УДК 510.67

Б. С. Байжанов

КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ*

Пусть $M \prec N$. Говорят, что пара моделей (M, N) есть *консервативная пара*, или N есть *консервативное расширение* M, если для любого кортежа элементов $\bar{\alpha}$ из N, $\mathrm{tp}(\bar{\alpha}|M)$ определим. Мы будем говорить, что элементарное расширение N модели M есть *D-ω-насыщено для M*, если любой определимый $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ $(\bar{\alpha} \in N)$ реализуется в N; и N есть *CD-ω-насыщено для M*, если любой не-изолированный 1-тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ $(\bar{\alpha} \in N)$, определяемый формульным подмножеством ϕ-типа, реализуется в N.

Мы докажем, что любая модель, любой слабо о-минимальной теории (за исключением о-минимальных обогащений моделей теории $Th(\langle \omega + \omega^*; =, <\rangle))$, имеет консервативное расширение. Центральным результатом статьи является критерий существования D-ω-насыщенного консервативного расширения модели слабо о-минимальной теории (Теорема 2). Из доказательства этой теоремы следует, что для любой модели слабо о-минимальной теории существует CD-ω-насыщенное консервативное расширение (Следствие 5). Существование консервативного расширения и CD-ω-насыщенного консервативного расширения для о-минимальных моделей было доказано, соответственно в статьях [23, 33].

Введение

Пусть $M \prec N$. Говорят, что пара моделей (M, N) есть *консервативная пара*, или N есть *консервативное расширение* M, если для любого кортежа элементов $\bar{\alpha}$ из N, $\mathrm{tp}(\bar{\alpha}|M)$ определим [24]. Мы будем говорить, что элементарное расширение N модели M является *D-ω-насыщенным для M*, если любой определимый тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in N$, реализуется в N; и N является *CD-ω-насыщенным для M*, если любой неизолированный тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} \in N$, определяемый формульным подмножеством ϕ-типа (Определение 4), реализуется в N.

Мы докажем, что любая модель любой слабо о-минимальной теории (за исключением о-минимальных обогащений моделей теории $Th(\langle \omega + \omega^*; =, <\rangle))$, имеет консервативное расширение (Следствие 3). Центральным результатом статьи является критерий существования D-ω-насыщенного консервативного расширения модели слабо о-минимальной теории (Теорема 2). Из доказательства этой теоремы следует, что для любой модели любой слабо о-минимальной теории существует CD-ω-насыщенное консервативное расширение (Следствие 5). Существование консервативного расширения и CD-ω-насыщенного консервативного расширения для о-минимальных моделей было доказано, соответственно, в [23, 33].

*Работа частично финансировалась Американским Фондом Гражданских Исследований (CRDF, AWARD KM2-2246).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 3. С. 13–44

Всюду в статье M есть модель языка L, который содержит символ отношения линейного порядка, N — насыщенное элементарное расширение M. Запись вида $\phi \in L$ означает, что ϕ есть L-формула. Подмножество $X \subseteq M^l$ назовем *B-формульным*, если $X = \phi(M^l, \bar{b}) := \{\bar{a} \in M^l / M \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$ для некоторой $L(B){-}l$-формулы $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ с $l(\bar{x}) = l$. Для $A \subseteq M$ $p, q, r \in S(A)$ есть полные типы над A. Часто мы будем записывать формулы первого порядка через отношения формульных множеств. Например:

$$x < \phi(N) \equiv \forall y(\phi(y) \to x < y),$$
$$x \in (\beta_1, \beta_2) \equiv \beta_1 < x < \beta_2,$$
$$\phi(N) \cap \theta(N) \neq \emptyset \equiv N \models \exists x(\phi(x) \wedge \theta(x)),$$
$$\phi(N) < \theta(N)^+ \equiv N \models \forall t(\forall y(\theta(y) \to y < t) \to \forall x(\phi(x) \to x < t)).$$

Определение 1. Пусть $A \subseteq M \models T$, $p \in S(A)$. Говорят, что тип p является *$\phi(\bar{x}, \bar{v})$-определимым* для $\phi(\bar{x}, \bar{v}) \in L(\bar{x})$, если существует $L(A)$-формула $\Psi_\phi(\bar{v})$ такая, что для всех $\bar{a} \in A^{l(\bar{v})}$ верно: $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$ тогда и только тогда, когда $M \models \Psi_\phi(\bar{a})$. Формула $\Psi_\phi(\bar{v})$ называется $\phi(\bar{x}, \bar{v})$-определением типа p.

Говорят, тип p *определим*, если он $\phi(\bar{x}_n, \bar{v})$-определим для любой формулы $\phi(\bar{x}, \bar{v}) \in L(\bar{x}_n)$. Кортеж $\bar{\gamma} \in M$ *ht-определим над A*, если $tp\,(\bar{\gamma}|A)$ определим.

