УДК 140.8

Н. В. Михайлова

Минский государственный высший радиотехнический колледж
пр. Независимости, 62, Минск, 220005, Беларусь
E-mail: michailova_mshrc@mail.ru

ОНТОЛОГИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ФИЛОСОФИИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Прогресс математики зависит не только от решения практических задач, но и от открытия таких формальных систем, в которых используются неявные понятия. Такого рода онтологизацию математических объектов называют «математическим платонизмом». В статье показано, что проблемы философии математики нельзя свести к вопросу о математической реальности, поскольку философам математики приходится преодолевать некоторую «онтологическую неточность».

Ключевые слова: онтология, современная математика, философия математики.

Величайшим открытием философии современной математики XX в. было методологическое осознание того непреложного обстоятельства, что различные научные знания, использующие математику, сильно взаимосвязаны. Поскольку онтология как философское учение о бытии – это часть метафизики, то нужна изрядная доля метафизического мужества, чтобы принять «онтологический принцип неполноты», характерный для философии современной математики с точки зрения ее онтологического содержания.

Математическая наука, естественно, развивается непрерывно, хотя ей и свойственен некоторый здоровый консерватизм. Одним из главных методологических достижений математики прошедшего столетия можно назвать понятие бесконечномерного пространства, которое в математике называется гильбертовым пространством, и его различными обобщениями – банаховым, метрическим и топологическим пространствами. Основополагающие работы немецкого математика Давида Гильберта стали естественным развитием частных работ шведского математика Эрика Фредгольма, связанных на рубеже XIX и XX столетий с решениями конкретных классов интегральных уравнений, получивших в дальнейшем название фредгольмовых. Благодаря непрерывному, но, вообще говоря, «недифференцируемому» характеру целостного развития математики, Гильберту удалось выделить такую важную математическую структуру, как гильбертово пространство, которая служит прекрасной иллюстрацией генезиса глубоких и плодотворных обобщений в современной математике, имеющей приложения в физике.

Прогресс математики зависит не только от решения конкретных практических задач, но и от создания новых понятий и теорий. Например, с бесконечномерными пространствами связаны огромные области современной математики, включающие теорию линейных операторов, в том числе фредгольмовых операторов их обобщений, теорию обобщенных функций, спектральную теорию операторов и многое другое. Поэтому философия математики постепенно меняет общепринятую точку зрения: «вместо того чтобы рассматривать определенного рода объекты (определенную онтологическую область) и пытаться определить, какими свойствами должна обладать наука, стремящаяся должным образом их исследовать, современный подход состоит в том, чтобы проанализировать свойства некоторой данной науки, а затем попытаться вывести из этого, какого рода онтологическую реальность можно (если это вообще можно) приписать предметам этой науки» [Агацци, 2009. С. 40]. При всей условности и размытости онтологических границ областей математики взгляд в прошлое выявляет некоторые «особые точки» с новыми мировоззренческими взглядами на развитие современной математики. Так, анализ внутренних проблем теории рядов Фурье и теории вещественных чисел привел Георга Кантора к созданию теории бесконечных множеств – одному из самых поразительных созданий человеческой мысли.

Система аксиом теории множеств, которую математики предполагают априори адекватной для получения математических истин, должна быть непротиворечивой. Но процедуры, используемые в современной математике и опирающиеся на туманные рассуждения об «огромных» и сложных по структуре множествах, не являются полностью удовлетворительными. Строгий формальный подход не выдерживает критики, поскольку понятие математической истины выходит за пределы теории формализма, о чем как раз и трактует математический платонизм работающих математиков, согласно которому математическая истина простирается за пределы сотворенного человеком. С большой долей уверенности можно сказать, что для многих людей, не сталкивающихся с современной математикой в своей профессиональной деятельности, кажется, что математическое знание является нетривиальным. Но в соответствии с принципом рациональности, принятым в естественных науках, природа никогда не создает в сознании человека ничего такого, что могло бы ухудшить его познавательные способности.

