являются искусственными двумерными структурами, изменяющими в каждой точке своей поверхности фазу и амплитуду падающей на них электромагнитной волны и позволяющими сформировать пучки с заранее заданными свойствами. Дифракционные оптические элементы широко используются в видимом диапазоне спектра, в котором хорошо развиты компьютерные методы расчета ДОЭ позволяют построить весьма сложные изображения [1; 2; 3]. Дифракционные элементы используются также для управления пучками и в области сантиметровых и метровых волн [4]. Характерные

размеры структуры ДОЭ должны по порядку величины соответствовать длине волны излучения, поэтому при создании ДОЭ для оптического диапазона, как правило, используется фотолитография [5], тогда как в СВЧ-диапазоне структуры имеют макроскопические размеры и их легко изготовить.

В последние годы происходит освоение терагерцового диапазона частот, для которого до недавнего времени не существовало ни источников излучения, ни детекторов. Начало исследованиям было положено благодаря изобретению метода генерации широкополосного излучения терагерцового диапазона путем возбуждения фемтосекундным лазерным импульсом фотопроводящей антенны или электрооптических

* Данная работа частично поддержана Интеграционными грантами СО РАН №174/6 и №22/6, а также грантом РНП.2.1.1.3846 Министерства образования и науки РФ.

Мы благодарим Н. А. Винокурова и Г. Н. Кулипанова за полезные обсуждения, а В. В. Котенкова, В. В. Кубарева, А. Н. Матвеевко, П. Д. Рудыча, Т. В. Саликову, С. С. Середнякова и М. А. Щеглова за помощь при проведении экспериментов на НЛСЭ. В экспериментальном разделе рис. 7 заимствован из курсовой работы П. П. Пономаренко и С. С. Якушкина [20].

материалов [6; 7]. Затем появились другие импульсные и непрерывные генераторы излучения (см., например, [8]), описание которых не входит в задачи данной работы. Для управления терагерцовым излучением широко используются квазиоптические отражательные элементы, причем наиболее часто внеосевые параболические зеркала. Использование ДОЭ в случае широкополосного излучения невозможно из-за зависимости угла дифракции от длины волны, а в случае малой длительности импульса излучения трудно обеспечить интерференцию волн, отраженных от разных точек поверхности элемента.

Иная ситуация складывается в случае терагерцового излучения, генерируемого Новосибирским лазером на свободных электронах (НЛСЭ) [9], имеющего длительность импульса порядка 70 пс. Монохроматичность и большая длина когерентности излучения, равная длине светового импульса (1–3 см), позволяют использовать для трансформации пучка дифракционные элементы. Уникально высокая средняя мощность, составляющая сотни ватт, и достаточно высокая импульсная мощность излучения, достигающая 0,6 МВт, ограничивают использование пропускающей оптики из-за опасности ее разрушения, поскольку в терагерцовом диапазоне нет материалов, имеющих столь же низкий коэффициент поглощения, как у материалов, используемых в видимом диапазоне. После запуска в ближайшем будущем второй очереди НЛСЭ, генерирующего излучение в области среднего ИК (30–120 мкм) с киловаттным уровнем средней мощности, разработка отражательных ДОЭ станет еще более актуальной.

В простейших случаях для фокусировки терагерцового излучения или построения изображений можно использовать фокусирующие зеркала, снимающие проблему лучевой стойкости. Необходимость вывести плоскость изображения из объема, занятого падающим пучком, ведет к необходимости использовать для этого внеосевые параболические зеркала. С помощью такого зеркала, в частности, на НЛСЭ был получен непрерывный оптический разряд в атмосферном воздухе [10]. Альтернативным способом фокусировки являются ДОЭ. Их производство с учетом большого диаметра лазерного пучка (порядка 100 мм) менее трудоемко, чем производство внеосевых параболических зеркал. Достоинством зеркал явля-

ется независимость фокусного расстояния от длины волны, тогда как ДОЭ позволяют создавать «фокусаторы» – устройства, формирующие фокальное пятно произвольных очертаний или даже концентрирующие энергию излучения в объеме заданной формы [1]. Последняя задача встает, например, в планируемых экспериментах по управлению сверхзвуковыми газовыми потоками путем регулируемого ввода энергии терагерцового излучения в заданный объем [11], для которых нет альтернативы использования ДОЭ. Еще одним важным аргументом в пользу использования ДОЭ для управления мощным излучением ЛСЭ является удобство их охлаждения по сравнению с охлаждением вогнутых зеркал.

В данной работе описаны методы расчета фокусировки излучения двумя простейшими типами отражательных ДОЭ – зонной пластинкой Френеля и киноформной линзой, технология изготовления таких элементов, предназначенных для работы в терагерцовом диапазоне частот, и приведены результаты их испытаний в пучке излучения лазера на свободных электронах с мощностью порядка 100 Вт. В отличие от случая линзы, когда лучи, сходящиеся в фокусе или плоскости изображения, таутохронны, в киноформных элементах интерферируют лучи, исходящие из разных волновых фронтов, поэтому в общем случае нужно учитывать степень когерентности интерферирующих волн. Поскольку в случае НЛСЭ при достаточно больших фокусных расстояниях временная когерентность излучения (порядка 70 пс) в достаточной степени превышает разность хода лучей от центра и краев ДОЭ (около 16 пс при самом коротком фокусном расстоянии 250 мм), при расчетах для простоты мы будем считать излучение полностью когерентным.

Содержание данной статьи в значительной степени пересекается с материалом, входящим в университетские курсы электродинамики и оптики, и может быть использовано в семинарских занятиях, в лабораторном практикуме и курсах компьютерного моделирования. По этой причине мы сочли полезным привести здесь некоторые промежуточные вычисления, которые обычно исключаются из научных статей, а в приложении достаточно детально описали технику численных расчетов световой волны, отраженной от зонной пластинки Френеля и киноформной линзы.

В рамках скалярной теории Кирхгофа выполнен расчет дифракции при падении плоской волны на отражающий и пропускающий дифракционный оптический элемент под углом θ . Показано, что если ДОО «растянуть» в меридиональной плоскости на величину $1/\cos\theta$, то для расположенных позади ДОО плоскостей, параллельных исходному волновому фронту, дифракционная картина идентична картине, наблюдающейся позади «нерастянутого» ДОО при падении на него волны по нормали. Здесь же описана техника численных расчетов интеграла Френеля (специфические детали техники расчетов вынесены в приложения) и проверено их совпадение с результатами аналитических расчетов, для случаев, когда последние возможны.

Выполнен расчет дифракции плоского волнового фронта на отражающей киноформной линзе и вычислены построенные с ее помощью изображения внеосевого точечного источника и модельного транспаранта со сложными очертаниями, которые демонстрируют достаточно хорошее ожидаемое качество изображения.

Приведены результаты предварительных испытаний трех отражательных зонных пластинок и отражательной киноформной линзы при фокусировке падающего под углом 45° мощного излучения терагерцового лазера на свободных электронах. Показано, что экспериментальные результаты хорошо совпадают с результатами численных расчетов и что использование ДОО позволяет создавать квазиоптические системы на рабочих станциях НЛСЭ.

Параксиальное приближение при отражении под углом

Рассмотрим сначала, что следует понимать под параксиальным приближением для плоских дифракционных элементов, используемых в режиме отражения. Для анализа дифракции на таком элементе (рис. 1) рассмотрим зонную пластинку Френеля, выполненную из хорошо проводящего материала. Предполагая полное отражение, можно отражающий элемент в плоскости $z=0$ заменить на отверстие аналогичной формы, а падающий поток заменить на такую же волну, падающую со стороны мнимого источника. Тогда задачу о дифракции при отражении мы заменим на более привычную задачу о дифракции при прохождении отверстия. Отличие в постановке зада-

чи, которая рассмотрена в настоящей работе, от традиционной (см., например: [12; 13; 14]) состоит в том, что падающий поток образует довольно большой угол с плоскостью отверстия, и необходимо корректно рассмотреть параксиальное приближение и другие особенности, возникающие в данном случае по сравнению с традиционным рассмотрением падения исходной волны на отверстие по нормали.

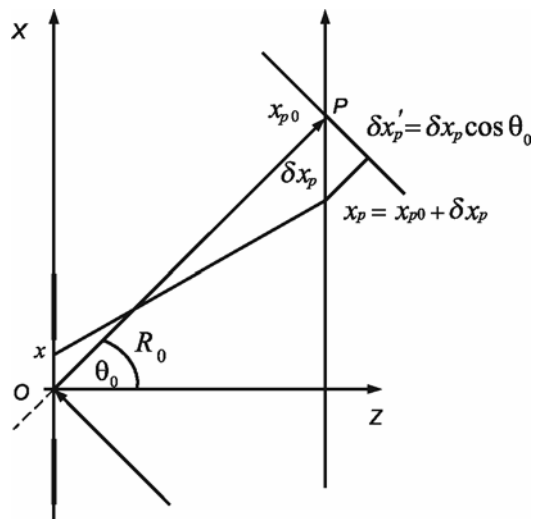


Рис. 1. Оптическая схема и системы координат

Итак, рассмотрим плоскую монохроматическую волну, падающую на эллиптическое отверстие в плоскости $z=0$, причем отношение осей эллипса $a/b=1/\cos\theta_0$. Рассмотрение плоской волны, а не, например, гауссова пучка не ограничивает общности нашего рассмотрения, а конкретные изменения будут описаны далее. Для падающей волны

$$E = E_0 e^{ik[z \cos\theta_0 + x \sin\theta_0]}$$

поле в произвольной точке P описывается интегралом Кирхгофа [2; 12]

$$E(P) = \frac{E_0 \cos\theta_0}{i\lambda} \int e^{ik[z \cos\theta_0 + x \sin\theta_0]} \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (1)$$