Определение 2. Пусть $q(\bar{x}) \in S(A), A \subset N$. Будем говорить, что тип q *строго определимый*, если для любой $L(A)$-формулы $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ существует $L(A)$-формула $\Theta_\phi(\bar{x}) \in q$ такая, что для любого $\bar{a} \in A^{l(\bar{y})}$ верно

$$N \models \exists \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{a})) \to \forall \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}, \bar{a})).$$

Из этих определений следует, что каждый изолированный тип строго определим, каждый строго определимый тип $q \in S(A)$ определим и $\phi(\bar{x}, \bar{y})$-определением $q(\bar{x})$ будет $L(A)$-формула $\Psi_\phi(\bar{y}) := \forall \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{x}, \bar{y}))$ или эквивалентно, $\Psi_\phi(\bar{y}) := \exists \bar{x}(\Theta_\phi(\bar{x}) \wedge \phi(\bar{x}, \bar{y}))$. Заметим, что согласно классификации типов, проведенной Шелахом, для строго определимого типа $p \in S(A)$, и для $B \subseteq A (B := \{\bar{b} | \phi \in L, \Psi_\phi \in L(\bar{b})\})$ имеем $(p, B) \in \mathbf{F}^{\mathbf{l}}_{\aleph_0}$ [32, Definition IV.2.2, p. 155].

Пусть $p, q \in S(A)$ для некоторого $A \subset N$. Говорят [32], *p слабо ортогонален q*, и обозначают $p \perp^w q$, если $p(\bar{x}) \cup q(\bar{y})$ есть полный тип. Будем говорить, *$\bar{\alpha}$ слабо ортогонален типу $q \in S(A)$*, если $tp(\bar{\alpha}|A) \perp^w q$, и обозначать $\bar{\alpha} \perp^w q$. Будем говорить, что формула $\phi(\bar{x}, \bar{b})$, $\bar{b} \in N$, *делит* $C \subset N^l$ (l — длина кортежа $\bar{x}$, C необязательно формульно), если $\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$, $\neg\phi(N^l, \bar{b}) \cap C \neq \emptyset$. Часто будем писать $\phi(N, \bar{b})$ вместо $\phi(N^l, \bar{b})$. Заметим, для любого $\bar{\alpha} \in N$, для любого $q \in S(A), A \subset N$ верно: $\bar{\alpha} \not\perp q \iff$ некоторая $L(A \cup \bar{\alpha})$-формула делит q. Будем говорить, что *$B \subset N$ слабо ортогонально типу* $q \in S(A)$, $B \perp^w q$, если для любого кортежа $\bar{\alpha} \in B$ имеет место $\bar{\alpha} \perp^w q$ [9]. Отметим, $p \perp^w q \iff q \perp^w p$ и, если $p \perp^w q$ и $\bar{\beta} \in q(N)$, $\bar{\alpha} \in p(N)$, то для $r := tp(\bar{\beta}|A \cup \bar{\alpha})$ имеем $q(N) = r(N)$. Здесь, $p(N) := \cap_{\phi \in p} \phi(N)$.

Полная теория T языка L такая, что любая ее модель M линейно упорядочена некоторой L-формулой, называется *слабо о-минимальной*, если любое M-формульное подмножество произвольной модели M есть объединение конечного числа выпуклых множеств [22], и называется *о-минимальной*, если любое M-формульное подмножество любой модели M есть конечное объединение одноэлементных множеств и интервалов [20, 28]. Таким образом, любая о-минимальная теория слабо о-минимальна.

Факт 1. Пусть T — о-минимальная теория, $A \subset N \models T$, N — $|A|^+$-насыщенная модель, $p, q \in S_1(A)$, $q \not\perp^w p$, $\alpha \in q(N)$. Тогда существует $\beta \in p(N) \cap acl(A, \alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (факта 1). Напомним, что в о-минимальной теории множество реализаций неалгебраического 1-типа в насыщенной модели есть выпуклое множество без концевых элементов, а множество реализаций любой формулы — конечное объединение интервалов и одноэлементных множеств. При этом концы этих интервалов и эти элементы принадлежат алгебраическому замыканию параметров этой формулы [28]. Тогда, так как $\alpha \not\perp^w q$ и, следовательно, некоторая $L(A \cup \{\alpha\})$-формула делит выпуклое множество $q(N)$, существует $\beta \in p(N) \cap alc(A, \alpha) \neq \emptyset$. $\square$

При изучении природы элементарных классов моделей важную роль играют свойства и понятия, связанные с «хорошими» элементарными расширениями моделей (множеств), такими как простые, специальные, (сильно) конструктивизирумые, насыщенные, консервативные [15–17, 23, 24, 26, 28, 29, 31, 32] и их модификациями и обобщениями — F-простые модели, красивые пары, пары моделей, псевдо-малые теории, аксиоматизируемые пары моделей [2, 8, 10–14, 27, 30, 32]. Часто теоремы существования таких расширений базируются на различных вариантах теорем реализаций и/или опусканий типов (ϕ-типов).