Хотя рационалисты, к которым можно отнести Платона, Декарта и Лейбница, полагали, что, по крайней мере, какое-то нетривиальное знание дано нам априорно, а логическая конструкция, которая способна эти явления непротиворечиво описать, может быть создана человеческим разумом. С точки зрения Платона, не только нетривиальное математическое знание, но вообще всякое подлинное знание не зависит от опыта. Математики всегда относились к эмпиризму с некоторым подозрением. В духе синергетического восприятия действительности, реальный мир отражается в нашем сознании нелинейно. Это нелинейное отображение нашего восприятия реального мира в «воображаемый мир», в котором вырабатываются наши отношения, приводит к определенной независимости в подходах к обоснованию математики. В связи с трудностями обоснования современной математики философы науки пытаются «смягчить» прежнюю жесткость принципа рациональности, отождествляемого с дедуктивно-аксиоматическим доказательством, обращаясь к содержательным методам исследования математики. По существу речь идет о синтезе взаимосвязанных познавательных процессов исследования в надежде обрести на этом пути философское приращение смысла.

Что же объединяет различные подходы к обоснованию современной математики? Философский ответ состоит в трактовке современной математики как универсального понятийного средства мира науки. Анализируя эволюцию философско-математических традиций, а также раскрывая предметную сущность математического знания и определяя ее отношения к сходствам и различиям в философско-методологических программах обоснования, мы открываем перспективу философского синтеза этих программ. Один из основных способов формирования общенаучной картины мира – это «синтез элементов философской онтологии с содержанием фундаментальных научных теорий определенного периода развития науки» [Лебедев, 2009. С. 10]. Философия математики в целом, как и сама математика, является реакцией на единство в духе целостности духовных и материальных ценностей. Для лучшего понимания дальнейшего изложения, заметим, что, проанализировав программы обоснования математики, наиболее плодотворные и значимые в математике высших достижений, философия математики постнеклассической науки, в контексте междисциплинарного диалога, готова переоткрыть для себя понятие «математического реализма». Заметим, что это можно по-новому интерпретировать в контексте синергетического подхода. В частности, с помощью системной триады, которая достраивает бинарную оппозицию программ обоснования математики «формализм – интуиционизм» до методологической триады «формализм – платонизм – интуиционизм».

Круговой процесс нелинейной коммуникации от частей к целому и обратно, а также связанной с ней тринитарной логики, заставляет нас возвращаться в мир идей или идеальных сущностей в духе Платона. Новое направление в философии математики, ориентированное на сущность природы математики и ее эволюцию, видит свою главную задачу в открытии новых способов коммуникации знаний, а не в редукции одного типа знания к другому, и восстановлении или реконструкции ее прежних традиционных технологий. Философскому мировоззрению, которое представляет собой теоретический синтез общих воззрений на познание, присуща абстрактно-понятийная форма постижения действительности. А одно из наиболее поразительных свойств математики состоит в том, что истинность математических утверждений может быть установлена с помощью абстрактных рассуждений. Поэтому по сравнению с естествознанием в математике процесс абстрагирования идет значительно дальше. Там, где естествоиспытатель останавливается, математик только начинает исследование, хотя «онтологические структуры» сами по себе не задают системы исходных понятий математики, поскольку онтология – это еще не реальность, а скорее путь к ее постижению.

Математика и философия как теоретические формы мировоззрения стремятся к предельно широкому уровню обобщения, выходящего на границу бытия и небытия и указывающего на опасные пределы деятельности за этой границей. Что касается новых философских подходов к целостной программе обоснования математики, то надо стремиться не к формальному синтезу, а к взаимодействию имеющихся программ. Именно такой подход приводит к естественному синтезу без ненужного изменения реально развиваемых в философии математики направлений обоснования. Главный шаг при размышлении о некоторой проблеме – это выбор идеи, которая может оказаться наиболее продуктивной. Давид Гильберт, используя формализацию языка, предложил эффективный метод развития математики. Ранний период его теории доказательств был вполне удовлетворительным, и результаты начала прошлого века остаются самыми интересными в математике.

