УДК 510.6;510.67;512.8

Д. А. Тусупов

ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ КОНЕЧНОЙ Δ^0_α-РАЗМЕРНОСТИ*

В данной работе представлены следующие результаты.

1. Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует вычислимый ориентированный граф (симметрический, иррефлексивный граф), который является Δ^0_α-категоричным, но не относительно Δ^0_α- категоричным. Данный граф не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта.

2. Для каждого вычислимого ординала последователя α существует вычислимый ориентированный граф (симметрический, иррефлексивный граф) с отношением, которое является внутренне Σ^0_α, но не относительно внутренним Σ^0_α-отношением.

3. Для каждого вычислимого ординала последователя α и каждого конечного n существует ориентированный граф (симметрический, иррефлексивный граф) Δ^0_α-размерности n.

4. Для каждого вычислимого ординала последователя α существует ориентированный граф (симметрический, иррефлексивный граф), имеющий представления только в степенях таких множеств X, что имеет место $\Delta^0_\alpha(X) \neq \Delta^0_\alpha$. В частности, для каждого конечного n существует ориентированный граф, имеющий представления только в не n-низких степенях.

Введение

Под сложностью структуры понимаем сложность атомной диаграммы относительно тьюринговых степеней. Через $deg(A)$ обозначим сложность множества A.

Пусть даны вычислимые структуры $(\mathcal{A}, \nu)$ и $(\mathcal{B}_i, \nu_i)$, $i = 0, 1$ и изоморфизмы $f_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_i$ с условием $f_i * \nu = \nu_i * \varphi_i$, где φ_i являются Δ^0_α-функциями. Тогда

1) f_i называется Δ^0_α-изоморфизмом между $(\mathcal{A}, \nu)$ и $(\mathcal{B}_i, \nu_i)$;

2) если функции φ_0 и φ_1 являются Δ^0_α-эквивалентными, тогда изоморфизмы f_0 и f_1 называются Δ^0_α-эквивалентными и структуры $(\mathcal{B}_i, \nu_i)$, $i = 0, 1$ Δ^0_α-изоморфно эквивалентными;

3) число вычислимых представлений относительно Δ^0_α-изоморфизмов с точностью до Δ^0_α-эквивалентности называется Δ^0_α-размерностью структуры $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — вычислимая структура. Мы говорим, что $\mathcal{A}$ Δ^0_α-категорична, если для всех вычислимых структур $\mathcal{B}$, изоморфных структуре $\mathcal{A}$, существует Δ^0_α-изоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. Мы говорим, что $\mathcal{A}$ относительно Δ^0_α-категорична, если для всех структур $\mathcal{B}$, изоморфных структуре $\mathcal{A}$, существует $\Delta^0_\alpha(B)$-изоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. При $\alpha = 1$ термин «Δ^0_α» заменяется на «вычислимый». При этом Δ^0_1-изоморфные структуры называются автоэквивалентными и Δ^0_1-категоричные структуры называются автоустойчивыми.

Пусть $\mathcal{A}$ структура и U отношение на $|\mathcal{A}|$. Отношение U назовем внутренне Σ^0_α-отношением, если для всех вычислимых представлений структуры $\mathcal{A}$ образ отношения U является Σ^0_α-множеством. Отношение U назовем относительно внутренне Σ^0_α-отношением, если для всех $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$ образ отношения U является $\Sigma^0_\alpha(B)$-множеством.

*Работа выполнена при поддержке проекта НШ-4413.2006.1.

Существуют синтаксические условия, которые влекут Δ^0_α-категоричность и относительную Δ^0_α-категоричность. Семейством Скотта для структуры $\mathcal{A}$ называется множество формул Φ с фиксированным конечным кортежом параметров из $|\mathcal{A}|$ таких, что 1) любой кортеж из $|\mathcal{A}|$ удовлетворяет некоторой формуле φ из Φ, и 2) если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ удовлетворяют одной и той же формуле из Φ, тогда существует автоморфизм структуры $\mathcal{A}$, переводящий $\overline{a}$ в $\overline{b}$.

Вычислимо перечислимое (в дальнейшем сокращаем как в.п.) семейство Скотта, состоящее из конечных $\exists$-формул, называется формально в.п. семейством Скотта. Формально Σ^0_α-семейство Скотта есть Σ^0_α-семейство, состоящее из вычислимых Σ_α-формул языка $L_{\omega_1,\omega}$.

Результаты, описывающие связь семантических и синтаксических свойств

Теорема 1 (Ash-Knight-Manasse-Slaman, Chisholm). *Вычислимая структура относительно Δ^0_α-категорична тогда и только тогда, когда она имеет формально Σ_α-семейство Скотта.*

Теорема 2 (Ash-Knight-Manasse-Slaman, Chisholm). *Пусть $\mathcal{A}$ вычислимая структура. Тогда U на $|\mathcal{A}|$ относительно внутренне Σ^0_α-отношение тогда и только тогда, когда U определяется вычислимой Σ_α-формулой с конечным числом параметров из $|\mathcal{A}|$.*

Не все результаты, касающиеся вычислимых свойств могут быть релятивизированы на высокие уровни сложностей. McCoy показал, что вычислимая размерность не может быть релятивизирована

Теорема 3 (McCoy). *Пусть $\mathcal{A}$ — вычислимая структура, не имеющая формально в.п. семейство Скотта, тогда для каждого $n > 1$ существуют $\mathcal{B}_i \cong \mathcal{A}$, где $i \leq n$ такие, что не существует $(\mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_n)$-вычислимого изоморфизма из $\mathcal{B}_i$ на $\mathcal{B}_j$ для всех i, j таких, что $1 \leq i < j \leq n$.*

Нас интересует вопрос: существует ли связь семантических и синтаксических свойств структуры и отношений в известных классах алгебраических систем таких, как группы, кольца, решетки и т.д.?