Чтобы построить консервативное расширение множества с заданными свойствами, необходимо ответить на следующий вопрос:

Проблема A(S). Пусть S — свойство определимых типов и для $A \subset N$, $q(x), p(y) \in S_1(A)$ — определимые типы, обладающие свойством S. Существует ли полный определимый 2-тип $r(x, y) \in S_2(A)$, такой что

$$q(x) \cup p(y) \subseteq r(x, y)?$$

Имеем два разных случая:

A1 $q(x) \cup p(y)$ не является полным типом, т. е. $p \not\perp^w q$;

A2 $q \perp^w p$.

Рассмотрим **A1** для о-минимальной теории.

Замечание 1. Пусть $q, p \in S_1(A)$ — два определимых 1-типа над множеством A в о-минимальной модели N, удовлетворяющие условию $q \not\perp^w p$. Тогда для любого $\alpha \in q(N)$ существует $\beta \in p(N)$ такой, что $tp\,(\beta\alpha|A)$ определим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (замечания 1). Пусть $\alpha \in q(N)$. По факту 1, существует $\beta \in acl(A \cup \{\alpha\}) \cup p(N)$. Тогда $tp\,(\beta|A \cup \{\alpha\})$ определим и, следовательно, $tp\,(\beta\alpha|A)$ определим. $\square$

Из свойств неортогональности 1-типов в слабо о-минимальной теории (факты 8 и 10) следует, что для любого A, для любых двух определимых $q, p \in S_1(A)$, $q \not\perp^w p$, для любого $\alpha \in q(N)$ существует элемент $\beta \in p(N)$ такой, что тип $tp\,(\alpha\beta|A)$ определим (см. условие **D8.2** в доказательстве теоремы 2).

Для случая **A2** имеем отрицательный ответ на **Проблему A(S)** даже в о-минимальном контексте, когда S есть свойство строгой определимости типов.

Пример 1. Существует о-минимальная теория T такая, что для $A \subset M \models T$, $p, q \in \in S_1(A)$ верно:

(i) $q \perp^w p$;

(ii) q, p строго определимые типы;

(iii) единственный 2-тип $p(x) \cup q(y) \in S_2(A)$ неопределим.

Объяснение примера 1. Пусть $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ — упорядоченная группа рациональных чисел. Известно, что элементарная теория $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ о-минимальна и допускает элиминацию кванторов [28]. Пусть

$$\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle \prec \langle \mathbb{R}; =, <, +, 0\rangle \prec \langle M; =, <, +, 0\rangle$$

такие, что $\mathbb{R}$ есть множество всех вещественных чисел и $\langle M; =, <, +, 0\rangle$ есть большая насыщенная модель. Пусть $\pi \in \mathbb{R}$ — неалгебраическое вещественное число. Пусть две бесконечные последовательности $\langle c_n\rangle_{n<\omega}$ и $\langle d_n\rangle_{n<\omega}$ такие, что они имеют один и тот же предел $\sqrt{2}$ и верно

$$[c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots < d_n < \ldots < d_2 < d_1]_{n<\omega},\ c_n, d_n \in \mathbb{Q}.$$

Обозначим $A := \{c_n \mid n < \omega,\ c_n \in \mathbb{Q}\} \cup \{d_n \mid n < \omega,\ d_n \in \mathbb{Q}\}$, $p := tp\,(\pi|A)$, $q := tp\,(\sqrt{2} + + \pi|A)$, $r := tp\,(\sqrt{2}|A)$. Так как r определяется двумя сходящими последовательностями, r не $(x < v)$-определим.

(i) Так как $\sqrt{2} + \pi$ и π алгебраически независимы над A, по факту 1, $q \perp^w p$.

(ii) Покажем, что q и p оба строго определимы. Так как теория $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ допускает элиминацию кванторов, достаточно рассмотреть бескванторные типы над A, т. е. типы содержащие только бескванторные формулы. Каждый бескванторный тип над A состоит из формул следующего вида:

1. $nx < u$;
2. $nx > u$;

где u есть терм над A, т. е. $u = \sum_i k_i e_i$ для $k_i \in Z$ и $e_i \in A$ (это не полный тип, но определяет полный тип над A).

Рассмотрим формулы вида $nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i$, где c есть терм, определимый над A.

Покажем, что π и $\sqrt{2} + \pi$ не являются предельными точками

$$A_{c,k_1,\ldots,k_m} = \{e \in \mathbb{Q} : \exists c_1, \ldots c_m \in A\,(e = c + \sum_{i=1}^{m} k_i c_i)\},$$

так как они не являются предельными точками A, и типы $tp\,(\pi|A)$, $tp\,(\sqrt{2} + \pi|A)$ слабо ортогональны любому типу $tp\,(a|A)$, когда $a \in \bar{A}$ (здесь $\bar{A}$ есть замыкание A в топологическом смысле).

Предположим, $\pi \in \bar{A}_{c,k_1,\ldots,k_m}$. Тогда существуют последовательности $\langle a^i_j\rangle_{j<\omega}$ для $i = 1, \ldots, m$ такие, что $\lim_{j\to\infty}(c + \sum_i k_i a^i_j) = \pi$.

Пусть $\lim_{j\to\infty} a^i_j = a^i \in \bar{A}$, тогда $\pi = c + \sum_i k_i a^i$, но это невозможно из-за выбора A потому, что $\bar{A} = A \cup \{\sqrt{2}\}$ и $A \subset \mathbb{Q}$.