К ним можно отнести: математическое уточнение Гильбертом широко распространенного аксиоматического метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и исследование вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами; установление с помощью адекватной формализации того, что убеждение относительно роли формальных правил в математике верно для многих областей математической практики того времени; опровержение теоремами Гёделя о неполноте оптимистических надежд Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном им пути. Теория доказательств с самого начала возникла на стыке двух конфликтующих концепций – интуиционизма и формализма, так и не выявивших победителя. Каждая из них пользовалась своей логикой, в связи с их различным методологическим подходом к проблеме выбора логических средств, допустимых в математических рассуждениях.

По этому поводу известный логик Н. М. Нагорный сказал: «В самом деле, высказывание, оказавшееся истинным в рамках одной логики, вполне могло оказаться ложным в рамках другой. Более того, могло оказаться, что высказывание, истинное в рамках обеих логических систем, в действительности доказывается в них по-разному, так что доказательство, приемлемое в рамках одной из этих систем, будет отвергаться в рамках другой, и наоборот» [2001. С. 107]. Ограничительные результаты Курта Гёделя показали, как хрупка грань между осмысленным и неосмысленным, между правильным и неправильным в математике. Различие подходов в вопросе об обосновании математики ярко проявляется при рассмотрении проблем, связанных с идеей бесконечности. Для правильного научного подхода к понятию формальной математической теории нужна соответствующая философско-методологическая основа, и необходим определенный опыт конкретизации содержания бесконечного в частных науках. Самим работающим математикам решиться на подобный философско-методологический анализ, опираясь только лишь на абстрактные математические соображения и выявляя их объективное содержание, непросто.

Способность человека мыслить одновременно понятиями, образами и символами является источником устойчивой системной триады, в которой, согласно Р. Г. Баранцеву, доминируют аналитическое начало (рацио), качественное начало (эмоцио) и субстстанциальное начало (интуицио). Многие математики, физики и философы приняли новую парадигму о существовании пределов постижения мира, однако если эти границы истинные, то наука будет достаточно полной и в рамках этих границ. Их «примеру смирения» последовали и другие науки, осознавая при этом, что хотя ограничения и пределы возможностей логики не влияют на ход событий в реальном мире, они могут определять то, что претендует на статус обоснованных интерпретаций этих событий. Вообще говоря, логичность как условие эффективности чаще всего проявляется лишь в узко специализированных сферах человеческой деятельности: например, физик-экспериментатор не обязан быть непротиворечивым, а должен эффективно описывать природу на определенных уровнях. Математики убеждены, что любые принципиальные математические результаты, в том числе полученные Кантором, с необходимостью имеют отношение к свойствам физической реальности.

Поиски решения проблемы обоснования современной математики на уровне философских обобщений нуждаются в философской рефлексии над эволюцией взглядов на сущность природы математики. Такой философско-методологический анализ необходим и при выявлении смысла системы аксиом и правил вывода, способных приводить к математическим истинам, не выводимым из заданных аксиом и правил вывода. В этом контексте принципы рефлексии противопоставляются рассуждениям формалистов. Среди различных интерпретаций рефлексии можно выделить «философскую», на долю которой приходится общая проблема рефлексивной деятельности сознания как механизма систематизации. Философская рефлексия своими системами категорий и принципов универсализирует разные способы деятельности сознания, их средства и результаты. Рефлексия, по Канту, есть осознание отношения данных представлений к различным источникам познания. Только благодаря философской рефлексии отношение их друг к другу может быть правильно определено. Рефлексия, при всех различиях в ее трактовке, понимается как самосознание, которое устанавливает основания всего того, что составляет содержание сознания. Трактовка рефлексии зависит от того, какая область существования признается в качестве онтологической сущности для сознания. Философская рефлексия здесь предстает как универсальный способ не в смысле «общий у многих», а как «общий для многих».