Одним из способов получения таких результатов является кодирование структуры с такими свойствами в граф с сохранением интересующих нас свойств. Для других алгебраических структур существуют достаточно развитые методы кодирования графов в эти структуры.

Результаты первых трех параграфов получены совместно с С. С. Гончаровым. Результат четвертого параграфа получен автором.

§ 1. Кодирование структуры счетной предикатной сигнатуры в структуру с одним n-местным предикатом

Рассмотрим сначала кодирование структуры бесконечной счетной предикатной сигнатуры, где местности предикатов ограничены в совокупности, в структуру конечной предикатной сигнатуры, а затем кодирование структуры конечной сигнатуры — в структуру с n-местным предикатом.

Используем технику доказательства С. С. Гончарова из работы [2] для доказательств следующих предложений.

Пусть $\sigma = \langle P_i^{n_i} \ i \in \omega \rangle$ и где для всех $i \in \omega$ имеет место $n_i \leq k$ для некоторого фиксированного числа K. Для каждого $k \leq K$ рассмотрим предикаты $P_{i_0^k}, P_{i_1^k}, P_{i_2^k}, \ldots$, $P_{i_l^k}, \ldots$, $l \in N'_k$, из сигнатуры σ местности k и множества N'_k либо совпадают с ω, либо являются начальным сегментом ω.

Пусть $\sigma' = \{=, R_0^1, R_1^2, \ldots, R_k^{k+1}, Q^1, \lhd\}$.

Предложение 1. *Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ существует структура $\mathcal{A}_0$ сигнатуры σ' такая, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации ν структуры $\mathcal{A}$ вычислимой нумерации μ_ν структуры $\mathcal{A}_0$, при этом:*

1) *нумерации ν_{μ_0} не $\mathbf{d}$-автоэквивалентна ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда нумерации μ_0 и μ_1 не $\mathbf{d}$-автоэквивалентны.*

2) *для любой конструктивизации μ структуры $\mathcal{A}_0$ существует конструктивизация ν структуры $\mathcal{A}$ такая, что μ и μ_ν являются $\mathbf{d}$-автоэквивалентны.*

3) *если $\mathcal{A}$ не имеет формально Σ^0_α-семейство Скотта, то $\mathcal{A}_0$ не имеет формально Σ^0_α-семейство Скотта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная модель сигнатуры σ и $M = |\mathcal{M}|$. Определим основное множество M_0 структуры сигнатуры σ' следующим образом:

$M_0 = A \cup \{a_i : i \in \omega\}$, где a_i-новые и различные константы.

Определим предикаты на M_0 следующим образом:

1. Q^1 выделяет все множество новых констант;

2. $x \lhd y$, если имеют место соотношения $x = a_n$ и $y = a_{n+1}$ для некоторого n;

3. $(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in R_k^{k+1}$, если имеют место соотношения $x_0 = a_l, x_j \in M$ для $1 \leq j \leq k$ и $\mathcal{M} \models P_{i_l^k}(x_1, \ldots, x_k)$.

Ясно, что из вычислимости структуры $\mathcal{M}$ следует вычислимость структуры $\mathcal{M}_0$.

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — две структуры сигнатуры σ и $Iz(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ — множество изоморфизмов из $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$. По каждому изоморфизму φ из $Iz(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ определим изоморфизм φ^* из множества $Iz(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0)$, где $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}_0$ структуры, построенные по $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ соответственно. Пусть дан $\varphi \in Iz(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, тогда $\varphi^* \in Iz(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0)$ имеет вид: $\varphi^* = \varphi(x)$, если $x \in \omega$, и $\varphi^* = x$, если $Q(x)$.

Если $\varphi(x)$ является $\mathbf{d}$-изоморфизмом между вычислимыми структурами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, тогда изоморфизм $\varphi^*(x)$ между вычислимыми структурами $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{N}_0$ является $\mathbf{d}$-изоморфизмом.

Отображение из множества $Iz(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ на $Iz(\mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0)$ является отображением «на». На самом деле отображение $f = \varphi^* \restriction \neg Q$ эквивалентен некоторому изоморфизму φ из $Iz(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Лемма 1. *Для любой вычислимой структуры $\mathcal{M}'_0$ сигнатуры σ', $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{M}_0$, найдется вычислимая структура $\mathcal{N}$ сигнатуры σ такая, что вычислимая структура $\mathcal{N}_0$, соответствующая $\mathcal{N}$, есть структура сигнатуры σ' и является $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{A}'_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\mathcal{N}| \rightleftharpoons |\mathcal{M}_0'|\backslash Q(\mathcal{M}_0')$. Данное множество вычислимо и существует одно-однозначная вычислимая функция f из ω на $|\mathcal{N}|$. Определим предикаты из σ на ω следующим образом:

$(n_1, \ldots, n_k) \in P_{i^k_m}$ тогда и только тогда когда $(l, f(n_1), \ldots, f(n_k)) \in R^{k+1}_k$, где для l элементы $a_0, a_1, \ldots, a_m$ образуют цепь $a_0 \lhd a_1 \lhd \ldots \lhd a_m$ и $l = a_m$. Ясно, что определенная таким образом нумерация вычислимая.

Покажем, что структуры $\mathcal{A}_0'$ и $\mathcal{N}_0$ являются $\mathbf{d}$-изоморфными. Отображение, которое мы определим, будет искомое.