Раскрывая выражение для радиус-вектора в показателе степени, получим

$$r = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + z^2} = \sqrt{(x_{p0} + \delta x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + z^2}$$

или, переписав выражение в виде

$$r = \left((\delta x_p - x)^2 + x_{p0}^2 + 2x_{p0}(\delta x_p - x) + (y_p - y)^2 + z^2 \right)^{1/2}$$

используем теперь парааксиальное приближение относительно основного направления падающей волны (линия OP), предполагая, что $(\delta x_p - x)$ и $(y_p - y)$ много меньше R_0 . Тогда выражение для корня с точностью до членов второго порядка можно записать в виде

$$r = R_0 \left\{ 1 + \frac{(\delta x_p - x)^2}{2R_0^2} \cos^2 \theta_0 + \frac{(y_p - y)^2}{2R_0^2} + \frac{\delta x_p - x}{R_0} \sin \theta_0 \right\},$$

а выражение (1) примет вид

$$E(p) = \frac{E_0 \cos \theta_0}{i\lambda} e^{ikz \cos \theta_0} e^{ik \cdot \delta x_p \sin \theta_0} \frac{1}{R_0} \times \int \exp \left\{ ik \left[\frac{(y_p - y)^2 + (\delta x_p - x)^2 \cos^2 \theta_0}{2R_0} \right] \right\} dx dy, \quad (2)$$

где интегрирование осуществляется по эллипсу – зеркалу с отношением осей $a/b = 1/\cos \theta_0$. Сделав замену переменных $x \cos \theta_0 = x'$, $\delta x_p \cos \theta_0 = \delta x'_p$ можно переписать выражение под интегралом в новых переменных (x', y)

$$E(p) = \frac{E_0}{i\lambda} e^{ikz \cos \theta_0} e^{ik \cdot \delta x_p \sin \theta_0} \frac{1}{R_0} \times \int \exp \left\{ ik \left[\frac{(y_p - y)^2 + (\delta x'_p - x')^2}{2R_0} \right] \right\} dx' dy. \quad (3)$$

При сжатии оси эллипса в $\cos \theta_0$ раз вдоль оси x мы получим окружность с радиусом b , следовательно, в новых переменных интегрирование ведется по окружности с радиусом b . Таким образом, выражение, которое стоит под интегралом, полностью эквивалентно такому же выражению, которое стоит в аналогичной формуле при расчете дифракции плоской волны на круглом отверстии, падающей перпендикулярно плоскости отверстия. Если вспомнить выражение для δx_p , то становится понятным, что фактически мы получаем выражение для пятна на плоскости, перпендикулярной линии R_0 . Этот интеграл полностью эквивалентен такому же, описывающему дифракцию на окружности и / или зонной пла-

стинке. Перейдем к полярной системе координат по формулам

$$\begin{cases} x' = r \cos \varphi, & y = r \sin \varphi, \\ \delta x'_p = r_0 \cos \varphi_0, & y_p = r_0 \sin \varphi_0, \end{cases}$$

где r_0, φ_0 – это полярные координаты точки P в плоскости наблюдения с центром системы координат в точке $(x_{p0}, 0)$, а переменные r, φ – переменные интегрирования. Тогда в новых переменных двойной интеграл превращается в двукратный

$$E(p) = A e^{i\psi} \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left\{ \frac{ik}{2R_0} [r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \right\},$$

где $A = \frac{E_0}{i\lambda} \cdot \frac{1}{R_0}$,

$$\psi = k \left[(z \cos \theta_0 + \delta x_p \sin \theta_0) + \frac{r_0^2}{2R_0} \right].$$

Если нас интересует не просто дифракция на отверстии, а отражение (прохождение) через зонную пластинку, то в выражение (4) под интегралом необходимо ввести амплитудную функцию пропускания (отражения) $F_{st}(r)$, которая для осесимметричного случая (после сжатия координаты x в $\cos \theta$ раз) является функцией только r . Если речь идет о зонной пластинке с абсолютным пропусканием или отражением для одних зон и полным поглощением для смежных, то эта функция равна 0 или 1 в зависимости от того, радиус находится внутри открытой или закрытой зоны. Если же речь идет о плоском дифракционном элементе, или пропускающие (отражающие) зоны осуществляют фазовый сдвиг, то функция $F_{st}(r)$ должна быть комплексной. В любом случае интеграл по углу можно вычислить, и мы приходим к следующему выражению для комплексной амплитуды волны:

$$E(p) = 2\pi A e^{i\psi} \int_0^R r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left\{ \frac{ik}{2R_0} [r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \right\} \times F_{st}(r) \times e^{\frac{ikr^2}{2R_0}} \times J_0 \left(\frac{kr_0 r}{R_0} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь зонную пластинку, с радиусами зон, удовлетворяющими условию [12; 13]:

$$r_n = r_1 \sqrt{n}.$$

Предполагая, что отражающими (пропускающими) являются нечетные зоны (т. е. зоны между $r_0 - r_1$, $r_2 - r_3$, и т. д.), выражение (5) можно окончательно переписать в виде (полагая для удобства $r_0 = 0$)

$$E(p) = 2\pi A e^{i\psi} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \int_{r_{2n}^2}^{r_{2n+1}^2} e^{i\frac{kr^2}{2R_0}} \cdot J_0\left(\frac{kr_0 r}{R_0}\right) r dr. \quad (6)$$

В этой формуле N – полное число зон Френеля в данном изделии, а $N/2$ – число отражающих (пропускающих) зон. Интеграл (6) удобно переписать в виде

$$E(p) = \frac{E_0}{i\lambda} \times \frac{2\pi}{R_0} e^{i\psi} \times \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \int_{r_{2n}^2}^{r_{2n+1}^2} e^{i\frac{ks}{2R_0}} \times 0,5 \times J_0\left(\frac{kr_0 \sqrt{s}}{R_0}\right) ds, \quad (6')$$

где сделана замена переменных $s = r^2$. Этот интеграл в общем случае аналитически не берется, но для интенсивности на оси можно получить точное выражение [14]

$$|E(p)| = E_0 \left| \frac{\sin(N\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} \right|, \quad (7)$$

где $\alpha = \pi r_1^2 / \lambda R_0$. При $\alpha = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2$ интенсивность, пропорциональная квадрату амплитуды (7), имеет максимумы, причем самый дальний, «главный» максимум находится на расстоянии $R_0 = r_1^2 / \lambda$. Это расстояние называют главным фокусом зонной пластинки. Очевидно, что пока выполняется параксиальное приближение, зонная пластинка фокусирует излучение любой длины волны. При этом фокусное расстояние обратно пропорционально длине волны.

Для определения зависимости интенсивности от радиуса в плоскости наблюдения интеграл (6) приходится вычислять численно. Проблема состоит в том, что подынтегральная функция в (6) имеет быстро осциллирующие множители, поэтому интегрирование необходимо проводить аккуратно. Зачастую мы вынуждены использовать специальные процедуры интегрирования быстро осциллирующих функций (см., например, [15]). Зависимость (7) может служить тестом для проверки численных расчетов.

Численное моделирование дифракции на зонной пластинке

При численном моделировании дифракции (как плоской волны, так и гауссова пуч-

ка) на зонной пластинке интеграл (6') вычислялся с помощью быстрого преобразования Фурье, скорректированного специальным образом (прил. 1) в соответствии с алгоритмом из [15]. Для проверки точности расчетов зависимость (6') использовалась для вычисления интенсивности на оси с помощью стандартной процедуры численного интегрирования из пакета Matlab, с помощью быстрого преобразования Фурье и с помощью точной формулы (7). Результаты расчетов зависимости интенсивности от радиуса (при параметрах, принятых в данном варианте) с помощью преобразования Фурье и с помощью стандартной функции Quadl практически не отличаются, в то же самое время при расчете зависимости интенсивности от z , для которой имеется точное выражение, более точный (и более быстрый) результат дает использование преобразования Фурье. В дальнейшем этот алгоритм и будет применен.

Расчет дифракции плоской волны на отражающей киноформной линзе

Профиль поверхности зеркала, эквивалентного по оптическим свойствам киноформной линзе, имеет вид [2]

$$z_m(x, y) \approx \frac{1}{2 \cos \theta_0} \left[\frac{x^2 + y^2}{2F} + m\lambda_0 \right], \quad (8)$$

где $m = 0, -1, -2, \dots, -(N-1), -N$ – номера зон Френеля, составляющих отражающую киноформную линзу (далее просто «киноформная линза»); λ_0 – длина волны, для работы на которой она рассчитана; F – фокусное расстояние линзы. Здесь и далее под x подразумевается сжатая координата, которая выше обозначалась как x' . В этих координатах форма ДОЭ – круг. Величина $|m|$ увеличивается на единицу как только достигается граница очередной зоны Френеля. Радиус первой зоны Френеля определяется фокусным расстоянием и длиной волны $r_1 = \sqrt{2F\lambda_0}$, а радиусы последующих зон Френеля определяются соотношением $r_m = r_1 \sqrt{|m|}$. Профиль ДОЭ по формуле (8) имеет вид, представленный на рис. 2.