Таким образом, так как $\mathbb{Q} \subset acl(A)$ и $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, для любых $m, n, k_1, \ldots, k_m < \omega$, для любого терма c, определимого над A, существует $\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \in tp\,(\pi|A)$ такая, что для любых $b_1, \ldots, b_m \in A$ верно

$$[nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i b_i \in p \Longleftrightarrow \mathbb{Q} \models \forall x(\Psi_{n,m,\bar{k},c}(x) \to nx < c + \sum_{i=1}^{m} k_i b_i)].$$

Это означает, что p строго определим. Эти же самые рассуждения показывают, что q строго определим.

(iii) Так как π и $\sqrt{2}$ алгебраически независимы над A, то $\pi \perp^w r$ и, следовательно, для $r_0 := tp(\gamma|A, \pi)$ имеем $r_0(M) = r(M)$. Тогда r_0 неопределим, так как он имеет те же самые сходящиеся последовательности $\langle c_n \rangle_{n<\omega}, \langle d_n \rangle_{n<\omega}$, которые обеспечивают неопределимость r. Так как $r_0 \not\perp^w q_0 := tp(\sqrt{2} + \pi|A, \pi)$, q_0 не $(x < \pi + v)$-определим. В противном случае, мы получили бы определимость r. $\square$

Таким образом, принимая во внимание замечание 1, слабо о-минимальный аналог замечания 1 и пример 1, мы будем ограничиваться, главным образом, рассмотрением определимости объединения двух слабо ортогональных 1-типов над объединением модели и ht-определимым конечным множеством.

Определение 3. Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для определимых 1-типов (AP для D-1-типов)*, если для пары моделей (M, N), $\forall\, \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M,\ M \prec N \models T$ верно:

> если 1-типы $q := tp\,(\beta\,|\,M \cup \bar{\alpha}),\ p := tp\,(\gamma\,|\,M \cup \bar{\alpha})$, $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определимы и $q \perp^w p$, то $tp\,(\beta\gamma\,|\,M \cup \bar{\alpha})$ определим или эквивалентно, типы $tp\,(\gamma\beta\bar{\alpha}|M)$, $tp\,(\beta|M \cup \bar{\alpha}\gamma)$, $tp\,(\gamma|M \cup \bar{\alpha}\beta)$ определимы.

Будем говорить, что теория T имеет *свойство совместного расширения для строго определимых 1-типов (AP для SD-1-типов)*, если для любых $M \prec N \models T$, $\forall\, \bar{\alpha}, \beta, \gamma \in N \setminus M$ таких, что $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим, верно:

> если 1-типы $q := tp\,(\beta\,|\,M \cup \bar{\alpha}), p := tp\,(\gamma\,|\,M \cup \bar{\alpha})$ иррациональные, строго определимые 1-типы и $q \perp^w p$, то $tp\,(\beta\gamma|M \cup \bar{\alpha})$ определим.

Определение 4. Будем говорить, что пара моделей (M, N) есть *NSD-ω-насыщенная пара*, если $\forall\, \bar{\alpha} \in N \setminus M, \forall\, q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ верно:

> если q определим и не строго определим (т. е. нестрого определим), то q реализуется в N.

Будем говорить, что неизолированный тип $q \in S(A), A \subset N$ есть CD-тип, если существуют $L(A)$-формулы $\Theta(\bar{y})$, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что частичный 1-тип

$$q_{\phi,\Theta} := \{\, \phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q \mid \bar{a} \in A, N \models \Theta(\bar{a}) \,\} \subseteq q_\phi^+ := \{\, \phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q \mid \bar{a} \in A \,\}$$

определяет q, т. е. для любой формулы $\Psi \in q$ существует $\phi(\bar{x}, \bar{a}) \in q_{\phi,\Theta}$ такая, что $N \models \forall\, \bar{x}(\phi(\bar{x}, \bar{a}) \to \Psi(x))$.

Скажем, что пара (M, N) есть *CD-ω-насыщенная пара*, если для любого $\bar{\alpha} \in N \setminus M$, любой CD-1-тип $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, q реализуется в N.

Заметим, что любой определимый 1-тип над моделью слабо о-минимальной теории является CD-1-типом [6, Fact 22], о-минимальный вариант этого утверждения есть в [24, Lemma 2.3]. Будем называть определимый тип, который не является строго определимым, *нестрого определимым.* Ясно, что любой CD-тип нестрого определим. Обратное неверно. Приведем примеры типов, различающие эти понятия. Пусть $\langle \mathbb{Q}; =, <, +, 0\rangle$ — о-минимальная модель примера 1, $\mathbb{Q} \prec N$, $\alpha, \beta \in N \setminus \mathbb{Q}$ такие, что $\mathbb{Q} < \alpha < \beta$, α и β принадлежат разным архимедовым классам. Рассмотрим типы $q_1 := tp\,(\alpha|\mathbb{Q}) = tp\,(\beta|\mathbb{Q})$, $q_2 := tp\,(\beta \mid \mathbb{Q} \cup \{\alpha\})$, $q_3 := tp\,(\alpha \mid \mathbb{Q} \cup \{\beta\})$. Все три 1-типа определимы. Тип q_1 — строго определим, тип q_2 — CD-1-тип, а 1-тип q_3 — нестрого определим и не CD-1-тип. Мы оставляем читателям проверку этого. Приведем пример CD-1-типа над множеством. Обозначим $A' := \{c_n \mid n < \omega\} \cup \{-d_n \mid n < \omega\}$, $r' := tp\,(\sqrt{2} \mid A')$, $\phi(x, y_1, y_2) := := y_1 < x < -y_2$. Тогда r' является ϕ-определимым и CD-1-типом, так как r'_ϕ определяет r'.