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \omega; \\ l, & \text{если } x = a_m, \text{и существуют}\, a_0 \lhd a_1 \lhd \ldots \lhd a_m \,\text{и}\, l = a_m. \end{cases} \tag{1}$$

Справедливость третьего условия предложения следует из определимости основных предикатов и их отрицаний сигнатуры σ' через $\exists$-формулы сигнатуры σ. Предложение доказано.

Пусть $\sigma_0 = \langle P_i^{n_i} \;\; i \le k \,\rangle$ — некоторая конечная предикатная сигнатура и $\sigma_1 = \langle\, P^n \,\rangle$ сигнатура, состоящая из одного n-местного предикатного символа.

Предложение 2. *Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_0 существует структура $\mathcal{A}_0$ сигнатуры σ_1 такая, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации ν структуры $\mathcal{A}$, вычислимой нумерации μ_ν структуры $\mathcal{A}_0$, при этом*

1) *нумерации ν_{μ_0} не $\mathbf{d}$-автоэквивалентна ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда нумерации μ_0 и μ_1 не $\mathbf{d}$-автоэквивалентны.*

2) *для любой конструктивизации μ структуры $\mathcal{A}_0$ существует конструктивизация ν структуры $\mathcal{A}$ такая, что μ и μ_ν являются $\mathbf{d}$-автоэквивалентны.*

3) *если $\mathcal{A}$ не имеет формально Σ^0_α-семейство Скотта, то $\mathcal{A}_0$ не имеет формально Σ^0_α-семейство Скотта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = |\,\mathcal{A}\,|$ и N — множество натуральных чисел. Определим основное множество структуры $\mathcal{A}_0$ как $A_0 \;=\; \{0\} \cup (A \setminus N) \cup \{n{+}1 \,:\, n \in\, M \cap N\}$.

Определим n-местный предикат P^n сигнатуры σ_1, где $n \;=\; \sum\limits_{l=0}^{k} n_l$. Предикат P^n истинен на элементах $x_1, \ldots, x_n$, если имеет место одно из следующих условий:

а) $\bigwedge\limits_{l=1}^{n} x_l \;=\; 0;$

б) существуют $i \,\le\, k,\; y_1, \ldots, y_{n_i},\; k_0 \;=\; \sum\limits_{l=0}^{i-1} n_l,\; k_1 \;=\; \sum\limits_{l=0}^{i} n_l$ такие, что

$$\bigwedge_{l=1}^{k_0}(x_l = 0) \wedge \bigwedge_{l=k_1+1}^{n}(x_l = 0) \wedge \bigwedge_{j=k_0+1}^{k_1}((x_j > 0 \,\to\, y_j = x_j - 1) \vee (x_j \,\in\, A \setminus N \to\, y_j = x_j))$$

и $\mathcal{A} \models\, P_i^{n_i}(y_1, \ldots, y_{n_i})$.

Ясно, если $\mathcal{A}$ имеет вычислимую нумерацию, то $\mathcal{A}_0$ также имеет вычислимую нумерацию.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — две структуры сигнатуры σ_0 и $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — множество изоморфизмов из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. По каждому изоморфизму φ из $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ определим изоморфизм φ^* из множества $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$, где $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ структуры, построенные по $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно. Пусть дан $\varphi \,\in\, Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, тогда $\varphi^* \,\in\, Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ имеет вид

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \varphi(x-1), & \text{если } x > 0,\ \varphi(x-1) \in A \setminus N; \\ \varphi(x-1)+1, & \text{если } x > 0,\ \varphi(x-1) \in N; \\ \varphi(x)+1, & \text{если } x \in A \setminus N,\ \varphi(x) \in N; \\ \varphi(x), & \text{если } x \in A \setminus N,\ \varphi(x) \in A \setminus N. \end{cases} \quad (2)$$

Если $\varphi(x)$ является $\mathbf{d}$-изоморфизмом между вычислимыми структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, тогда изоморфизм $\varphi^*(x)$ между вычислимыми структурами $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B}_0$ является $\mathbf{d}$-изоморфизмом.

Лемма 2. *Отображение из множества $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ является отображением «на».*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для каждого $\varphi * (x)$ из $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ найдется отображение $\varphi(x)$ из $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Случай а) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_0$) не пересекаются с множеством N. Тогда для любого $\varphi * (x)$ из $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ существует $\varphi(x)$ из $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ такой, что $\varphi^* \restriction A = \varphi$.

Случай б) $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}_0$) пересекаются с множеством N. Определим отображение согласно областям:

если $\varphi^*(x) \in N,\ \varphi^*(x) \neq 0,\ x > 0$, тогда положим $\varphi(x-1) = \varphi^*(x) - 1$;
если $\varphi^*(x) \in N,\ x \in A_0 \setminus N$, тогда положим $\varphi(x) = \varphi^*(x) - 1$;
если $\varphi^*(x) \in A_0 \setminus N,\ x \in N$, тогда положим $\varphi(x-1) = \varphi^*(x)$.
если $\varphi^*(x) \in N,\ x \in A_0 \setminus N$, тогда положим $\varphi(x) = \varphi^*(x)$.

Случай в) $A \cap N$ непусто, а $B \cap N$ пусто. Определим отображение согласно областям:
если $x > 0$, тогда положим $\varphi(x-1) = \varphi^*(x)$;
если $x \in A_0 \setminus N$, тогда положим $\varphi(x) = \varphi^*(x)$.
Случай г) $A \cap N$ пусто, а $B \cap N$ непусто. Определим отображение согласно областям:
если $\varphi^*(x) \in N$, тогда положим $\varphi(x) = \varphi^*(x) - 1$;
если $\varphi^*(x) \in B_0 \setminus N$, тогда положим $\varphi(x) = \varphi^*(x)$;
Лемма доказана.