При дифракции плоской волны с произвольной длиной волны λ на профилированном отражательном элементе поле волны в плоскости P описывается интегралом (6) с дополнительным фазовым множителем,

учитываемым, что при отражении от профиля с высотой $h(s)$ фаза претерпевает изменение на величину $2h(s)\cos\theta_0$,

$$E(p) = \frac{E_0}{i\lambda} \times \frac{2\pi}{R_0} e^{i\psi} \int_0^{R_m^2} e^{iks\left(\frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2F}\right) - ik2h(s)\cos\theta_0} \times 0,5 \times J_0\left(\frac{kr_0\sqrt{s}}{R_0}\right) ds. \quad (9)$$

Для случая профиля, описываемого формулой (8), формула (9) принимает вид

$$E(p) = \frac{E_0}{i\lambda} \times \frac{2\pi}{R_0} e^{i\psi} \times \sum_{m=1}^N \int_{r_{m-1}^2}^{r_m^2} e^{iks\left(\frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2F}\right)} \times e^{i2\pi m \frac{\lambda_0}{\lambda}} \times 0,5 \times J_0\left(\frac{kr_0\sqrt{s}}{R_0}\right) ds. \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что результат дифракции (в рамках принятых приближений) будет таким же, как и при использовании параболического зеркала (или тонкой линзы), в случае, когда измерения проводятся на той длине волны, для работы на которой спроектирован ДОЭ. Иными словами, на данной длине волны линза будет фокусировать пучки и строить изображения по тем же законам, что обычная линза с фокусным расстоянием F . Поскольку стоимость изготовления ДОЭ довольно высока, то желательно использовать этот же элемент для управления излучением в как можно более широком диапазоне спектра вокруг центральной длины волны λ_0 . В этом случае для численного определения поля дифрагировавшей волны следует использовать выражение (10). На оси комплексная амплитуда волны определяется аналитическим выражением

$$E(p, r_0 = 0) = \frac{E_0\pi}{i\lambda R_0} e^{i\psi} \sum_{m=1}^N e^{2\pi im \frac{\lambda_0}{\lambda}} \frac{1}{\alpha} \left[e^{i\alpha r_m^2} - e^{i\alpha r_{m-1}^2} \right],$$

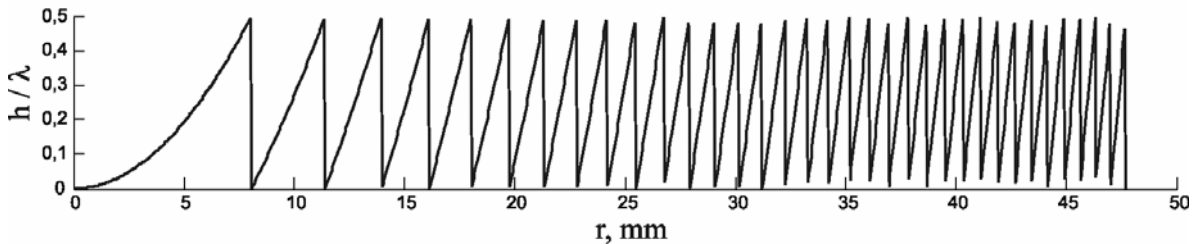


Рис. 2. Профиль (вдоль малого радиуса эллипса) отрагательной киноформной линзы с фокусным расстоянием 250 мм, предназначенной для фокусировки излучения с длиной волны 130 мкм

где $\alpha = k\left(\frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2F}\right)$, а модуль электрического поля равен

$$|E(r_0, R_0)| = \frac{2\pi E_0}{\lambda R_0} \left| r_1^2 \frac{\sin\left(\frac{\alpha r_1^2}{2}\right)}{\frac{\alpha r_1^2}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{\beta N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} \right|, \quad (11)$$

здесь $\beta = \alpha r_1^2 - 2\pi \frac{\lambda_0}{\lambda}$.

В случае, когда падающая волна не является плоской, а представляет собой гауссов пучок (каковым с некоторым приближением можно считать терагерцовый пучок в описанных далее экспериментах), амплитуду E_0 в выражении (10) необходимо заменить

на $E(r) = E_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$. Здесь мы пренебрегли фазовым множителем, поскольку расходимость пучка на расстоянии около 30 м от выходного зеркала лазера на свободных электронах составляет примерно 0,002 рад, и фронт волны для терагерцового излучения ($\lambda_0 = 130$ мкм) можно считать плоским (в пределах первой зоны Френеля разность хода для сферической и плоской волн составляет лишь 0,6 мкм). В случае гауссова пучка в формуле (10) изменится подынтегральная функция и интеграл примет вид

$$E(p) = \frac{E_0}{i\lambda} \times \frac{2\pi}{R_0} e^{i\psi} \times \sum_{m=1}^N \int_{r_{m-1}^2}^{r_m^2} e^{iks\left(\frac{1}{2R_0} - \frac{1}{2F}\right)} \times e^{i2\pi m \frac{\lambda_0}{\lambda}} \times e^{-\frac{s}{w_0^2}} \times 0,5 \times J_0\left(\frac{kr_0\sqrt{s}}{R_0}\right) ds. \quad (12)$$

Далее при сравнении экспериментальных данных с теоретическими мы используем выражение (12).

Вычисление изображения внеосевого источника

До сих пор мы рассматривали распределение интенсивности, которое создает ДОО в режиме отражения при падении на него плоской волны или гауссова пучка под углом, для которого рассчитан этот оптический элемент. Для решения вопроса о возможности построения изображения и качестве этого изображения рассмотрим распределение интенсивности, которую создает в плоскости изображений точечный источник, находящийся вне главной оси на предметной плоскости, расположенной на расстоянии a от центра ДОО. Как очевидно из предыдущего анализа, эта задача (с соответствующими заменами переменных, см. уравнения (2) и (3)) эквивалентна падению излучения на плоскость с круговым отверстием, в которое помещена фазосдвигающая пластинка со сдвигом фаз, соответствующим профилю из уравнения (8). Соответствующая эквивалентная оптическая схема представлена на рис. 3.

Пусть точечный источник находится в точке A , которая находится слева от плоскости ДОО на расстоянии a . Найдем поле волны в плоскости перед плоским оптическим элементом (координаты x_L, y_L, z).

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{k}{2\pi iz} \iint E(S) \exp\left\{i(kz - \omega t + k \frac{(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2}{2z})\right\} dx dy \quad (13)$$

здесь z – расстояние от плоскости интегрирования (предмета) до ДОО. В нашем случае $z = a$, а поле $E(S)$ в плоскости предмета $E(S) = E_0 S_0 \delta(x-x_A) \delta(y)$. Тогда после интегрирования по плоскости изображения получим сферическую волну,

$$E(x_L, y_L, 0) = \frac{kS_0}{2\pi ia} E_0 \times \exp\left\{ik \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a}\right)\right\}, \quad (14)$$

исходящую из точки $x = x_A, y = 0, z = a$. Поле сразу после ДОО (в той же плоскости $z = 0$) соответствует полю (14), умноженному на фазовый множитель, определяющий действие ДОО. Тогда это поле можно представить в виде

$$\tilde{E}(x_L, y_L, 0) = \frac{kS_0}{2\pi ia} E_0 \times \exp\left\{ik \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} - 2h(x_L, y_L)\right)\right\}. \quad (15)$$

Или, учитывая соотношение (8), перепишем выражение для поля после линзы в плоскости линзы:

$$\tilde{E}(x_L, y_L, 0) = \frac{kS_0}{2\pi ia} E_0 \times \exp\left\{i2\pi m \frac{\lambda_0}{\lambda}\right\} \times \exp\left\{ik \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F}\right)\right\}.$$

Тогда распределение электрического поля в плоскости $z = b$ определяется интегралом Кирхгофа

$$E(p) = \frac{1}{2i\lambda} \int \tilde{E}(x_L, y_L) \frac{e^{ikr}}{r} dx_L dy_L,$$

и, используя параксиальное приближение для r , это выражение можно переписать в виде

$$E(p) = \frac{1}{2i\lambda} \frac{S_0 E_0}{i\lambda ab} \sum_m \int dx_L dy_L \times \exp\left\{2\pi im \frac{\lambda_0}{\lambda}\right\} \times \exp\left\{ik \left(a + \frac{(x_L - x_A)^2 + y_L^2}{2a} - \frac{x_L^2 + y_L^2}{2F}\right)\right\} \times \exp\left\{ik \left(b + \frac{(x_p - x_L)^2 + (y_p - y_L)^2}{2b}\right)\right\},$$

где интеграл берется по кольцам с радиусами от r_{m-1} до r_m , ($r_0 = 0, r_m = r_1 \sqrt{m}$). Используя известное правило «линзы» $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$, можно значительно упростить полученное выражение и избавиться от квадратичных членов по x_L и y_L . Тогда получим

$$E(p) = A e^{i\varphi} \sum_m \int dx_L dy_L \exp\left\{ik \left[-x_L \left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_p}{b}\right) - y_L \frac{y_p}{b}\right]\right\} \exp\left\{2\pi im \frac{\lambda_0}{\lambda}\right\}. \quad (15)$$

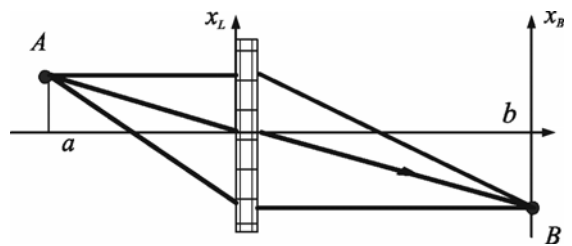


Рис. 3. Эквивалентная оптическая схема

Поскольку интегрировать по окружностям или кольцам удобнее в цилиндрической системе координат, то, сделав замену переменных $x_L = r \cos \varphi, y_L = r \sin \varphi$, а также введя переменные $\alpha = \left(\frac{x_A}{a} + \frac{x_p}{b} \right), \beta = \frac{y_p}{b}$, перепишем выражение (15):

$$E(p) = A e^{i\psi} \sum_{m=1}^N \exp \left\{ 2\pi i m \frac{\lambda_0}{\lambda} \right\} \int_{r_{m-1}}^{r_m} r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left\{ -ikr \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} [\cos(\varphi - \varphi_0)] \right\}, \quad (16)$$

$$\text{где } \cos \varphi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \sin \varphi_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Аналогично формулам (4)–(5) выражение (16) можно проинтегрировать по углу, после чего удастся вычислить и интеграл по радиусу. Тогда

$$E(p) = A e^{i\psi} \sum_{m=1}^N \exp \left\{ 2\pi i m \frac{\lambda_0}{\lambda} \right\} \times \int_{r_{m-1}}^{r_m} r dr J_0 \left(kr \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) = A e^{i\psi} \sum_{m=1}^N \exp \left\{ 2\pi i m \frac{\lambda_0}{\lambda} \right\} \frac{1}{k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \times \left[r_m J_1 \left(r_m k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) - r_{m-1} J_1 \left(r_{m-1} k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right], \quad (17)$$