Замечание 2. Каждая D-ω-насыщенная (консервативная) пара является NSD-ω-насыщенной (консервативной) парой, и каждая NSD-ω-насыщенная (консервативная) пара является CD-ω-насыщенной (консервативной) парой.

Соглашение 1. В дальнейшем мы будем предполагать, что T есть произвольная слабо о-минимальная теория,такая что над любой ее моделью существует по крайней мере один определимый неизолированный 1-тип. По замечанию 5, любая слабо о-минимальная модель, которая не удовлетворяет этому условию, есть о-минимальное обогащение некоторой модели теории дискретного порядка без концевых элементов, т. е. $Th(\langle \omega + \omega^*; =, <\rangle)$.

В первой части § 2 даны определения и общие факты (без доказательства) из [5–7] по ортогональности и определимости 1-типов над множеством. Во второй части § 2 изучается связь этих понятий для 1-типов над объединением модели и ht-определимого конечного множества (Предложение 2).

Основным результатом нашей статьи является теорема 2, которая говорит о том, что вопрос существования D-ω-насыщенного консервативного расширения для модели слабо о-минимальной теории T эквивалентен тому, что T имеет AP для D-1-типов и, из-за следствия 2 тому, что T имеет AP для SD-1-типов. Данное построение консервативного расширения с использованием AP для D-1-типов позволяет выработать метод опускания всех неопределимых типов и некоторых определимых типов.

Параграф 3 содержит доказательство теоремы 2 и его следствий. В частности, мы покажем, что для любой слабо о-минимальной теории T, для любого множества $A \subset N$, N есть $|A|^+$-насыщенная модель T, существует консервативное расширение M, $A \subset \subset M \prec N$, которое опускает все иррациональные 1-типы над A (Следствие 4) и для любой модели T существует как CD-ω-насыщенное, так и NSD-ω-насыщенное консервативные расширения (Следствие 5).

В § 4 мы описываем подкласс слабо о-минимальных теорий (конечно слабо о-минимальные, почти о-минимальные MS-теории), обладающий свойством, что класс CD-ω-насыщенных консервативных пар любой его теории аксиоматизируем естественной системой аксиом (Утверждение 4). Заметим, что для о-минимальной теории, имеющей плотный линейный порядок, такая система аксиом была представлена в работе [27], а ее совместность была доказана в [33]. В заключительной части § 4 мы приводим примеры теорий, различающие эти понятия (Примеры 1). Эти теории можно получить из произвольных о-минимальных несколькими регулярными способами. В § 5 приведен факт, который отвечает на вопрос Б. Пуаза [33].

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $A \subset N,\ \bar{\gamma}, \beta \in N \setminus A,\ N$ — модель слабо о-минимальной теории такая, что она — $|A|^+$-насыщена. Напомним, если $\bar{\gamma} \perp^w q := tp\,(\beta|A)$, тогда для $r := tp\,(\beta|A \cup \bar{\gamma})$ имеем $r(N) = q(N)$. В общем случае нет зависимости определимости r от q (Пример 1). В предложении 2 установим прямую зависимость определимости этих типов в случае, когда $A = M \cup \bar{\alpha},\ \bar{\alpha} \in N \setminus M,\ M \prec N,\ tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим, $tp\,(\bar{\gamma}\,|\,M \cup \bar{\alpha})$ определим и конечно выполним в M. Неизолированный тип p над $B, M \subset B \subset N, M \prec N$ *конечно выполним в* M, если для любого $\Theta(\bar{x}) \in p$ существует $\bar{a} \in M$ такой, что $N \models \Theta(\bar{a})$ [32].

Вначале мы дадим определения и факты (без доказательства) из [5–7], которые понадобятся для доказательства предложения 2. В частности, мы представим критерий из [7] определимости типа $q \in S_1(A)$ (Теорема 1) и его уточненную форму для случая, когда $M \prec N,\ \bar{\alpha} \in N \setminus M,\ A = M \cup \bar{\alpha},\ tp\,(\bar{\alpha}|A)$ определим (Предложение 1).