Зафиксируем вычислимую структуру $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_0. Через $Iz_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ обозначим множество $\mathbf{d}$-изоморфизмов из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Лемма 3. *Для любой вычислимой структуры $\mathcal{A}_0'$ сигнатуры σ_1, $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{A}_0$, найдется вычислимая структура $\mathcal{B}$ сигнатуры σ_0 такая, что вычислимая структура $\mathcal{B}_0$, соответствующая $\mathcal{B}$, есть структура сигнатуры σ_1 и является $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{A}_0'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_0'$ — вычислимая структуры сигнатуры σ_1. Рассмотрим вычислимое одно-однозначное отображение «на» $f : N \to A_0'$. Так как множество A_0' — вычислимое, то такое отображение существует. В качестве основного множества структуры $\mathcal{B}$ возьмем множество N. Определим предикаты $P_i^{n_i}$ из сигнатуры σ_0 на N. Пусть $m_1, \ldots, m_{n_i} \in N, k_0 = \sum\limits_{l=0}^{i-1} n_l,\ k_1 = \sum\limits_{l=0}^{i} n_l,\ l_1$. Тогда

$P_i^{n_i}(m_1,\ldots,m_{n_i}) \;\Leftrightarrow\; P^n(0,\ldots,0,y_{k_1+1},\ldots,y_{k_1+n_i},0,\ldots,0)$, где $y_{k_1+i} = f(m_i)+1$, если $f(m_i) \in A'_0 \cap N$, и $y_{k_1+i} = f(m_i)$ в противном случае. Таким образом, $\mathcal{B}$ есть вычислимая структура сигнатуры σ_0.

Пусть $\varphi(x)$ $\mathbf{d}$-изоморфизм из $Iz(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{B}_\prime$ — вычислимая структура сигнатуры σ_1, соответствующий структуре $\mathcal{B}$. Тогда изоморфизм φ^* из $\mathcal{A}_\prime$ на $\mathcal{B}_\prime$, соответствующий изоморфизму φ, будет $\mathbf{d}$-изоморфизмом. Лемма доказана.

По лемме 1 существует взаимно однозначное соответствие между изоморфизмами из $Iz(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $Iz(\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0)$. По конструкции каждому $\mathbf{d}$-вычислимому изоморфизму φ соответствует $\mathbf{d}$-эквивалентный $\mathbf{d}$-изоморфизм φ^* и обратно.

Относительно свойств семейства Скотта из третьего условия предложения, то справедливость утверждения следует из определимости основных предикатов и их отрицаний сигнатуры σ' через $\exists$-формулы сигнатуры σ. Предложение доказано.

§ 2. Кодирование структуры с одним n-местным предикатом в структуры с бинарным предикатом

Пусть $\sigma_1 = \langle P^n\rangle$, где $n>2$ и $\sigma_2 \rightleftharpoons \langle F^2\rangle$ сигнатуры, состоящие из n-местного и двухместного предикатов соответственно.

Предложение 3. *Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_1 существует структура $\mathcal{A}_0$ сигнатуры σ_2 такая, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации ν структуры $\mathcal{A}$, вычислимой нумерации μ_ν структуры $\mathcal{A}_0$, при этом*

1) *нумерации ν_{μ_0} не $\mathbf{d}$-автоэквивалентна ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда нумерации μ_0 и μ_1 не $\mathbf{d}$-автоэквивалентны.*

2) *для любой конструктивизации μ структуры $\mathcal{A}_0$ существует конструктивизация ν структуры $\mathcal{A}$ такая, что μ и μ_ν являются $\mathbf{d}$ автоэквивалентны.*

3) *если $\mathcal{A}$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта, то $\mathcal{A}_0$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A} = \langle A,\, P^n\rangle$ структура сигнатуры σ_1, где $n>2$.

Если P^n истинен или ложен на всех наборах из A, тогда полагаем для $\mathcal{A}_0 = \langle F^2\rangle$ отношение F^2 есть равенство. Полагаем, что $P^n(\mathcal{A}) \neq A$.

Пусть c^{n+1}, $c_{n+1,\,i}$, где $1\le i\le 2$, — вычислимые нумерующие функции.

Пусть $A \subsetneqq \omega$. Рассмотрим множества $I=\{0,\ldots,n-1\}$ и $A' = I\times A^n \cup A$.

Определим основное множество структуры $\mathcal{A}_0$ следующим образом:

$A_0 \rightleftharpoons A' \cup \{a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7,c_8\}$, и все добавленные элементы различны. Положим $a_i = \langle n+i,\ldots,n+i\rangle$, $b_i = \langle n+3+i,\ldots,n+3+i\rangle$, $c_j = \langle n+6+ +j,\ldots,n+6+j\rangle$, где все кортежи длины $n+1$ и $0\le i\le 2$ и $0\le j\le 15$.