где $A = \frac{S_0 E_0}{2\lambda^2 ab}$. Если длина волны падающего излучения λ совпадает с длиной волны

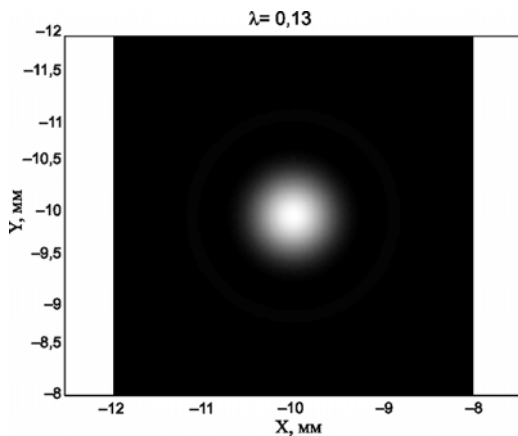


Рис. 4. Распределение интенсивности изображения внеосевого точечного источника в фокальной плоскости, сформированного киноформной линзой ($f = 250$ мм при $\lambda_0 = 130$ мкм) при увеличении, равном единице

λ_0 , на которую рассчитан ДОЭ, тогда выражение (17) можно просуммировать

$$I(x_p, y_p) = \frac{S_0^2 E_0^2}{4\lambda_0^2 a^2 b^2} \times \frac{R_m^2}{4\pi^2 (\alpha^2 + \beta^2)} J_1^2 \left(R_m k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right), \quad (18)$$

где $R_N = r_1 \sqrt{N}$ – внешний радиус плоского дифракционного элемента.

Максимум интенсивности определяется точкой $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что возможно только в случае $\alpha = 0, \beta = 0$, следовательно, точка максимума определяется координатами $x_p = -x_A \frac{b}{a}, y_p = 0$, что полностью соответствует правилам геометрической оптики. Форма пятна, определяемая первым нулем функции Бесселя первого порядка, – окружность, которая описывается уравнением

$$\left(\frac{x_A b}{a} + x_p \right)^2 + y_p^2 = \frac{b^2 \lambda^2}{R_N^2 4\pi^2} x_1^2, \quad (19)$$

где x_1 – первый ноль функции Бесселя первого рода, $x_1 = 3,832$. Следовательно, радиус пятна $R_0 = 3,83 \frac{\lambda b}{2\pi R_N}$. Распределение интенсивности в пятне представлено на рис. 4.

Полученные выражения можно очевидным образом обобщить для случая $y_A \neq 0$. Пусть источник расположен в точке x_A, y_A . Тогда передаточная функция (а полученное выражение (17) является передаточной функцией ДОЭ) будет иметь вид

$$h(x_A, y_A; x_p, y_p) = A e^{i\psi} \sum_{m=1}^N \exp \left\{ 2\pi i m \frac{\lambda_0}{\lambda} \right\} \frac{1}{k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \times \left[r_m J_1 \left(r_m k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) - r_{m-1} J_1 \left(r_{m-1} k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right],$$

$$A = \frac{S_0 E_0}{2\lambda^2 ab}, \quad \alpha = \frac{x_A}{a} + \frac{x_p}{b},$$

где

$$\beta = \frac{y_A}{a} + \frac{y_p}{b}, \quad \psi = k \left\{ \left[\frac{x_A^2 + y_A^2}{2a} \right] + \left[\frac{x_p^2 + y_p^2}{2b} \right] \right\}.$$

Для определения распределения интенсивности в плоскости изображений при облучении плоской волной с длиной волны λ_0 транспаранта $t(x_A, y_A)$ необходимо вычислить интеграл

$$E(x_p, y_p) = \iint h(x_A, y_A; x_p, y_p) t(x_A, y_A) dx_A dy_A = A e^{i\psi_1} \iint \exp \left\{ ik \left[\frac{x_A^2 + y_A^2}{2a} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{R_N J_1 \left(R_N k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)}{k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} t(x_A, y_A) dx_A dy_A. \quad (20)$$

Введем новые переменные: $\tilde{x}_A = -\frac{bx_A}{a}$,

$$\tilde{y}_A = -\frac{by_A}{a}, \quad \alpha = \frac{1}{b}(x_p - \tilde{x}_A), \quad \beta = \frac{1}{b}(y_p - \tilde{y}_A).$$

Тогда выражение (20) можно переписать в виде

$$E(x_p, y_p) = A e^{i\varphi_1} \iint \exp \left\{ ik \left[\frac{a(\tilde{x}_A^2 + \tilde{y}_A^2)}{2b^2} \right] \right\} \times \frac{a^2}{b^2} d\tilde{x}_A d\tilde{y}_A \times t \left(\frac{a\tilde{x}_A}{b}, \frac{a\tilde{y}_A}{b} \right) \times \frac{R_N J_1 \left(\frac{R_N k}{b} \sqrt{(x_p - \tilde{x}_A)^2 + (y_p - \tilde{y}_A)^2} \right)}{\frac{k}{b} \sqrt{(x_p - \tilde{x}_A)^2 + (y_p - \tilde{y}_A)^2}}. \quad (21)$$

Как видно из выражения (21), искомое выражение имеет вид интеграла свертки, т. е.

$$E(x_p, y_p) = \iint f(x, y) \cdot g(x - x_p, y - y_p) dx dy.$$

Таким образом, для вычисления интеграла (21) типа свертки можно использовать быстрое преобразование Фурье [15]. Для проверки возможности проведения таких расчетов и определения необходимых временных затрат был проведен расчет с использованием шаблона, показанного на рис. 5.

Фокусировка излучения терагерцового лазера на свободных электронах дифракционными оптическими элементами

Для проверки возможности использования дифракционных оптических элементов для управления терагерцовым излучением мощностью до 100–150 Вт были рассчитаны, изготовлены и испытаны три отражающие зонные пластинки Френеля и киноформная линза, предназначенные для фоку-

сировки терагерцового излучения при падении излучения под углом 45°.

Зонные пластинки были изготовлены путем травления медного слоя на стеклотекстолите по технологии изготовления печатных плат. Они имели радиус первой зоны 5,2, 7,35 и 9,0 мм, а число зон Френеля составляло 91, 46, и 30, для пластинок № 1, 2 и 3 соответственно. Центральная зона каждой пластинки была отражающей. Неметаллические зоны Френеля были не прозрачны для терагерцового излучения, а следовательно, часть излучения могла отражаться от стеклотекстолита и вносить вклад в интерференционную картину.

На рис. 6 показаны изображения зонной пластинки № 3 и распределения температуры вдоль большой оси эллипса, записанные с помощью термографа СВИТ [16], матрица которого чувствительна к излучению в диапазоне 2,5–3,0 мкм. Два кадра слева сняты в отсутствие терагерцового излучения. В этом случае термограф «видит» металлические зоны более нагретыми, чем диэлектрические. По-видимому, первые отражают тепловое излучение нагретых объектов (включая самих экспериментаторов). Это предположение подтверждается тем, что для регистрации цифр на металлической линейке необходимо ее поворачивать до тех пор, пока изображение линейки не станет светлым. Нужно заметить, что значение «температуры», показываемое термографом, вычисляется в предположении, что объектом является абсолютно черное тело, поэтому к абсолютным значениям на графиках следует относиться осторожно.

После подачи на зонную пластинку пучка терагерцового лазера на свободных электронах со средней мощностью около 100 Вт температура металлических зон, как следует из рис. 6, возрастает незначительно, в то время как стеклотекстолитовые участки сильно нагреваются, что, однако, не мешает зонным пластинкам нормально функциони-

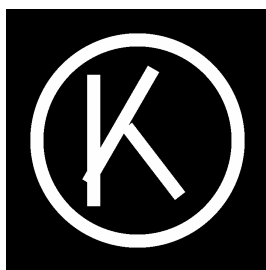


Рис. 5. Шаблон (слева) и расчетное изображение (справа), полученное с помощью ДОО

ровать. Измеренное в экспериментах фокусное расстояние всех пластинок достаточно хорошо соответствует расчетным значениям. На рис. 7 вверху приведены снимки поперечного сечения терагерцового лазерного пучка с длиной волны 128 ± 3 мкм, падающего на зонную пластинку № 1 (слева), и сечения того же пучка в фокальной плоскости зонной пластинки (справа). Изображения были получены с помощью термочувствительного люминесцентного экрана [17] и записаны цифровой видеокамерой SONY DCR-TRV230E. Графики построены путем обработки изображений с помощью пакета Image Processing Mathcad-2000.

В соответствии с выражением, описывающим фокусное расстояние зонной пластинки, при увеличении длины волны терагерцового излучения фокусирующие свойства пластинки сохранялись, но фокусное расстояние линейно уменьшалось. Это свойство зонной пластинки позволяет работать с произвольными длинами волн, но низкая дифракционная эффективность (порядка 10 % согласно [18]) ограничивает ее применение, если требуется сохранить мощность исходного излучения. Данное ограничение преодолевается, если использо-

вать зеркальную киноформную линзу. В этом случае теоретическая дифракционная эффективность равна единице.