Принципы математического мышления связаны не только со свойствами нашего сознания, но и проявляют себя в законах внешнего мира. Поэтому не удивительно, что сфера надежности математики определяется через выявление «онтологических оснований» математического мышления, без которых философия математики может потерять слишком многое. В отношении онтологических вопросов формальных математических систем допустим определенный аналог «принципа терпимости». Философ математики В. В. Целищев отмечает: «В некотором смысле это вполне разумная позиция, потому что надежды на то, что онтологические вопросы обретут определенность в философии математики, оказываются неоправданными… Понятие объекта при экспликации его в формальных системах теряет однозначность и становится весьма расплывчатым, что лишает смысла даже традиционные онтологические различения» [2003. С. 11]. Сложная система аксиом современной теории формируется не на основе очевидности, а как логическое основание исторически сложившегося онтологического ядра математики. В частности, математическая рефлексия как внутреннее применение математики к самой себе может оказать более сильное эмоциональное воздействие, чем голословные заявления о пользе математических теорий и понятий. Так как при этом на уровне теоретического сознания происходит актуализация многих «аксиом обыденного сознания», то нужна философская рефлексия над математикой, которая представляет собой познавательный аспект философско-математического постижения действительности.

Например, арифметика и логика, в отличие от других областей знания, представляют собой универсальную онтологию, фиксирующую принципы предметности, независимые от каких-либо их методологических особенностей. В частности, для обоснования действительных чисел использовалось пополнение пространства рациональных чисел пределами фундаментальных последовательностей рациональных чисел или, другим способом, с помощью дедекиндовых сечений на множестве рациональных чисел, которые в итоге получаются из натуральных чисел. Это и есть так называемая «арифметизация анализа». Органическая связь математики с онтологией вытекает из того мировоззренческого обстоятельства, что только онтологические представления могут дать систему стабильных и общезначимых смыслов, лежащих в основе предметного содержания суждений. Нельзя понять сущностной природы математики как науки, если не уяснить того, что математические структуры имеют онтологический, а не эмпирический характер, поэтому, в частности, невозможно исключить «математический платонизм» из направлений обоснования современной математики.

Как бы не изменялась «математическая реальность» и какие бы новые математические образы не пришлось изобретать для ее описания, математические теории, составляющие ее основу, не могут исчезнуть или измениться, так как эта часть математики зависит лишь от категориального видения мира. Обращение математиков к философии и методологии происходит в такие периоды, когда требует осмысления большой разнородный и часто методологически противоречивый накопленный математический материал. «В современной математике сложилась ситуация, когда отдельные онтологические и гносеологические основания как внутри уровней, так и относящиеся к разным уровням не полностью совместимы друг с другом» [Катречко, 2008. С. 92]. Для философов математики ориентиром в такой методологической деятельности может служить стабильность и историческая устойчивость тех областей математики, которые, несмотря на эволюцию философских взглядов на природу математики, указывают на истинные границы формальных математических теорий и дают тем самым рациональные аргументы для оправдания программ обоснования математики в ее конкретных разделах.

Главная методологическая трудность всех программ обоснования математики состоит в определении природы и границ «обосновательного слоя» при разных методологических подходах к этой проблеме. Настаивая на едином языке оснований математики, мы навязываем математике чисто формальное единство. Итог исследований по основаниям математики прошлого столетия состоит в том, что или следует отказаться от построения программ обоснования вообще, или надо воспользоваться новой обосновательной методологией, с помощью которой можно попытаться некоторым образом реабилитировать актуальное бесконечное, имеющее непосредственное онтологическое обоснование через оправдание некоторой части трансфинитной математики. Таким образом, можно уйти от финитизма в программах обоснования, существенно расширяя тем самым возможности формалистского подхода, в русле которого развивается современная математика.