Определим предикат F^2 на A_0 следующим образом: для $x,y\in A_0$ имеет $F(x,y)$ в следующих случаях:

а) $F(a_0,c_0),F(a_0,c_1),F(c_0,b_0),F(c_1,b_0)$;

б)$F(a_1,c_2),F(a_1,c_3),F(a_1,c_4),F(c_2,b_1),F(c_3,b_1),F(c_4,b_1)$;

в)$F(a_2,c_5),F(a_2,c_6),F(a_2,c_7),F(a_2,c_8),F(c_5,b_2),F(c_6,b_2),F(c_7,b_2),\ F(c_8,b_2)$;

г) для $y \in I \times A^n$, где $y = \langle 0, y_1, \ldots, y_n\rangle$ отношение $F(a_0, y)$ имеет место на A_0, если $\mathcal{A} \vDash P(y_1, \ldots, y_n)$;

д) для $y \in I \times A^n$, где $y = \langle 0, y_1, \ldots, y_n\rangle$ отношение $F(a_1, y)$ имеет место на A_0, если $\mathcal{A} \nvDash \neg P(y_1, \ldots, y_n)$;

е) для $x \in A$, $y \in I \times A^n$, где $y = \langle i, x_1, \ldots, x_n\rangle$ отношение $F(x, y)$ имеет место на A_0, если $x = x_i$;

ж) для $x, y \in I \times A^n$, где $x = \langle i, x_1, \ldots, x_n\rangle$ и $y = \langle j, x_1, \ldots, x_n\rangle$ отношение $F(x, y)$ имеет место на A_0, если $j = i + 1$;

з) для $x = a_2$ и $y \in A$ имеет место $F(x, y)$.

Если $A \subsetneqq \omega$, тогда в качестве основного множества структуры $\mathcal{A}$, рассмотрим множество номеров $B_0 = \{2n : n \in A\} \cup \{2c^{n+1}(i, x_1, \ldots, x_n) + 1 : i < n,\, x_1, \ldots, x_n \in B\} \cup \cup \{ 2c^{n+1}(j, j, \ldots, j) + 1 : n \leq j \leq n + 15 \}$.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — две структуры сигнатуры σ_1 и $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — множество изоморфизмов из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$. По каждому изоморфизму φ из $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ определим изоморфизм φ^* из множества $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$, где $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ структуры, построенные по $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ соответственно. Пусть дан $\varphi \in Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, тогда $\varphi^* \in Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ имеет вид

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x \div 2), \text{ если } x \text{ — четное число;} \\ \langle i, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\rangle, \text{ если } i < n; \\ x, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, если отображение φ является $\mathbf{d}$-изоморфизмом, то отображение φ^* также является $\mathbf{d}$-изоморфизмом.

Лемма 4. *Отображение из множества $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ является отображением «на».*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для каждого $\varphi * (x)$ из $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$ найдется отображение $\varphi(x)$ из $Iz(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пусть $\varphi * (x)$ из $Iz(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0)$. Заметим, что элементы a_0, a_1, a_2 определимы $\exists$-формулами, причем эти элементы являются единственными, которые удовлетворяют этим формулам. Определим формульное подмножество $A = \{x : F(a_2, x)\}$. Тогда отображение $\varphi* \upharpoonright A$ индуцирует изоморфизм φ между ($\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$). Лемма доказана.

Зафиксируем вычислимую структуру $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_1. Через $Iz_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ обозначим множество $\mathbf{d}$-изоморфизмов из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Лемма 5. *Для любой вычислимой структуры $\mathcal{A}'_0$ сигнатуры σ_2 $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{A}_0$ найдется вычислимая структура $\mathcal{B}$ сигнатуры σ_1 такая, что вычислимая структура $\mathcal{B}_0$, соответствующая $\mathcal{B}$, есть структура сигнатуры σ_2 и является $\mathbf{d}$-изоморфной вычислимой структуре $\mathcal{A}'_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}'_0$ — вычислимая структуры сигнатуры σ_2. Элементы из $\{a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0\ , c_1, c_2, c_3, c_4,\, c_5, c_6, c_7, c_8\}$ являются формульными в $\mathcal{A}_0$, тогда в структуре $\mathcal{A}'_0$ найдутся соответствующие элементы $a'_0, a'_1, a'_2, b'_0,\, b'_1, b'_2, c'_0,\, c'_1, c'_2, c'_3,\, c'_4, c'_5,$ $c'_6,\, c'_7, c'_8$. Пусть B множество $\{x : F(a_2, x)\}$.

Определим предикат P^n на B.

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in P^n \Leftrightarrow \mathcal{A}'_0 \models \exists y_1 \ldots \exists y_n \,(\bigwedge_{i=1}^{n-1} F(y_i, y_{i+1}) \wedge \bigwedge_{1\le i\le j\le n} F(x_i,\, y_j)) \wedge F(a'_0, y_1)).$$

Аналогично,

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \notin P^n \Leftrightarrow \mathcal{A}'_0 \models \exists y_1 \ldots \exists y_n \,(\bigwedge_{i=1}^{n-1} F(y_i, y_{i+1}) \wedge \bigwedge_{1\le i\le j\le n})\, F(x_i,\, y_j)) \wedge F(a'_1, y_1)).$$

Поэтому структура $\mathcal{B} = \langle\, B,\, P^n\,\rangle$ является вычислимой и структуры $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{B}_0$ являются $\mathbf{d}$-изоморфными. Лемма доказана.

Докажем последнее утверждение предложения. Заметим, что все элементы из $A_0 = = I \times A^n \cup \{a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8\}$ определимы над элементами из A $\exists$-формулами посредством вычислимого семейства $\exists$-формул. Таким образом, мы можем строить формально Σ^0_α-семейство Скотта для $\mathcal{A}_0$, исходя из формально Σ^0_α-семейства Скотта для $\mathcal{A}$. Если мы имеем формально Σ^0_α-семейство Скотта для $\mathcal{A}_0$. Тогда структура $\mathcal{A}_0$ является Δ^0_α-определимой в структуре $\mathcal{A}$ с основным множеством

$$A \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} A^{n+i}/\Theta_i \cup \bigcup_{i=1}^{15} A^{2n+1+i}/\Delta_i,$$

где $(\langle x_1, \ldots, x_{n+i}\rangle, \langle y_1, \ldots, y_{n+i}\rangle) \in \Theta_i$, если $x_j = y_j$ для $1 \le j \le n$, и $(\langle x_1, \ldots, x_{2n+1+i}\rangle, \langle y_1, \ldots, y_{2n+1+i}\rangle) \in \Delta_i$ для всех $\langle x_1, \ldots, x_{2n+1+i}\rangle, \langle y_1, \ldots, y_{2n+1+i}\rangle \in A^{2n+1+i}$.