Киноформная линза с параболическим профилем зон Френеля была изготовлена на станке с числовым программным управлением. Технология изготовления киноформных линз на станках с ЧПУ описана, например, в [19]. Линза содержит $N = 37$ зон, описываемых профилем (8) (см. рис. 2). Радиус первой зоны равен $r_1 = 8,06$ мм. На рис. 8 сплошными кривыми показаны значения интенсивности излучения, попадающего после отражения гауссова пучка от киноформной линзы в расположенную на оптической оси системы круглую апертуру диаметром 2,6 мм, как функции расстояния от киноформной линзы для пяти длин волн.

Экспериментально измеренное распределение интенсивности, показанное кружками, хорошо совпадает с расчетами. Некоторое отличие эксперимента и теории на крыльях можно объяснить тем, что сечение пучка на рабочей станции при данных измерениях достаточно заметно отличается от гауссова распределения (см. рис. 7, б). Фокусное расстояние при $\lambda = 130$ мкм, для работы с кото-

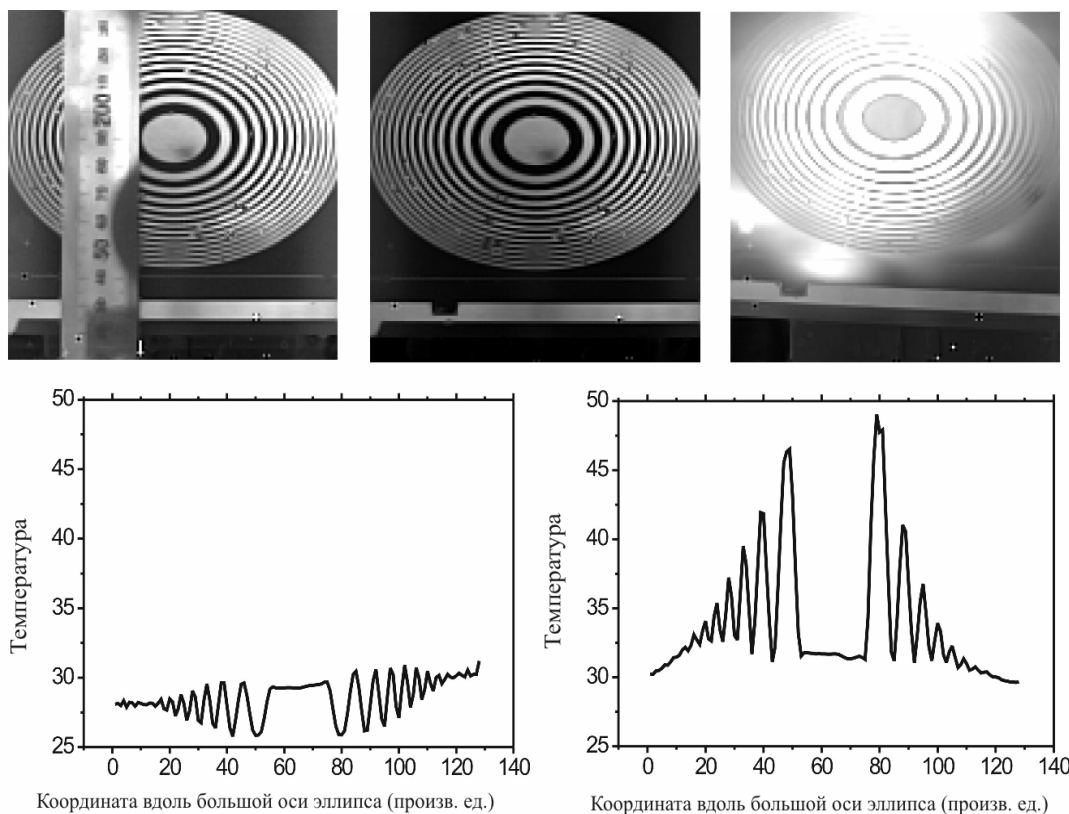


Рис. 6. Изображения зонной пластинки № 3 в ближнем ИК-диапазоне, записанные тепловизором СВИТ. Два изображения слева записаны в отсутствие терагерцового излучения. Справа – изображение при облучении зонной пластинки под углом 45° пучком лазера на свободных электронах. Внизу – значения «температуры» вдоль горизонтальной оси эллипса, измеренные термографом в установившемся режиме

рым и была рассчитана линза, точно соответствует расчетному.

При увеличении длины волны положение максимума интенсивности (на графике указано в скобках), как и следовало ожидать, смещается дальше от линзы, а сама интенсивность падает. Видно, что при отклонении длины волны на 20–25 % от номинальной киноформная линза фокусирует излучение еще достаточно хорошо, хотя область перетяжки смещается заметно. Отсюда следует, что для работы в широком диапазоне длин волн требуется целый набор линз, и уж конечно, киноформные линзы не подходят для работы с широкополосным излучением. На рис. 9 показано поперечное распределение интенсивности излучения в перетяжках, соответствующих рис. 8. Экспериментальные измерения (кружки) проводились на длине волны $\lambda = 130$ мкм (точность установки длины волны лазера на свободных электронах в наших экспериментах составляла ± 3 мкм) путем перемещения поперек перетяжки маски с диаметром отверстия 0,6 мм. Треугольниками показано вычисленное значение свертки радиального распределения интенсивности (сплошная кривая при $\lambda = 130$ мкм) и круглой апертуры диаметром 0,6 мм. Видно, что экспериментальный контур заметно шире вычисленного. Причиной этого могут быть отклонение падающего пучка от гауссова, неточности юсти-

ровки оптической системы, отклонение реального профиля линзы от рассчитанного, а также выполнение измерений не точно в области перетяжки. Интенсивность излучения в фокусе тем не менее весьма высока – там горят бумага, дерево и другие материалы.

Выводы

Первые эксперименты с дифракционными оптическими элементами показали, что использованные нами технологии изготовления отражательных зонных пластинок Френеля и отражательной киноформной линзы позволяют создавать ДОО, пригодные для работы с мощным монохроматическим терагерцовым излучением. Программы расчета элементов на основе скалярной теории дифракции Кирхгофа позволяют с достаточной надежностью предсказать их характеристики.

Следующим шагом в исследовании ДОО терагерцового диапазона должно быть прецизионное измерение их рабочих характеристик, из которых наиболее важным является их дифракционная эффективность. Грубые оценки дифракционной эффективности, выполненные по результатам описанных выше экспериментов, показывают, что для зонных пластинок она по порядку величины составляет 10 %, а для киноформной линзы – 100 %, что соответствует теоретическим предсказаниям. Эксперимен-

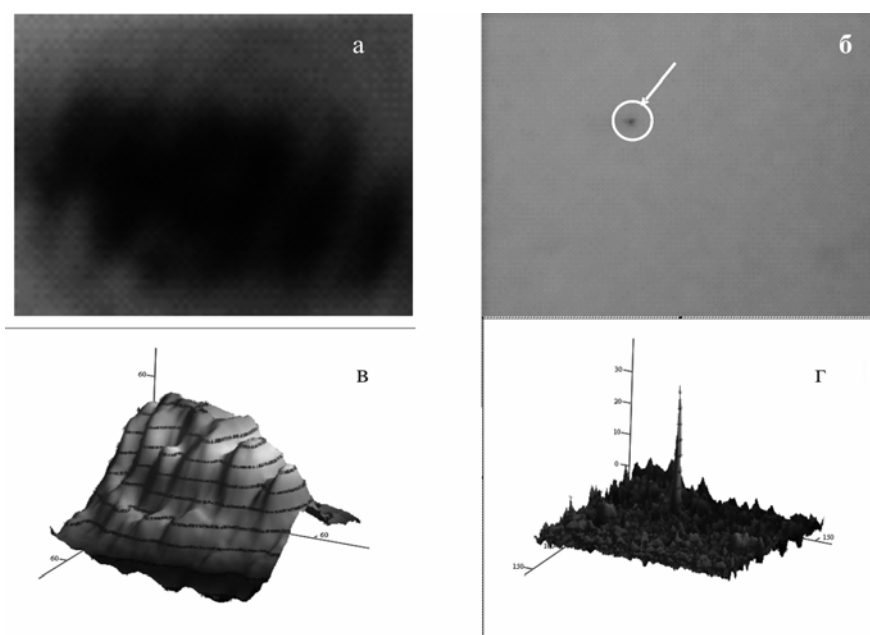


Рис. 7. Распределение интенсивности в исходном пучке терагерцового ЛСЭ (а, б) и в фокальной плоскости зонной пластинки Френеля (в, г). Изображение пучка записано с помощью термочувствительного люминесцентного экрана

тально измеренный диаметр фокального пятна свидетельствует, что на основе киноформной линзы можно собирать изображающие оптические системы для терагерцового диапазона с разрешением не хуже одного миллиметра. Построение и испытание оптических систем, областью применения которых являются спектрально-селективная интроскопия конденсированных сред, газов и пламен, исследование структуры биологических объектов и пр., является предметом следующих исследований. Есть основания полагать, что пространственное разрешение оптических систем можно повысить до величины не менее 0,3 мм, тогда как временное разрешение уже сегодня составляет десятые доли секунды. Оно ограничивается тепловой инерцией использованных экранов и может быть существенно повышено.