Для любого подмножества $C \subset N$, не обязательно формульного, будем обозначать:

$$C^+ := \{a \in N \mid \forall\, c \in C,\ c < a\}, \quad C^- := \{a \in N \mid \forall\, c \in C,\ a < c\}.$$

Скажем, $L(\bar{a})$-1-формула $\phi(x, \bar{\alpha})$ есть *выпуклая формула*, если $\phi(N, \bar{a})$ — выпуклое множество. Будем говорить, что L-формула $\phi(x, \bar{y})$ *выпукла по* x, если для любой L-модели M, $\forall\, \bar{b} \in M,\ \phi(x, \bar{b})$ — выпуклая формула. Из определения следует, что в слабо о-минимальной теории любая $L(\bar{a})$-1-формула эквивалентна конечной дизъюнкции выпуклых формул $L(\bar{a})$-1-формул и для любого полного типа $q \in S_1(A), A \subset N$, множество реализаций $q(N)$ является выпуклым множеством. Будем говорить, что тип $q \in S_1(A)$ *квазирационален вправо*, если множество $q(N)^+$ является $L(A)$-формульным и тип $q \in S_1(A)$ *квазирационален влево*, если множество $q(N)^-$ является $L(A)$-формульным. В слабо о-минимальной теории 1-тип будет одновременно квазирациональным вправо и влево тогда и только тогда, когда он будет изолированным. В будущем термин *квазирациональный 1-тип* будет означать неизолированный либо квазирациональный вправо, либо квазирациональный влево 1-тип. Неизолированный и не квазирациональный 1-тип назовем *иррациональным*. Для любого квазирационального $q \in S_1(A)$ зафиксируем $L(A)$-формулу $U_q(x)$, такую что $U_q \in q$ и $q(N)^+ = U_q(N)^+$ или $q(N)^- = U_q(N)^-$. Квазирациональный 1-тип $q \in S_1(A),\ A \subset N$ назовем *рациональным*, если $U_q(x)$ можно выбрать в форме $x < a$ или $a < x$ для подходящего $a \in A$. Из определения следует, что в о-минимальной теории любой квазирациональный 1-тип над алгебраически замкнутым множеством рационален. *Заметим, что мы используем понятие «иррациональный» не в обычном смысле, как отрицание понятия «рациональный», а как отрицание понятия «квазирациональный».*

Мы предполагаем, что читатель знаком с базисными свойствами насыщенных моделей и имеет некоторый опыт работы с определимостью типов.

Факт 2. Пусть M такая модель, что для некоторого $A \subset M$, M — $|A|^+$-насыщенна. Тогда верно: если $p \in S_m(A)(m < \omega)$ неизолированный тип, то для любого $\bar{\gamma} \in M$, $p(M^m)$ не $\bar{\gamma}$-формулен.

Мы будем использовать следствие Факта 2 и определения ортогональности множества типу.

Факт 3. Пусть $A, B \subset N$, $p \in S_1(A)$, $\beta \in p(N)$, $p' := tp\,(\beta|A \cup B)$, N есть $|A \cup B|^+$-насыщенная модель произвольной слабо о-минимальной теории T. Тогда верно:

(i) $p(N) = p'(N)$ тогда и только тогда, когда $B \perp^w p$.

(ii) Если $B \perp^w p$, то p и p' либо одновременно изолированные, либо квазирациональные, либо иррациональные.

Факт 4. Пусть T слабо о-минимальная теория, $p \in S_1(A), A \subseteq M \models T$. Тогда 1-тип p определим если и только, если для любой выпуклой по x L-формулы $\phi(x, \bar{y})$, тип p $\phi(x, \bar{y})$-определим.

Пусть $C, D, E \subset N, a \in N$. Скажем, что два выпуклых множества C и D *отделимы элементом a (a-отделимы)*, если $C < a < D$ или $D < a < C$. Будем говорить, что семейство выпуклых множеств E-*отделимо*, если эти множества попарно отделимы элементами из E.

Факт 5 [1]. T слабо о-минимальна тогда и только тогда, когда для любой L-формулы $\phi(x, \bar{y})$ существует $n_\phi < \omega$ такое, что для любой модели $M \models T$, для любого $\bar{a} \in M$, $\phi(M, \bar{a})$ есть объединение меньше, чем n_ϕ $\bar{a}$-формульных выпуклых $\neg\phi(M, \bar{a})$-отделимых подмножеств.

Замечание 3. Пусть $p \in S_1(A)$ есть неалгебраический 1-тип над $A \subset M$. Если M есть $|A|^+$-насыщенная модель, то $p(M)$ — выпуклое множество без минимального и максимального элементов.

Пусть B — произвольное выпуклое множество (не обязательно формульное). Скажем, что формула $U(x)$ *расщепляет* B, если $U(N)$, $\neg U(N)$ — выпуклые множества и $U(N) \cap B \neq \neq \emptyset$, $\neg U(N) \cap B \neq \emptyset$. Из замечания 3 следует

Замечание 4. Если существует $L(\bar{a})$-формула, которая делит выпуклое B, тогда существует $L(\bar{a})$-формула, которая расщепляет B.

Факт 6. Если $p \in S_1(A)$ квазирационален, то p определим.