Таким образом, если структура $\mathcal{A}_0$ Δ^0_α-определима в структуре $\mathcal{A}$, то мы можем определить формально Σ^0_α-семейство Скотта для $\mathcal{A}$. Предложение доказано.

§ 3. Кодирование счетного ориентированного графа в симметрический, иррефлексивный граф

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный счетный бесконечный ориентированный граф сигнатуры $\sigma_2 = \langle R^2\rangle$. Построим симметрический и иррефлексивный граф $\langle \mathcal{A}_0,\, F^2\rangle$ специального вида:

(i) для любых неравных вершин x, y существует не более одной общей вершины;

(ii) для любых связных вершин x, y не существует вершины z такой, что $F(x,\, z)$ и $F(y,\, z)$;

(iii) для любой вершины x существуют неравные y, z такие, что $F(x, y)$, $F(x, z)$.

Пусть дана сигнатура симметрического и иррефлексивного графа $\sigma_3 = \langle F^2\rangle$.

Предложение 4. *Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ сигнатуры σ_2 существует структура $\mathcal{A}_0$ сигнатуры σ_3 такая, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации ν структуры $\mathcal{A}$ вычислимой нумерации μ_ν структуры $\mathcal{A}_0$, при этом:*

1) нумерации ν_{μ_0} не $\mathbf{d}$-автоэквивалентна ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда нумерации μ_0 и μ_1 не $\mathbf{d}$-автоэквивалентны;

2) для любой конструктивизации μ структуры $\mathcal{A}_0$ существует конструктивизация ν структуры $\mathcal{A}$ такие, что μ и μ_ν являются $\mathbf{d}$-автоэквивалентны;

3) если $\mathcal{A}$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта, то $\mathcal{A}_0$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\mathcal{A}| = \omega$ и R^2 есть $\mathbf{d}$-вычислимое отношение на ω^2. По структуре $\mathcal{A}$ и R строим счетный симметрический иррефлексивный граф $\mathcal{A}\prime \rightleftharpoons (A_0, F)$ следующим образом

1. $A_0 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} \cup \{m_i, c_i, d_i, k_i, h_i, e_i \,:\, i, \in \omega\}$.

2. Для любых x, y, полагаем $F(x, y) \Longrightarrow F(y, x)$. Отношение $F(x, y)$ выполняется в следующих случаях:

а) $F(a_i, a_{i+1})$ для $0 \le i \le 5$; и $F(a_0, a_6)$; $F(b_i, a_{i+1})$ для $0 \le i \le 6$; и $F(b_0, b_7)$, для всех $i, j \in \omega$;

б) $F(m_i, a_0)$,$F(m_i, c_i)$, $F(e_i, b_0)$, $F(c_i, d_i)$, $F(d_i, k_i)$,$F(k_i, h_i)$, $F(h_i, e_i)$;

в) Если $R(i, j)$, тогда $F'(c_i,\, c_j)$, где $F'(c_i,\, c_j)$ есть формула $F(c_i, e_j) \wedge F(e_j,\, h_j) \wedge \wedge F(h_j,\, k_j) \wedge F(k_j,\, d_j) \wedge F(d_j,\, c_j)$.

Сразу отметим, что построенный нами граф удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Пусть $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ как в определении структуры A_0. Заметим, что:

1) Существует единственный цикл длины 7. Искомое множество есть $\{a_0$,a_1, a_2, a_3,a_4, $a_5, a_6\}$; Существует единственный цикл длины 8. Искомое множество есть $\{b_0, b_1, b_2, b_3$, $b_4, b_5, b_6, b_7\}$, и мы фиксируем элементы циклов длин 6 и 8 соответственно. Элементы циклов определяются $deg(A_0)$-эффективно.

2) Только элемент a_0 лежит в цикле длины 7 и связан с элементом вне цикла, то есть удовлетворяет некоторой $\exists$-формуле. Только элемент b_0 лежит в цикле длины 8 и связан с элементом вне цикла, т. е. удовлетворяет некоторой $\exists$-формуле. Элементы a_0 и b_0 в графе $\mathcal{A}_0$ определяются $deg(A_0)$-эффективно.

3) Не существует вершины, которая была бы связана только с одной вершиной.

Пусть $C(x) = \{x \,:\, A_0 \models \exists z(F(a_0, z) \wedge F(z, x) \wedge z \ne a_1 \wedge z \ne a_8)\}$ и $E(x) = \{x \,:\, A_0 \models \models F(b_0, x) \wedge x \ne b_1 \wedge x \ne a_7\}$. Через $M(x), D(x), K(x), H(x)$ обозначим множества, определенные $\exists$-формулами над $a_0, b_0, C(x), E(x)$. Ясно, что все определенные множества и элементы являются $deg(\mathcal{A}_0)$-вычислимыми и инвариантными.

Обозначим через $\bar{F}(x, y)$ формулу $F'(x, y)$, которая была определена на множестве $C(= C(x))$. Определим структуру $\mathcal{C}_A = \langle C(\mathcal{A}_0),\, \bar{F}^2\rangle$.

Ясно, что верны следующие утверждения.

1. Структура $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$ изоморфна структуре $\mathcal{C}_A = \langle C(\mathcal{A}_0), \bar{F}\rangle$.