Таким образом, дифракционные оптические элементы имеют большие перспективы для управления монохроматическим терагерцовым излучением. По сравнению с параболическими зеркалами они имеют малый вес и значительно проще в изготовлении. Вследствие большого диаметра и большого аспектного отношения оптических элементов, необходимых для создания относительно компактных систем, рефрактивные линзы должны иметь большую толщину, и возможность их применения в мощных систе-

мах вызывает сомнения. Если же возникает необходимость фокусировки терагерцового излучения в объемы сложной конфигурации, применению дифракционных оптических элементов альтернативы вообще не существует.

Приложение 1 Вычисление фурье-подобных интегралов

Очень часто возникает необходимость вычислить точное числовое значение интеграла вида

$$I = \int_a^b e^{i\omega t} h(t) dt \quad (\text{П.1})$$

и проводить это вычисление приходится для большого числа значений ω . Во многих практических случаях функция $h(t)$ является гладкой на интервале $[a, b]$, но она не является периодической на этом интервале и не равна нулю на обоих концах его. Поэтому использование быстрого преобразования Фурье для вычисления таких интегралов, как будет показано далее, является заманчивой, но не тривиальной задачей. Рассмотрим сначала простейший подход к проблеме, чтобы понять, где возникают трудности. Разобьем интервал $[a, b]$ на M подынтервалов, где M – большое целое число, и определим величины

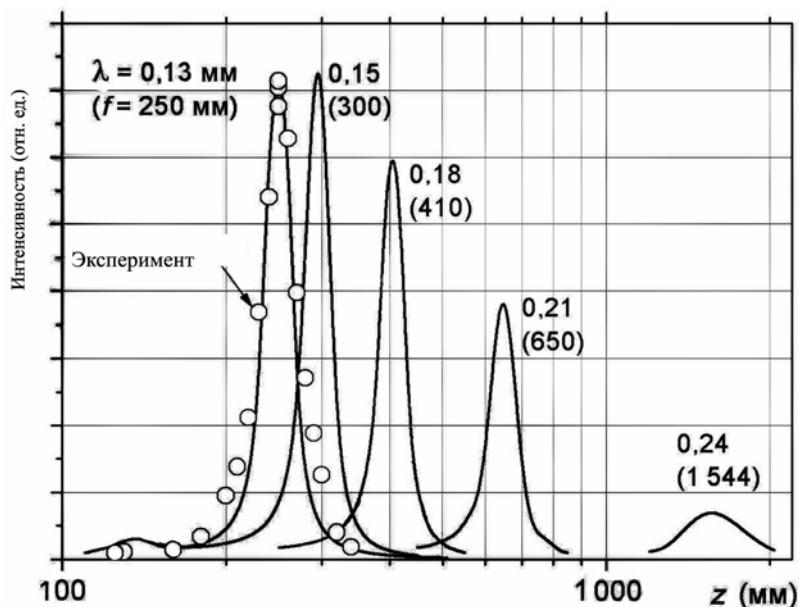


Рис. 8. Вычисленные (сплошные кривые) и экспериментально измеренная (точки) интенсивности отраженного от киноформной линзы терагерцового излучения, попадающего внутрь расположенной на оптической оси апертуры диаметром 2,6 мм, в зависимости от расстояния; длина волны излучения и положение области перетяжки указаны цифрами около кривых

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{b-a}{M}, \\ t_j &\equiv a + j\Delta, \\ h_j &\equiv h(t_j), \\ j &= 0, \dots, M. \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

Отметим, что $h_0 = h(a)$, $h_M = h(b)$ и имеется $M + 1$ значение h_j . Мы можем аппроксимировать интеграл (П.1.1) суммой

$$I \approx \Delta \sum_{j=0}^{M-1} h_j \exp(i\omega \cdot t_j), \quad (\text{П.1.3})$$

причем это в любом случае аппроксимация 1-го порядка. (Если мы центрируем значения h_j и t_j , мы получим аппроксимацию второго порядка). Для определенных значений ω и M уравнение (П.1.3) может быть превращено в выражение для дискретного преобразования Фурье, или ДПФ, и его вычисление можно выполнить с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ). В частности мы можем выбрать M такое, чтобы оно было целой степенью 2, и определить специальную последовательность ω соотношением

$$\omega_m \Delta \equiv \frac{2\pi m}{M}, \quad (\text{П.1.4})$$

где $m = 0, 1, \dots, M/2 - 1$. Тогда уравнение (П.1.3) принимает форму

$$\begin{aligned} I(\omega_m) &\approx \Delta e^{i\omega_m a} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{M-1} h_j e^{2\pi i m j / M} = \Delta e^{i\omega_m a} [\text{БПФ}(h_0 \dots h_{M-1})]_m. \end{aligned} \quad (\text{П.1.5})$$

Несмотря на свою простоту и ясность, использовать уравнение (П.1.5) *не рекомендуется*. Оно, как правило, дает неверный результат!

Проблема заключена в колебательном характере интеграла (П.1.1). Если $h(t)$ достаточно гладкая функция и если ω является достаточно большой, чтобы в интервале $[a, b]$ вместились несколько циклов – фактически ω_m в уравнении (П.1.4) дает точно m циклов – тогда значение I как правило очень мало, настолько мало, что его значение перекрывается ошибкой аппроксимации первого порядка и даже второго порядка (при центрированных значениях). Кроме того, характерным «малым параметром» при оценке ошибки аппроксимации является не $\Delta/(b-a) = 1/M$, как было бы, если бы подынтегральное выражение не было осциллирующим, а величина $\omega\Delta$, которая может достигать величины π для ω в пределах частоты Найквиста дискретного преобразования Фурье (сравни уравнение П.1.4).

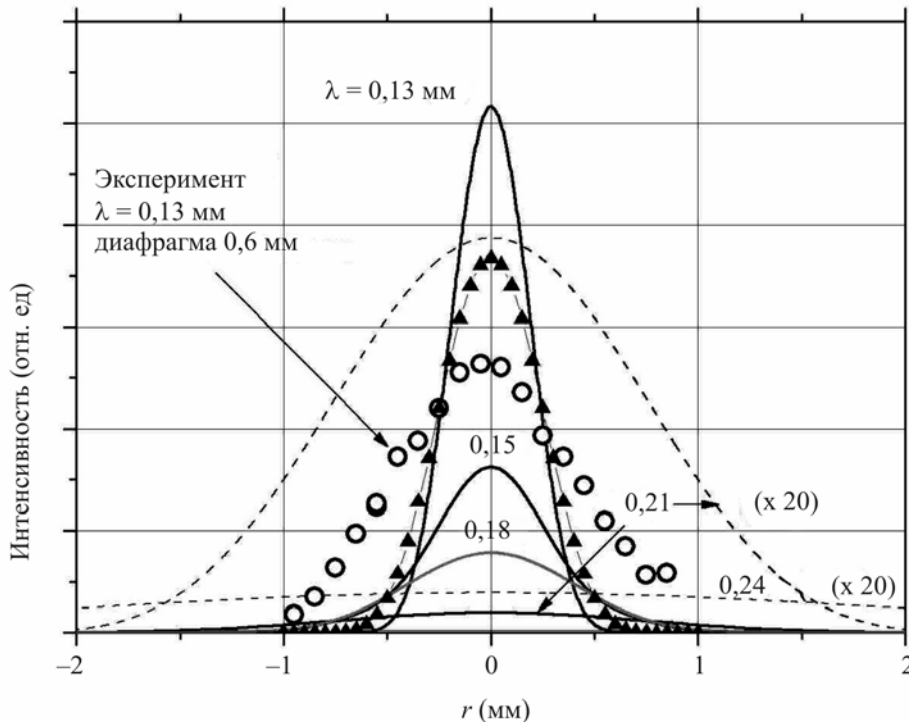


Рис. 9. Распределение интенсивности терагерцового излучения лазера на свободных электронах по радиусу в перетяжках пучка, сфокусированного киноформной линзой

Это приводит к систематической погрешности в уравнении (П.1.5) по мере роста ω .

Полезным упражнением является использование уравнения (П.1.5) для интеграла, который может быть вычислен аналитически, и тогда можно будет увидеть, насколько плоха такая аппроксимация. Мы рекомендуем читателю проделать такое упражнение.

Мы же займемся более аккуратным рассмотрением. Используя данный набор h_j , мы можем интерполировать значение $h(t)$ в любой точке на интервале $[a, b]$ близлежащими значениями h_j . Самый простой вариант – линейная интерполяция, использующая два соседних значения h_j , слева и справа. Интерполяцией более высокого порядка могла бы быть, например, кубическая интерполяция, использующая две точки слева и две справа, кроме первого и последнего подынтервалов, в которых мы должны интерполировать по трем значениям h_j с одной стороны и одним значением – с другой. Формулами для таких схем интерполяции являются (кусочные) полиномы относительно независимой переменной t , но с коэффициентами, которые линейны по значениям функции h_j . Хотя такой подход, может быть, не является общепринятым, тем не менее интерполяция нашей функции в любой точке может рассматриваться как приближение функции суммой базисных функций (которые зависят только от интерполяционной схемы), умноженной на выборочные значения функции (которые зависят только от функции). Это можно записать в виде

$$h(t) \approx \sum_{j=0}^M h_j \cdot \psi\left(\frac{t-t_j}{\Delta}\right) + \sum_{j=\text{endpoint}} h_j \varphi_j\left(\frac{t-t_j}{\Delta}\right). \quad (\text{П.1.6})$$

Здесь $\psi(s)$ – базисные функции внутренних точек. Они равны нулю для больших положительных и отрицательных значений и отличны от нуля только в той области, которая используется для интерполяции. Мы всегда имеем $\psi(0) = 1$ и $\psi(m) = 0$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, так как интерполяция заданных значений должна дать значение самой функции в этой точке. Для линейной интерполяции $\psi(s)$ является кусочно-линейной функцией, значение которой

возрастает от 0 до 1 для s в интервале $(-1, 0)$, и убывает до 0 для s в интервале $(0, 1)$. Для интерполяции более высокого порядка $\psi(s)$ представляет собой составную кусочную функцию из частей интерполяционных полиномов Лагранжа. Она имеет разрывные производные при целых значениях s , где осуществляется переход с одного набора точек на другой.

