УДК 537.36

Т. А. Джулай

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОКИНЕТИКИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

В данной статье построена математическая модель электрокинетики для слоистых пористых сред, проведены серии численных расчетов. Была замечена слабая зависимость в стационарном случае от физических параметров среды, в отличие от краевых значений давления и потенциала электрического поля.

Введение

При прохождении упругих волн в насыщенных жидкостью пористых средах наряду с другими явления наблюдается так называемый электросейсмический эффект. Он заключается в появлении разности в электрических потенциалов между точками пористой среды, расположенных на различных расстояниях от источника волн. Этот эффект был обнаружен А. Г. Ивановым [1] в 1939 г. при наблюдении за упругими волнами в поверхностных слоях почвы. А. Г. Иванов отметил, что этот эффект представляет собой одно из проявлений электрокинетических свойств насыщенных жидкостью пористых сред. Соответственно, при разработке нефтяных месторождений и эксплуатации нефтяных скважин определенный интерес представляют электрокинетические эффекты в пласте.

Данная работа посвящена численному решению задач электрокинетики в стационарном случае. Численно решается уравнение электрокинетики для слоистых пористых сред с использованием метода неполной факторизации Булеева и сопряженных градиентов.

§ 1. Постановка задачи

Пусть имеется прямоугольный коллектор ($[0, H_x] \times [0, H_y]$) в нефтеносном пласте, в котором создан избыток давлений, под действием которых начинается процесс фильтрации жидкости из коллектора в скважину и образование электрического поля.

Стационарные процессы среды описываются уравнениями теории электрокинетики в пористых средах. Выполняется закон сохранения массы и уравнения движения жидкости в случае вертикально неоднородных слоистых сред. Скорость движения жидкости и плотность тока в β-м слое описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2, 3]:

$$\operatorname{div}(\rho_{l_\beta} \mathbf{v}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0\,, \tag{2}$$

$$\rho_{l_\beta} \mathbf{v} = -\frac{1}{\chi_\beta \rho_\beta} \nabla p + \frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta} \nabla u\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{J} = -\frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta \rho_\beta} \nabla p - \frac{\sigma_\beta \chi_\beta - \gamma_\beta^2}{\chi_\beta} \nabla u\,. \tag{4}$$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 1. С. 29–32

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $p = p(\mathbf{x})$ — скорость фильтрации жидкости и давления в вертикально неоднородной упругопористой среде с постоянными коэффициентами, где ρ_β — плотность пористой среды ($\rho_\beta = \rho_{l_\beta} + \rho_{s_\beta}$), ρ_{l_β} — парциальная плотность жидкости ($\rho_{l_\beta} = \rho^f_{l_\beta} d_{0_\beta}$), $\rho^f_{l_\beta}$ — физическая плотность жидкости, ρ_{s_β} — парциальная плотность упругопористого тела ($\rho_{s_\beta} = \rho^f_{s_\beta}(1,0 - d_{0_\beta})$), $\rho^f_{s_\beta}$ — физическая плотность упругопористого тела, d_{0_β} — пористость среды, χ_β — межкомпонентное трение в слое, $\mathbf{J}$ — плотность тока, σ_β — проводимость пористой среды, γ_β — электрокинетический коэффициент среды, $\mathbf{x} = = (x, y)$ — точка из R^2.

Зададим краевые условия для каждого слоя β. Слева — условие постоянного давления p_{0_β} и напряжения электрического поля u_{0_β}:

$$p|_{x=0} = p_{0_\beta}, \quad u|_{x=0} = u_{0_\beta},$$

справа — условие непротекания жидкости и непроводимости электрического тока:

$$\rho_{l_\beta}\mathbf{v}|_{x=H_x} = 0,$$
$$\mathbf{J}|_{x=H_x} = 0,$$

в верхнем слое сверху и в нижнем слое снизу — условие непротекания жидкости и непроводимости электрического тока:

$$\rho_{l_0}\mathbf{v}|_{y=0} = 0, \qquad \mathbf{J}|_{y=0} = 0,$$
$$\rho_{l_N}\mathbf{v}|_{y=H_y} = 0, \quad \mathbf{J}|_{y=H_y} = 0.$$

Между слоями выполняется условие из закона сохранения масс и заряда (1)–(2).