2. Отношение $R(i, j)$ на $\mathcal{A}$ определима через отношение $F(x, y)$ следующим образом: $\mathcal{A} \models R(i, j)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_0 \models F(c_i, e_j)$, и $\mathcal{A}_0 \models F(c_i, e_j)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{C} \models \bar{F}(c_i, c_j)$, где отношение $\bar{F}$ определено через коньюнкции базисного отношения F^2 над элементами структуры $\mathcal{A}_0$.

Таким образом, отношение R^2 является $\mathbf{d}$-вычислимым тогда и только тогда, когда отношение $\bar{F}^2$ является $\mathbf{d}$-вычислимым.

3. Если $\mathcal{A}$ — $\mathbf{d}$-вычислимая структура, то $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{C}_A$ являются $\mathbf{d}$-вычислимыми структурами.

Лемма 6. *Семейство $\mathcal{A}$ и граф $\mathcal{A}_0$ имеют одну и ту же $\mathbf{d}$-размерность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_0 и ν_1 — $\mathbf{d}$-вычислимые нумерации структуры $\mathcal{A}$ такие, что $R(\nu_0(i),\, \nu_0(j)) \;\Leftrightarrow\; R(\nu_1(i),\, \nu_1(j))$, тогда существует перестановка p множества ω, удовлетворяющая условию $\nu_1 = p \cdot \nu_0$.

Пусть f — отображение множества C на себя такое, что $f(c_i) = c_{p(i)}$, тогда f продолжается до автоморфизма φ структуры A_0 и имеет место условие $F_1(c_i,\, e_j) \Leftrightarrow F_0(c_{p(i),\, e_j})$.

Обратно. Пусть A'_0 — некоторое $\mathbf{d}$-вычислимое представление структуры A_0 и φ соответствующий $\mathbf{d}$-автоморфизм. Тогда множество $C(A'_0)$ является $\mathbf{d}$-вычислимым формульным множеством. Пусть $g : C(A'_0) \to \omega$ — однооднозначное $\mathbf{d}$-вычислимое отображение. В качестве основного множества структуры $\mathcal{B}$ выберем ω. Определим предикат $R^{\mathcal{B}}$ следующим образом:

$$R^{\mathcal{B}}(i,j) \Leftrightarrow \mathcal{A}'_0 \models \bar{F}(c_{g(i)}, c_{g(j)}).$$

Тогда автоморфизм между $\mathcal{A}'_0$ и $\mathcal{B}_0$ индуцируется отображением $c_i \mapsto c_{g(i)}$.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{A}_0$ является $\mathbf{d}$-вычислимая структура. Если структура $\mathcal{A}_0$ имеет формально Σ^0_α семейство Скотта, тогда структура $\mathcal{A}$ также имеет формально Σ^0_α семейство Скотта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A}$ $\mathbf{d}$-вычислимая структура, тогда $\mathcal{A}_0$ $\mathbf{d}$-вычислимая структура.

Пусть $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, для других $\mathbf{d}$ рассуждения аналогичны.

Заметим, что все элементы из A_0 определимы над элементами из A $\exists$-формулами посредством вычислимого семейства $\exists$-формул с константами из $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$. Таким образом, мы можем строить формально Σ^0_α-семейство Скотта для $\mathcal{A}_0$ исходя из формально Σ^0_α-семейства Скотта для $\mathcal{A}$.

Для доказательства утверждения леммы достаточно показать Δ^0_1-определимость одной структуры в другой и обратно.

Покажем, что структура $\mathcal{A}$ Δ^0_1-определима в структуре $\mathcal{A}_0$. Формула $C(x)$ выделяет в структуре $\mathcal{A}_0$ вычислимое множество C_A. Тогда структура $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$ изоморфна структуре $\mathcal{C}_A = \langle C(\mathcal{A}_0), \bar{F}\rangle$, где отношение $\bar{F}$ определено через коньюнкции базисного отношения F^2 над элементами структуры $\mathcal{A}_0$. Следовательно, отношение R^2 является вычислимым, тогда и только тогда, когда отношение $\bar{F}^2$ является вычислимым. Таким образом, структура $\mathcal{A}$ Δ^0_1-определима в структуре $\mathcal{A}_0$.

Покажем, что структура $\mathcal{A}_0$ Δ^0_1-определима в структуре $\mathcal{A}$. Рассмотрим множество

$$B = A \cup \bigcup_{1\le j\le 7} (A^j/\Theta_j) \cup \bigcup_{1\le i\le 15} (A^{7+i}/\Delta_i),$$

что для всех $\langle x_1,\ldots,x_j\rangle,\ \langle y_1,\ldots,y_j\rangle \in A^j$ $(\langle x_1,\ldots,x_j\rangle,\ \langle y_1,\ldots,y_j\rangle) \in \Theta_j$, если $\langle x_1,\ldots,x_j\rangle \neq \langle y_1,\ldots,y_j\rangle$ и $(\langle x_0,\ldots,x_{7+i}\rangle, \langle y_0,\ldots,y_{7+i}\rangle) \in \Delta_i$, если $\langle x_0,\ldots,x_{7+i}\rangle \neq$ $\neq \langle y_0,\ldots,y_{7+i}\rangle$. Тогда структура $\mathcal{B}$ с основным множеством B является структурой сигнатуры структуры $\mathcal{A}_0$. На самом деле, выделенные константы из $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ определяются элементами из одноэлементных (A^{7+i}/Δ_i) для $1 \le i \le 15$. Обозначим через j элемент одноэлементного множества $(A^j/\Theta_j$ для $1 \le j \le 7$, тогда отношение F определим следующим способом:

Для всех $x, y \in A$, если $R(x,y)$, тогда $F(\langle x, j\rangle, \langle x, j{+}1\rangle)$ для $1 \le j \le 6$ и $F(\langle x, 2\rangle, \langle y, 7\rangle)$. Таким образом, структура $\mathcal{A}_0$ Δ^0_1-определима в структуре $\mathcal{A}$. Тогда мы можем из формально Σ^0_α-семейства Скотта для $\mathcal{A}_0$ определить формально Σ^0_α-семейство Скотта для $\mathcal{A}$. Лемма и предложение доказаны.