Определение 5. Разбиение модели M на два выпуклых подмножества C и D ($C < D$) называется (C, D)-*сечением в* M. Если C имеет наибольший элемент или D имеет наименьший элемент в $M \cup \{-\infty, \infty\}$, то (C, D)-сечение называется *рациональным.* В противном случае (C, D)-сечение *нерациональное.* Мы будем говорить, что (C, D)-сечение в модели M *квазирационально*, если C и, следовательно, D M-формульны. Неквазирациональное сечение назовем *иррациональным.* Мы используем понятие «рациональное сечение» в обычном смысле и понятие «иррациональное сечение» как понятие дуальное понятию «квазирациональное (формульное) сечение». Мы говорим, что 1-тип $p \in S_1(A \cup B)$ *определяется квазирациональным сечением* (A, B), если p определяется следующим множеством формул: $\{a < x \wedge U(x) \mid a \in A\}$ или $\{x < b \wedge \neg U(x) \mid b \in B\}$. Здесь $U(x)$ есть $(A \cup B)$-определимая формула, такая что $A \subset U(N)$, $U(N) \cap B = \emptyset$.

Факт 7 [3–5]. Пусть $p \in S_1(M)$, $M \models T$. Тогда верно следующее:

1. p неопределим, если и только если p иррационален, если и только если p определим иррациональным сечением в M.

2. p определим, если и только если p квазирационален, если и только если p определим квазирациональным сечением в M.

Факт 7 — это обобщение аналогичного факта для о-минимальных теорий, доказанного Д. Маркером и Ч. Стейнхорном [24, Лемма 2.3]. Кроме того, отметим, что в о-минимальных теориях определимые 1-типы над моделями определяются рациональными сечениями.

Факт 8 [4–6]. Пусть p, $r \in S_1(A)$, $A \subset N \models T$, $\bar{\gamma} \in N \setminus A$. Тогда верно следующее:

1. Если $p \not\perp^w r$, то $r \not\perp^w p$.
2. Если кортеж $\bar{\gamma}$ ht-определим над A и $\bar{\gamma} \not\perp^w p$, то p определим.
3. Если $p \not\perp^w r$, то p определим, если и только, если r определим.

Замечание 5. (Аналогичный факт для о-минимальных теорий был сформулирован в [23]). Модель M слабо о-минимальной теории T, не имеющая определимых 1-типов над своим основным множеством M, является о-минимальным обогащением некоторой модели теории дискретного порядка с наибольшим и наименьшим элементами и, следовательно, каждая модель M' теории T не имеет также определимых (квазирациональных) 1-типов над M'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Замечания 5). По факту 7, не существует квазирациональных 1-типов над M. Так как для M не существует рациональных 1-типов над M, порядок на M дискретный и существуют наибольший и наименьший элементы. Отсутствие квазирационального нерационального 1-типа над M означает, что T о-минимальна.

$\square$

Определение 6. Формула $K(x, y)$ *монотонно возрастает по y на выпуклом множестве B*, если

$$\forall b_1,\ \forall b_2\ [(b_1 \in B \wedge b_2 \in B \wedge b_1 < b_2) \to K(N, b_1) < K(N, b_2)^+].$$

Аналогично можно определить монотонное убывание.

Факт 9 [4–6]. Если $p(y) \not\perp^w q(x)$, то существует A-определимая формула $K(x, y)$, такая что $K(x, y)$ монотонна по y на некотором $\Theta(N)$, $\Theta(y) \in p$, и монотонна по x на некотором $\mu(N)$, $\mu(x) \in q$, и для любого $\alpha \in p(N)$, любого $\beta \in q(N)$ имеем, что $K(x, \alpha)$ расщепляет $q(N)$ и $K(\beta, y)$ расщепляет $p(N)$.

Заметим, что в о-минимальном случае $K(x, y)$ из факта 9 есть график некоторой монотонной функции [1, 23, 25].

Факт 10 [4–6]. Пусть p, $q \in s_1(A)$, $p \not\perp^w q$. Тогда верно:

1. Тип p строго определимый $\iff$ тип q строго определимый.
2. Тип p иррациональный $\iff$ тип q иррациональный.

3. Тип p квазирациональный $\Longleftrightarrow$ тип q квазирациональный.
4. $\not\perp^w$ — отношение эквивалентности на $S_1(A)$.

Заметим, что факт 10 является обобщением аналогичного факта для 1-типов над о-минимальной моделью, доказанного Д. Маркером в [23]. Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset N$. Обозначим

$$L(q) := \{G(x)/G(x) \text{ — } A\text{-определимая формула, такая что } G(N) < q(N)\},$$
$$R(q) := \{D(x)/D(x) \text{ — } A\text{-определимая формула, такая что } q(N) < D(N)\}.$$

Определение 7. Пусть $q \in S_1(A)$, $A \subset N$, $\theta(\bar{y}), H(x,\bar{y})$ — A-определимая формула, $X := \theta(N^{l(\bar{y})}) \cap A^{l(\bar{y})}$.