Как было отмечено выше, подынтервалы, примыкающие к a и b , требуют другой, нецентрированной формулы для интерполяции. Это отражено в уравнении (П.1.6) второй суммой, со специальными базисными функциями концевых точек. Фактически, по причинам, которые станут ясными ниже, мы включили в первую сумму (с базисными функциями ψ) все точки, так что фактически φ_j являются разностями между настоящими концевыми базисными функциями и внутренними базисными функциями $\psi(s)$. Это утомительное, но полезное упражнение – записать весь набор функций $\varphi_j(s)$ для любого порядка интерполяции.

Теперь применим интегральный оператор $\int_a^b dt \cdot \exp(i\omega t)$ к обеим частям уравнения (П.1.6), поменяем местами суммирование и интегрирование и сделаем замену переменных, введя $s = (t - t_j)/\Delta$ в первой сумме и $s = (t - a)/\Delta$ во второй сумме. В результате получим

$$I \approx \Delta e^{i\omega a} \left[W(\theta) \sum_{j=0}^M h_j e^{ij\theta} + \sum_{j=\text{endpoints}} h_j \alpha_j(\theta) \right]. \quad (\text{П.1.7})$$

Здесь $\theta \equiv \omega\Delta$, а функции $W(\theta)$ и $\alpha_j(\theta)$ определены соотношениями

$$W(\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot e^{i\theta s} \psi(s), \quad (\text{П.1.8})$$

$$\alpha_j(\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} ds \cdot e^{i\theta s} \varphi_j(s - j). \quad (\text{П.1.9})$$

Ключевым моментом является то, что интегралы в (П.1.8) и (П.1.9) могут быть вычислены аналитически, раз и навсегда для любой заданной интерполяционной схемы. Тогда уравнение (П.1.8) может рассматри-

ваться как алгоритм «коррекции краевых эффектов» для суммы, которая, как мы видели, может быть вычислена с помощью БПФ, с высокой точностью.

Мы рассмотрим только симметричную интерполяцию. Симметрия предполагает

$$\begin{aligned} \varphi_{M-j}(s) &= \varphi_j(-s), \\ \alpha_{M-j}(\theta) &= e^{i\theta M} \alpha_j^*(\theta) = e^{i\omega(b-a)} \alpha_j^*(\theta), \end{aligned} \quad (\text{П.1.10})$$

где * обозначает комплексное сопряжение. Предположение о том, что $\psi(s) = \psi(-s)$ приводит к утверждению, что $W(\theta)$ – действительна.

Вернемся теперь к рассмотрению суммы в (П.1.7), которую мы хотим вычислить с помощью БПФ. Для этого выберем некоторое целое N , которое является целой степенью 2, так что $N \geq M + 1$. (Отметим, что M не должно быть степенью 2, так что $M = N - 1$ допустимо). Если $N > M + 1$, то определим $h_j = 0$, $M + 1 < j \leq N - 1$, т. е. сделаем нулевую «обкладку» массива h_j , так чтобы j изменялось в диапазоне $0 \leq j \leq N - 1$. После этого сумма может быть вычислена с помощью БПФ для специальных значений $\omega = \omega_n$, которые вычисляются по формуле

$$\omega_n \Delta \equiv \frac{2\pi n}{N} \equiv \theta, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (\text{П.1.11})$$

Чем большее значение N будет выбрано для заданного M , тем более высокие значения частоты удастся получить, поскольку с увеличением $M \Delta$ уменьшается (см. уравнение (П.1.2)), а наибольшее значение $\omega \Delta$ всегда меньше π (П.1.11). Как правило, рекомендуется выбирать множитель не менее 4, т. е. $N > 4M$ (см. далее). Мы можем переписать уравнение (П.1.7) в окончательной форме:

$$\begin{aligned} I(\omega_n) &= \Delta e^{i\omega_n a} \left\{ W(\theta) [\text{БПФ}(h_0 \dots h_{N-1})]_n + \right. \\ &+ [\alpha_0(\theta)h_0 + \alpha_1(\theta)h_1 + \alpha_2(\theta)h_2 + \\ &+ \alpha_3(\theta)h_3 + \dots] + e^{i\omega(b-a)} [\alpha_0^*(\theta)h_M + \\ &+ \alpha_1^*(\theta)h_{M-1} + \alpha_2^*(\theta)h_{M-2} + \alpha_3^*(\theta)h_{M-3} + \dots] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.12})$$

Для кубической (или более низкого порядка) полиномиальной интерполяции отличны

от нуля только члены, явно выписанные в (П.1.12), многоточие можно игнорировать, а для расчетов нам необходимо явное выражение только для $W, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, вычисленных с помощью уравнений (П.1.8–П.1.9). Эти выражения вычислены и приведены в [15] для второго порядка (формула трапеций) и четвертого порядка (кубическая интерполяция). Мы переписали программу DFTCOR, которая приведена в упомянутом пособии на языке Фортран и С на Matlab и использовали ее в своих расчетах. Описанная процедура коррекции справедлива для всех значений ω , удовлетворяющих условию $\omega \Delta < \pi$, а не только для тех дискретных значений, в которых выполняется БПФ (см. П.1.11), поэтому для произвольного значения ω выполняется полиномиальная интерполяция рассчитанных значений по полученному дискретному спектру. Для того чтобы такая интерполяция была достаточно аккуратна, желательно $N \gg M$. Следует также иметь в виду специальное рассмотрение для $\omega < 0$. Если функция $h(t)$ действительна, то Фурье-образ симметричен относительно ω .

Приложение 2 Свертка с помощью БПФ

Свертки двух непрерывных функций определяется соотношением

$$g * h \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Теорема о свертке гласит, что Фурье-образ свертки двух непрерывных функций равен произведению их индивидуальных Фурье-образов. Везде далее рассматривается одномерный случай, но это справедливо и для двумерного случая с соответствующими обобщениями:

$$g * h \Leftrightarrow G(f)H(f).$$

Теперь, имея дело с дискретными величинами, обсудим, как эффективно вычислять ее, используя БПФ. Изложение далее во многом следует [15], но поскольку этот источник мало доступен нашему читателю, мы решили включить основные моменты в нашу работу.

Свертка двух функций $r(t)$ и $s(t)$, обозначаемая как $r * s$, эквивалентна их свертке $s * r$. Тем не менее в большинстве приложений эти две функции имеют совершенно

различный смысл. Одна из функций, обычно $s(t)$, как правило, является сигналом или потоком данных, который изменяется неограниченно по времени (или по какому-либо другому независимому аргументу). Другая функция $r(t)$ – «функция отклика», как правило, функция с выраженным пиком, стремящаяся к нулю по обе стороны от максимума. Действие свертки состоит в том, чтобы «размазать» сигнал $s(t)$ по времени в соответствии с формой, заданной функцией отклика $r(t)$. В частности, острый пик (дельта-функция единичной площади) сигнала $s(t)$ в какой-либо момент времени t_0 должен принять форму функции отклика, но сдвинутой по времени с 0 до t_0 как $r(t - t_0)$.

В дискретном случае сигнал $s(t)$ представлен своими значениями s_j , выбранными через равные интервалы времени. Функция отклика также представлена набором дискретных чисел r_k , которые интерпретируются следующим образом: r_0 показывает во сколько раз увеличивается входной сигнал, идущий по какому-либо каналу j , при передаче его в идентичный выходной канал (с таким же номером j); r_1 показывает во сколько раз увеличивается входной сигнал в канале j перед передачей на суммирование в выходной канал $j+1$; r_{-1} показывает во сколько раз увеличивается сигнал при передаче на суммирование в канал $j-1$; и так далее как для положительных, так и для отрицательных значений k в r_k .

Пример: функция отклика с $r_0 = 1$ и всеми другими r_k , равными нулю, является тождественным фильтром – свертка сигнала с такой функцией отклика дает тот же сигнал. Другой пример: функция отклика с $r_{14} = 1,5$ и всеми остальными r_k , равными нулю. Результатом свертки будет входной сигнал, умноженный на 1,5 и имеющий задержку в 14 интервалов выборки.

Очевидно, что мы всего лишь словесно описали следующее определение дискретной свертки функции отклика конечной длительности M :

$$(r * s)_j \equiv \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k. \quad (\text{П.2.1})$$

Если дискретная функция отклика ненулевая на некотором интервале

$-M/2 < k \leq M/2$, где M – достаточно большое четное целое, то функция отклика называется «конечный импульсный отклик» (КИО), и его длительность есть M . (Заметим, что мы определяем M как число ненулевых значений r_k ; эти значения покрывают временной интервал в $M-1$ интервалов). В большинстве практических ситуаций именно конечная M представляет наибольший интерес, потому что отклик фактически имеет конечную длительность или потому что мы можем обрезать его в любой точке и аппроксимировать его функцией отклика конечной длительности.

Дискретная теорема о свертке гласит: если сигнал s_j периодичен с периодом N , так что он полностью определен значениями сигнала s_0, \dots, s_{N-1} , тогда его дискретная свертка с функцией отклика конечной длительности, N является членом пары образ-прообраз дискретного Фурье-преобразования:

$$\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} s_{j-k} r_k \Leftrightarrow S_n R_n. \quad (\text{П.2.2})$$

Здесь S_n , ($n = 0, \dots, N-1$) – дискретное Фурье-преобразование значений s_j , ($j = 0, \dots, N-1$) тогда как R_n , ($n = 0, \dots, N-1$) – дискретное Фурье-преобразование значений r_k , ($k = 0, \dots, N-1$). Эти значения r_k точно такие же, как и для интервала $k = -N/2 + 1, \dots, N/2$, но расположены с циклическим сдвигом.