Исследования в области проблем обоснования математики преследуют важнейшие общенаучные цели. Так, «математический платонизм» можно рассматривать как определенный альянс между философами и математиками с целью поиска методологических оснований интегративных процессов современной философско-математической мысли. Математики всегда были сосредоточены на своей истории и эволюции математических понятий, обращая внимание на методы исследования, использовавшиеся в математике предшествующих уровней, и на создание таких формальных систем, в которых явно формулировались некоторые ранее неявно используемые операции. Многие идеальные конструкции выглядят как самодостаточные, хотя при таком подходе к философии математики довольно трудно объяснить совпадение физической реальности с математическими структурами. Не случайно такого рода онтологизацию математических объектов иногда называют «математическим платонизмом», хотя в эпистемологическом отношении платонизм как интуитивный акт веры, объясняющий математическую реальность идеальных объектов, есть нечто трудно передаваемое.

«Онтологический статус этих идеальных предметов устанавливается каким-то иным способом. Чтобы прояснить этот способ, уместно, на мой взгляд, принять именно метафизически нейтральную позицию и воздержаться от суждений о существовании тех или иных предметов. Существование в таком случае должно быть понято как свойство самого мыслимого предмета, т. е. определиться изнутри самой мысли» [Гутнер, 2011. С. 52]. Философские теории, согласно которым системы, возникающие в реальном мире, являются реализациями общих идей как некоего царства платонических объектов или собрания априорных истин, привлекательны для профессиональных математиков. Прежде всего, тем, что математика для них – достоверное знание, результаты которого обладают высокой степенью неопровержимости и истинности. Сами платонистские идеи недоступны человеку, поскольку они бесконечно совершенны, поэтому могут быть реализованы в человеке разными способами, иногда противоречащими друг другу, в чем, можно сказать, и проявляется человеческое несовершенство. Противоположные взгляды на природу математической реальности становятся менее драматичными после их конкретизации с помощью математических примеров.

Мировоззрение, которого придерживаются работающие математики, правильнее было бы назвать, следуя математику и логику Н. Н. Непейвода, «умеренным скептическим платонизмом», в отличие от «математического платонизма», не предполагающим, что математические понятия реально где-то существуют. Философские аргументы, апеллирующие исключительно к математическому платонизму без рассмотрения программ формализма и интуиционизма, в рамках которых реально развивается математика, мало помогают в методологическом анализе оснований математики. Десятилетние дискуссии между «классиками» и «конструктивистами» во многом сгладили конфронтацию и определенную методологическую напряженность между сторонниками формалистского и интуиционистского направлений в обосновании математики. В действительности линия раздела проходит не между формалистскими и интуиционистскими принципами, а поперек этой традиционной границы в подходах к обоснованию. Гармонизацией некогда резкого диссонанса в их отношениях послужило то, что формальная теоретико-множественная математика не была бы в принципе возможна, если бы ее грандиозный замысел не был доступен математической интуиции.

Критический пересмотр широко распространенных в философской среде покровительственных воззрений на основания математики в пользу одной из программ обоснования математики можно уподобить кризису человеческой мысли, повторяющей старый аргумент. Поэтому полученные таким образом результаты в любом случае будут не вполне удовлетворительными, что позволяет сделать вывод о необходимости должной осмотрительности при решении этой проблемы. Во-первых, исследования в области оснований математики можно отнести к важнейшим общеметодологическим целям; во-вторых, философский взгляд на эту проблему объединяет различные разделы математики в целостную научную дисциплину; в-третьих, такие философско-методологические исследования не только расширяют горизонты математизации знания, но и раскрепощают само математическое мышление, делая его самостоятельным объектом философско-математического исследования.

Философский подход к пониманию целостности современной математики заключен не только в ней самой, но и в философском понимании бытия, точнее в онтологии науки и ее основных категориях. Рассматривая математическую теорию в целом, можно, говорить как об онтологически истинных теориях, так и о логически непротиворечивых теориях. При этом необходимо разделить онтологию на систему идеализаций, связанных с математически-познавательной деятельностью, и на систему формальных математических структур, базирующихся на онтологических представлениях. Так, например, арифметика как формальная система основана на идеализациях, относящихся к онтологии, а теоретико-множественная аксиоматика уже не обладает статусом аксиом арифметики, несмотря на ее математическую убедительность. Тем не менее можно говорить о целостной системе онтологических категорий, включающей категории пространства и времени, случайности и необходимости, реальности и виртуальности, в том смысле, что эти категории описывают акты деятельности в онтологических предпосылках.