§ 4. Основные результаты

Теорема 4 (С. С. Гончаров, Д. А. Тусупов). *Для любой счетной структуры $\mathcal{A}$ счетной предикатной сигнатуры, где местность предикатов ограничена в совокупности, существует ориентированный (симметрический, иррефлексивный) граф $\mathcal{A}_0$ такой, что имеется алгоритм построения по любой вычислимой нумерации ν структуры $\mathcal{A}$ вычислимой нумерации μ_ν структуры $\mathcal{A}_0$, при этом:*

1) *нумерации ν_{μ_0} не $\mathbf{d}$-автоэквивалентна ν_{μ_1} тогда и только тогда, когда нумерации μ_0 и μ_1 не $\mathbf{d}$-автоэквивалентны;*

2) *для любой конструктивизации μ структуры $\mathcal{C}$ существует конструктивизация ν структуры $\mathcal{A}$ такие, что μ и μ_ν являются $\mathbf{d}$-автоэквивалентны,*

3) *если $\mathcal{A}$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта, то $\mathcal{A}_0$ не имеет формально Σ^0_α-семейства Скотта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательное применение Предложений 1,2 и 3 (затем 4) доказывает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Ординал α называется ординалом-последователем, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β.

С. С. Гончаров, В. С. Харизанова, Дж. Найт, С. Мак-Кой, Р. Миллер, Р. Соломон [1] для каждого ординала-последователя построили Δ^0_α-граф со специальными свойствами, затем по данному графу построили вычислимую структуру со счетной предикатной сигнатурой, где местность предикатов ограничена в совокупности.

Применение следствия позволит получить основной результат, исходя из следствий основного результата из [1].

Основными утверждениями являются:

Обобщение результата С.С. Гончарова о структурах которые являются вычислимо категоричными, но не относительно вычислимо категоричными.

Теорема 5 (С. С. Гончаров, Д. А. Тусупов). *Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует ориентированный (симметрический, иррефлексивный) граф, который является Δ^0_α-категоричным, но не относительно Δ^0_α-категоричным и без формально Σ^0_α-семейства Скотта.*

Обобщение результата Манаса об отношениях, которые являются внутренне вычислимо перечислимыми, но не относительно внутренне вычислимо перечислимыми.

Теорема 6 (С. С. Гончаров, Д. А. Тусупов). *Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует вычислимый ориентированный (симметрический, иррефлексивный) граф с отношением, которое является внутренне Σ^0_α, но не относительно внутренним Σ^0_α-отношением.*

Обобщение результата С. С. Гончарова о структурах конечной вычислимой размерности.

Теорема 7 (С. С. Гончаров, Д. А. Тусупов). *Для каждого вычислимого ординала-последователя α и каждого конечного n существует ориентированный (симметрический, иррефлексивный) граф Δ^0_α-размерности n.*

Обобщение результатов Slamana и Wehnera о структурах, имеющих представления во всех степенях, за исключением нулевой.

Теорема 8 (С. С. Гончаров, Д. А. Тусупов). *Для каждого вычислимого ординала-последователя α существует ориентированный (симметрический, иррефлексивный) граф, имеющий представления только в степенях таких множеств X, что имеет место $\Delta^0_\alpha(X) \neq \Delta^0_\alpha$. В частности, для каждого конечного n существует структура, имеющая представления только в* не-*n-низких степенях.*

Список литературы

1. *Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F. et al.* Enumerations in computable structure theory // Annals of Pure and Applied Logic. 2005. Vol. 136. No. 3. P. 219-246.
2. *Гончаров С. С.* Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.
3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
4. *Ash C. J., Knight J.F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier, 2000.
5. *Goncharov S.S.* The quantity of non-autoequivalent constructivizations // Algebra and Logic. 1977. Vol. 16. P. 257–262.
6. *Ash C. J., Knight J.F.* Pairs of computable structures // Annals of Pure and Applied Logic. 1990. Vol. 46. P. 211–234.
7. *Ash C. J., Knight J.F., Mannasse M. et al.* Generic copies of countable structures // Annals of Pure and Applied Logic. 1989. Vol. 42. P. 195–205.
8. *Ash C.J., Nerode A.* Intrinsically computable relations // Aspects of Effective Algebra / Ed. by J.N. Crossley. Upside Down A Book Co. Steel's Creek, Australia, P. 26–41.
9. *Chisholm J.* Effective model theory versus computable model theory // J. Symb. Logic. 1990. Vol. 55. P. 1168–1191.
10. *Selivanov V.L.* Enumerations of families of general computable functions // Algebra and Logic. 1976. Vol. 15. P. 205–226.
11. *Slaman T.* Relative to any non-computable set // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126. P. 2117–2122.
12. *Wehner S.* Enumerations, countable structures and Turing degrees // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126. P. 2131–2139.
13. *Mal'tsev A. I.* Algorithms and Recursive Functions. Wolters-Noordhoff. Groningen, 1970.

Материал поступил в редколлегию 21.04.2005

Адрес автора

ТУСУПОВ Джамалбек Алиаскарович

РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск

ул. Пирогова 16, к. 416

тел.: (8383) 339–78–48

e-mail: tusupov@gorodok.net