Как устранять концевые эффекты, используя дополнительные нули

Дискретная теорема о свертке использует два предположения, которые не всегда выполняются. Во-первых, предполагается, что входной сигнал периодичен, тогда как реальные данные часто изменяются во времени без каких-либо повторений или представляют собой один импульс конечной длины. Во-вторых, в теореме о свертке предполагается, что длительность отклика равна периоду входного сигнала, т. е. N . Нам нужно как-то преодолеть эти ограничения.

Второе ограничение преодолевается очень просто. Почти всегда представляет интерес функция отклика длительности M , много меньшей, чем длина ряда входных данных N . В этом случае легко расширить функцию отклика до длины N , дополняя ее нулями, например определяя $r_k = 0$ для $M/2 \leq k \leq N/2$, а также для $-N/2 + 1 \leq k \leq -M/2 + 1$. Первое ограничение менее удобно. Так как теорема о свертке не очень обоснованно предполагает

ет, что данные периодичны, то происходит «засорение» первого выходного канала $(r * s)_0$ некоторыми данными (за счет циклического сдвига) с дальнего конца потока данных s_{N-1}, s_{N-2} , и т. д. Таким образом, нам нужно создать буферное пространство для нулевых значений на конце вектора s_j , чтобы обнулить эти «засорения». Сколько же нулевых значений должно быть в этом буфере? Ровно столько, каков наибольший отрицательный индекс, при котором функция отклика ненулевая. Например, если r_{-3} ненулевая, в то время как $r_{-4}, r_{-5} \dots$ равны нулю, то нам нужны три нуля в конце ряда данных: $s_{N-3} = s_{N-2} = s_{N-1} = 0$. Эти нули предохранят первый выходной канал $(r * s)_0$ от «засорений». Совершенно очевидно, что второй выходной канал $(r * s)_1$ и последующие предохраняются этими же нулями. Обозначим число конечных нулей K , тогда последняя фактическая точка входных данных будет s_{N-K-1} .

Как устранять «засорения» самого последнего канала? Так как теперь ряд данных оканчивается членом s_{N-K-1} , то последний интересующий нас выходной канал будет $(r * s)_{N-K-1}$. Канал может засориться зацикленными данными из входного канала s_0 , если только число K не будет достаточно большим, т. е. таким, чтобы соответствовать наибольшему положительному индексу k , при котором функция отклика r_k ненулевая. Например, если от r_0 до r_6 все ненулевые, тогда как $r_7, r_8 \dots$ равны нулю, нам нужно взять по меньшей мере $K = 6$ дополнительных нулей в конце ряда данных: $s_{N-6} = s_{N-5} = \dots = s_{N-1} = 0$.

Итак, нам нужно заканчивать ряд данных нулями *на одном конце*, число которых равно или максимальной положительной длительности или максимальной отрицательной длительности функции отклика, в зависимости от того, какая из них больше. (Для симметричной функции отклика длительности M нужно $M/2$ нулей.) Комбинируя эту операцию с описанным выше способом дополнения нулями отклика r_k , мы можем предохранить данные от нежелательного загрязнения за счет несуществующей периодичности.

Использование БПФ для получения свертки

Данные, дополненные нулями, представляют собой ряд вещественных чисел $s_j, j = 0, \dots, N-1$, функция отклика r_k дополнена нулями до длительности N и проведен циклический сдвиг. (Обычно это означает, что наибольший непрерывный сегмент r_k в середине массива – нулевой, а ненулевые значения сосредоточены на концах массива). Теперь можно вычислить дискретную свертку следующим образом. Используйте БПФ-алгоритм для вычисления дискретных Фурье-образов s и r . Затем нужно перемножить эти два преобразования почленно, помня, что образы состоят из комплексных чисел. Далее используйте алгоритм БПФ для получения обратного дискретного Фурье-преобразования произведения. Результатом и будет свертка $r * s$.

Для реализации процедуры свертки (1- и 2-мерной) мы использовали функции из [15], написанные на языке Фортран и С, которые мы переписали на Matlab. Для тестирования использовался описанный далее пример.

Тестовый пример

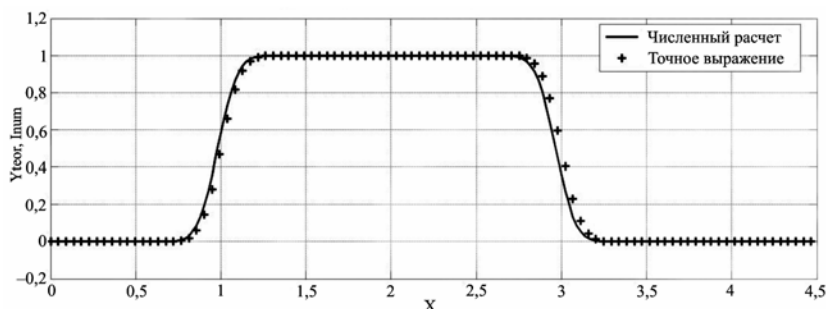
Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b \exp \left\{ - \left(\frac{x - x_0}{\alpha} \right)^2 \right\} dx = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2} \left\{ \operatorname{Erf} \left[\left(\frac{b - x_0}{\alpha} \right) \right] - \operatorname{Erf} \left[\left(\frac{a - x_0}{\alpha} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П.2.3})$$

Слева стоит фактически свертка прямоугольного импульса, который определяется функцией

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

и гауссовой функцией отклика. Если выбрать диапазон $0 \leq x_0 \leq 3b$, $a = 1, b = 3$, $\alpha = 0,1$, то мы получим типичный пример свертки с узкой функцией отклика. Результаты расчета с помощью быстрого преобразования Фурье и по точной формуле (П.2.3) показаны на рисунке:



Процедура свертки, которая использовалась нами на языке MatLab и тестовый пример размещены в Интернете по адресу www.phys.nsu.ru/cherk в пункте «Грант Минобразования». Там же находятся программы для быстрого расчета Фурье-подобных интегралов.

Список литературы

1. *Методы компьютерной оптики* / Под ред. В. А. Соифера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. *Гончарский А. В., Попов В. В., Степанов В. В.* Введение в компьютерную оптику: Учеб. пособие. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1991. 312 с.
3. *Пальчикова И. Г.* Математическое моделирование и экспериментальные исследования каустик световых полей, дифрагированных на обобщенных зонных пластинках: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 2000.
4. *Rihaczek A. W.* Principles of High-Resolution Radar. N. Y.: McGraw-Hill, 1969.
5. *Коронкевич В. П., Ленкова Г. А., Михальцова И. А. и др.* Киноформные оптические элементы: методы расчета, технология изготовления, практическое применение // Автометрия. 1985. № 1. С. 4–24.
6. *Auston D. H., Cheung K. P., Smith P. R.* Picosecond Photoconducting Hertzian Dipoles // Appl. Phys. Lett. 45. 1984. P. 284.
7. *Xu L., Zhang X.-C., Auston D. H.* Terahertz beam generation by femtosecond optical pulses in electro-optic materials // Appl. Phys. Lett. 61. 1992. P. 1784.
8. *Siegel P. H.* Nanoklystron: A Monolithic Tube Approach to THz Power Generation // IEEE Trans. Microwave theory and Techniques 50. 2002. P. 910.
9. *Bolotin V. P., Vinokurov N. A., Kayran D. A. et al.* Status of the Novosibirsk terahertz FEL // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 543. 2005. P. 81–84
10. *Bolotin V. P., Knyazev B. A., Kolobanov E. I. et al.* Quasi-continuous submillimeter optical discharge on Novosibirsk free electron laser: experiments and elementary theory // The Joint 30th International Conference on Infrared and Millimeter Waves and 13th International Conference on Terahertz Electronics. Williamsburg VA, 2005. P. 126.
11. *Фомин В. М., Яковлев В. В.* Возможности применения лазерного излучения для решения задач аэродинамики // Первое рабочее совещание «Генерация и применение терагерцового излучения»: Сб. тр. // Под ред. Б. А. Князева. Новосибирск, 2005. С. 123–136.
12. *Marion B. J.* Classical Electromagnetic Radiation. N. Y.: Academic Press, 1965.
13. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1998.
14. *Мешков И. Н., Чуриков Б. В.* Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука, 1987. Ч. 2: Электромагнитные волны и оптика.
15. *William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling et al.* Numerical recipes in C. The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 2-nd edition.
16. *Курьшев Г. Л., Ковчавцев А. П., Вайнер Б. Г. и др.* Медицинский тепловизор на основе матричного ФПУ 128 x 128, работающий в диапазоне спектра 2,8–3,05 мкм // Автометрия. 1998. № 4. С. 5.
17. *Cherkassky V. S., Knyazev B. A., Kubarev V. V. et al.* High speed terahertz imaging using thermosensitive elements // The Joint 31th International Conference on Infrared and Millimeter Waves and 14th International Conference on Terahertz Electronics. Shanghai, 2006. P. 168.
18. *Френель О.* Избр. тр. по оптике. М.: ГИТТЛ, 1955.
19. *Булатов Е. Д., Гридин С. А., Даниленко А. А.* Компьютерная оптика. М., 1987. Т. 1. С. 167.
20. *Пономаренко П. М., Якушкин С. С.* Исследование дифракционных оптических элементов на лазере на свободных электронах: Курсовая работа. Рук. Б. А. Князев. Новосибир. гос. ун-т, физический факультет, лаборатория электричества и магнетизма. 2005. 20 с.