§ 2. Численный метод решения

Одним из наиболее эффективных методов, с точки зрения минимизации вычислительной работы, является метод сопряженных градиентов с использованием схемы неполной факторизации Булеева, с диагональной компенсацией. Для решения систем уравнений (1)–(4) β-го слоя использовался метод неполной факторизации Булеева (МНФБ) и сопряженных градиентов [6, 7] в векторном случае.

$$\mathbf{p^0_{i,j}u_{i,j}} - \mathbf{p^1_{i,j}u_{i-1,j}} - \mathbf{p^2_{i,j}u_{i,j-1}} - \mathbf{p^3_{i,j}u_{i+1,j}} - \mathbf{p^4_{i,j}u_{i,j+1}} = \mathbf{f_{i,j}}\,,$$

где вектор $\mathbf{u_{i,j}} = \begin{vmatrix} p_{i,j} \\ u_{i,j} \end{vmatrix}$, матрица $\mathbf{p^1_{i,j}} = \frac{1}{h_x^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\chi_\beta\rho_\beta} & -\frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta} \\ \frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta\rho_\beta} & \frac{\sigma_\beta\chi_\beta-\gamma_\beta^2}{\chi_\beta} \end{vmatrix}$, матрица $\mathbf{p^3_{i,j}} = \frac{1}{h_x^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\chi_\beta\rho_\beta} & -\frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta} \\ \frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta\rho_\beta} & \frac{\sigma_\beta\chi_\beta-\gamma_\beta^2}{\chi_\beta} \end{vmatrix}$, матрица $\mathbf{p^2_{i,j}} = \frac{1}{h_y^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\chi_\beta\rho_\beta} & -\frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta} \\ \frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta\rho_\beta} & \frac{\sigma_\beta\chi_\beta-\gamma_\beta^2}{\chi_\beta} \end{vmatrix}$, матрица $\mathbf{p^4_{i,j}} = \frac{1}{h_y^2}\begin{vmatrix} \frac{1}{\chi_\beta\rho_\beta} & -\frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta} \\ \frac{\gamma_\beta}{\chi_\beta\rho_\beta} & \frac{\sigma_\beta\chi_\beta-\gamma_\beta^2}{\chi_\beta} \end{vmatrix}$.

$$\mathbf{p^0_{i,j}} = \mathbf{p^1_{i,j}} + \mathbf{p^2_{i,j}} + \mathbf{p^3_{i,j}} + \mathbf{p^4_{i,j}}\,.$$

§ 3. Численные результаты

В данной работе проводилось численное моделирование решения прямой задачи для заданных параметров среды. Разностная область бралась следующих размеров: по пространству 71×71 узлов, разделенному на пять слоев по 5, 30, 5, 30, 5 узлов каждая. На графике изображены распределение порового давления и поле скоростей жидкости для двух моделей.

Для численных расчетов брались параметры:

$$\rho_s^f = \{2,7\,;2,7\,;2,7\,;2,7\,;2,7\} \qquad \rho_l^f = \{1,1\,;1,1\,;1,1\,;1,1\,;1,1\}$$
$$d_0 = \{0,01\,;0,1\,;0,2\,;0,1\,;0,01\} \qquad \chi = \{100,0\,;10,0\,;0,01\,;10,0\,;100,0\}$$
$$\sigma = \{0,02\,;2,0\,;300,0\,;2,0\,;0,02\} \qquad \gamma = \{0,01\,;1,0\,;5,0\,;1,0\,;0,01\}.$$

Для первой модели (рис. 1) были взяты следующие параметры давления и напряжения на левой границе:

$$p|_{x=0} = \{0,0\,;1,0\,;20,0\,;1,0\,;0,0\}\,, \quad u|_{x=0} = \{1,0\,;1,0\,;1,0\,;1,0\,;1,0\}.$$

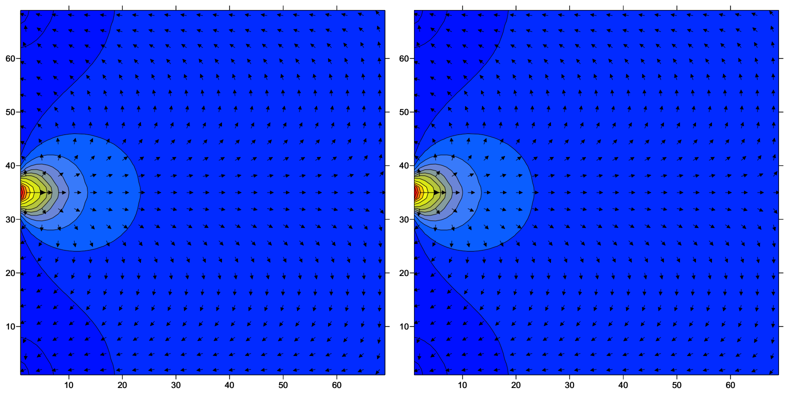

Рис. 1. Слева — распределение порового давления и плотности тока, справа — распределение порового давления и поля скоростей