Поиски окончательного ответа на вопросы обоснования не должны выливаться в имитацию математического исследования, когда философия математики пытается следовать в собственных стандартах строгости за самой математикой. Хотя чистая математика все еще остается наиболее методологически обоснованным научным знанием, ее притязания на уникальный онтологический статус становятся не достаточно обоснованными. Надежда на решение методологической задачи по достижению полной определенности путем формирования прочных оснований математики была поколеблена сначала гёделевскими результатами, а затем и возможным появлением в обозримом будущем математических рассуждений такой сложности, о которой никто из математиков помыслить не может. Соответствующие кризисы в философии математики носят эпистемологический характер и не связаны с онтологией математики. Поэтому «единственный способ, которым можно причинить онтологический ущерб, состоит в блокировании дальнейших исследований, настаивая на плохой старой теории ценой новой хорошей теории» [Рорти, 1997. С. 155]. Реальная проблема обоснования современной математики оказалась гораздо тоньше, чем набившие оскомину вопросы о математической реальности и математической истине.

Хотя математические доказательства являются основными объектами изучения математического рассуждения, нельзя отказываться от анализа смысла теорем, так как их можно интерпретировать в терминах различных онтологий математических объектов. В связи с развитием многозначных логик, нестандартного анализа и нечетких множеств философы математики, столкнувшись с «онтологической неточностью», стремились описывать ее точно, поскольку заложенные в теоретическую математику априорные концепции должны были быть надежным ориентиром в обосновании математики. Только в начале XXI в., наконец, было осознано, что поскольку полнота математических теорий недостижима, то от современной математики требуется сохранять единство и целостность математического знания, опираясь на онтологическую истинность его исходных положений.

Для углубления философии математики, в контексте эволюции взглядов на сущность природы математики на пути рационального обоснования математического знания, необходим системный анализ различных потоков философско-математической мысли. А для выхода в новое смысловое пространство нужен системный синтез различных методологических точек зрения, ставших достоянием истории философии математики. Именно внутренняя логика историко-философского процесса как логика последовательно возникающих программ обоснования математики стимулирует выделение проблемного поля исследований в философии современной математики.

Список литературы

Агацци Э. Переосмысление философии науки сегодня // Вопр. философии. 2009. № 1. С. 40–50.

Гутнер Г. Б. Способы конструирования идеального предмета // Эпистемология и философия науки. 2011. Т. 29, № 3. С. 49–56.

Катречко С. Л. Трансцендентальная философия математики // Вестн. Московского университета. Сер. 7. 2008. № 2. С. 88–105.

Лебедев С. А. Предмет и структура современной философии науки // Вестн. Московского университета. Сер. 7. 2009. № 1. С. 3–25.

Нагорный Н. М. К вопросу о непротиворечивости классической формальной арифметики // Логические исследования. М.: Наука, 2001. Вып. 8. С. 105–128.

Рорти Р. Философия и зеркало природы. Новосибирск, 1997. 320 с.

Целищев В.В. Онтология математики: объекты и структуры. Новосибирск: Нонпарель, 2003. 240 с.

Материал поступил в редколлегию 11.01.2012

N. V. Mikhailova

ONTOLOGICAL UNCERTAINTY OF THE PHILOSOPHY OF MODERN MATHEMATICS

The progress of mathematics depends not only on the solution of practical problems but also on discovering such formal systems in which implicit concepts are used. Such ontologization of mathematical objects is named «mathematical Platonism». The article shows that the problems of the philosophy of mathematics cannot be reduced to the question about the mathematical reality, as philosophers of mathematics have to overcome some «ontological discrepancy».

Keywords: ontology, modern mathematics, philosophy of mathematics.