Для второй модели (рис. 2) были взяты следующие параметры давления на левой границе:

$$p|_{x=0} = \{0,0\,;1,0\,;20,0\,;1.0\,;0.0\}\,, \quad u|_{x=0} = \{0,0\,;20,0\,;1,0\,;20,0\,;0,0\}.$$

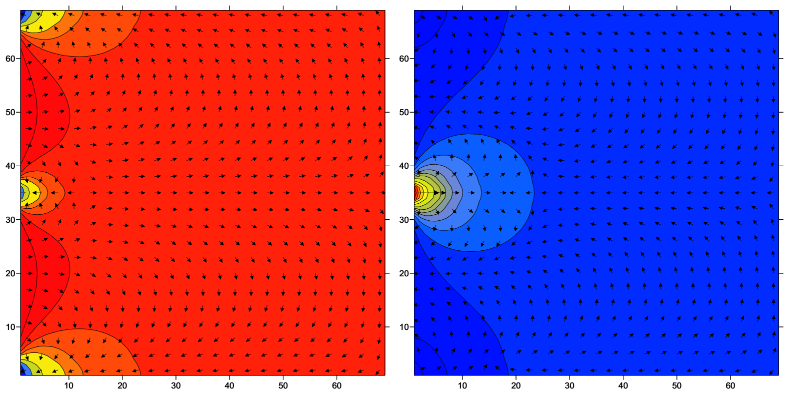

Рис. 2. Слева — распределение потенциала и плотности тока, справа — распределение давления и поля скоростей

Для третьей модели (рис. 3) были взяты следующие параметры давления на левой границе:

$$p|_{x=0} = \{1,0\,;1,0\,;1,0\,;1,0\,;1,0\}\,, \quad u|_{x=0} = \{0,0\,;1,0\,;20,0\,;1,0\,;0,0\}.$$

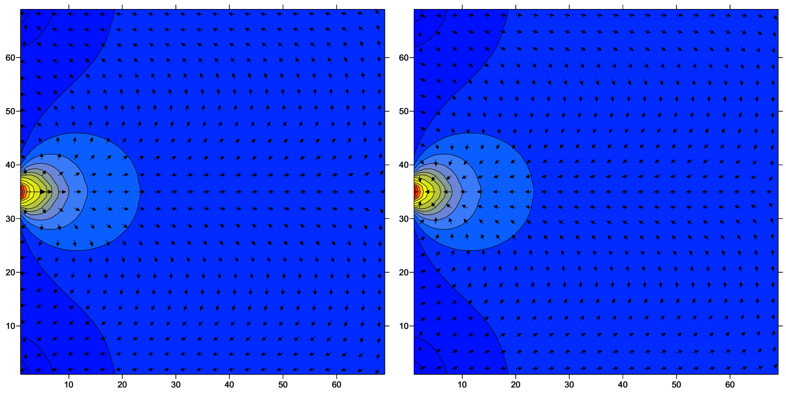

Рис. 3. Слева — распределение потенциала и плотности тока, справа — распределение потенциала тока и поля скоростей

Список литературы

1. *Иванов А. Г.* Эффект электризации пластов Земли при прохождении через нее упругих волн // Докл. АН СССР. 1939. Т. 24, № 1. С. 41–43.
2. *Dorovsky V. N., Imomnazarov Kh. Kh.* A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium // Mathl. Comput. Modelling. 1994. V. 20. No. 7. P. 91–97.
3. *Имомназаров Х. Х.* Модифицированные законы Дарси, учитывающие электромагнитные поля // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 1. С. 33–34.
4. *Доровский В. Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
5. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. N.Y.: Nova Science, 1995.
6. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы математической физики. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003.

Материал поступил в редколлегию 05.02.2006

Адрес автора
ДЖУЛАЙ Татьяна Александровна
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск
ул. Пирогова, 2, к. 403
e-mail: tanya@gorodok.net