Мы говорим, что выполняется *условие левой сходимости* формулы $H(x,\bar{y})$ на множестве X или $\theta(\bar{y})$ к типу q, и обозначаем это $LC(H(x,\bar{y}),X,q)$ или $LC(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)$, если следующее верно: $\forall\, G(x) \in L(q), \exists\, \bar{a} \in X$, такой что

$$N \models \exists\, x(G(N) < x < H(N,\bar{a})^+),\ H(N,\bar{a}) < q(N).$$

Мы говорим, что выполняется *условие правой сходимости* $H(x,\bar{y})$ на X к q, и обозначаем это $RC(H(x,\bar{y}),X,q)$, если следующее верно: $\forall\, D(x) \in L(q), \exists\, \bar{a} \in X$, такой что

$$N \models \exists\, x(H(N,\bar{a}) < x < D(N)),\ q(N) < H(N,\bar{a})^+.$$

Также мы говорим, что выполняется условие *двусторонней сходимости* $H(x,\bar{y})$ на X или $\theta(\bar{y})$ к q, и обозначаем это $C(H(x,\bar{y}),X,q)$ или $C(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q)$, если $LC(H,X,q)$ и $RC(H,X,q)$ имеют место одновременно.

Отметим, что в определениях как левой, так и правой сходимости формулы $H(x,\bar{y})$ мы использовали правую границу формулы $H(x,\bar{a})$, $\bar{a} \in A$. Можно было бы определить сходимость и по левой границе формулы, но мы этого в данной статье делать не будем.

Заметим, что фактически в [24] и [27] была рассмотрена (левая) сходимость значений функции к типу q.

Теорема 1 [7]. *Пусть $A \subset M \models T$, T — слабо о-минимальная теория, $q \in S_1(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *q неопределим.*
(ii) *Существует A-определимая формула $H(x,\bar{y})$ такая, что для любой A-определимой формулы $\theta(\bar{y})$ выполняется:*

$$[C(H(x,\bar{y}),\theta(\bar{y}),q) \bigvee C(H(x,\bar{y}),\neg\theta(\bar{y}),q)].$$

Предложение 1 [7]. *Пусть $\bar{\alpha} \in N \setminus M$, $tp\,(\bar{\alpha}/M)$ определим, $\beta \in N \setminus (M \cup \bar{\alpha})$, $q :=$ $:= tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha})$ иррациональный и не строго определим. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Существуют $(M \cup \bar{\alpha})$–формулы $H(x,\bar{y})$, $\Theta(\bar{y})$ такие, что*

$$[LC(H,\Theta,q)\ \&\ \neg RC(H,\Theta,q)] \vee [\neg LC(H,\Theta,q)\ \&\ RC(H,\Theta,q)].$$

(ii) *q определим.*

В доказательстве предложения 2 мы будем использовать

Факт 11. (Для о-минимальных теорий этот факт был отмечен в [24, с. 192, строка 16]). Пусть $\bar{\alpha} \in N \setminus M$ и $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ такие, что $\bar{\alpha}$ является ht-определимым над M и $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$ для некоторых $L(M \cup \bar{\alpha})$–формул $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha})$.

Тогда существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha})$ и $L(M)$-формула $\mu(\bar{y}')$ такие, что $LC(H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}), \mu(M), q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Факта 11). Пусть $l := l(\bar{y})$ и k $(1 \le k \le l)$ — наименьшее положительное целое число, что для σ, некоторой перестановки $\{1, \ldots, l\}$, для некоторого $\bar{\beta} := (\beta_1, \ldots, \beta_{l-k})(\beta_i \in \cup\bar{\alpha})$, для $\Theta^\sigma(\bar{y}, \bar{\alpha}) := \Theta(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(l)}, \bar{\alpha})$, $H^\sigma(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) :=$ $:= H(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(l)}, \bar{\alpha})$, имеем

$$LC(H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), \Theta^\sigma(y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), q)$$

или эквивалентно, $LC(H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}), X_0, q)$, где

$$X_0 := \Theta^\sigma(M^k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \cap (M \cup \bar{\alpha})^k = \Theta^\sigma(M^l, \bar{\alpha}) \cap ((M \cup \bar{\alpha})^k \times \bar{\beta}).$$

Существование такого k следует из $LC(H(x, \bar{y}, \bar{\alpha}), \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}), q)$. Обозначим $\Theta_1(\bar{y}', \bar{\alpha}) := \Theta^\sigma(y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_{i,j} y_i \neq \alpha_j$, $H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}) := H^\sigma(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{\beta}, \bar{\alpha})$. Тогда для $X_1 := \Theta^\sigma(N^k, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \cap M^k = \Theta_1(N^k) \cap (M \cup \bar{\alpha})^k$, в силу минимальности k, имеем

$$LC(H'(x, \bar{y}', \bar{\alpha}), \Theta_1(\bar{y}', \bar{\alpha}), q).$$

Так как $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим, для $\Theta_1(\bar{y}', \bar{z})$ существует $L(M)$–формула $\mu(\bar{y}')$ такая, что $\mu(M^k) = X_1$. □

Предложение 2. *Пусть $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \beta \in N \setminus M$ такие, что*

(i) *$\bar{\alpha}$ ht-определим над M;*
(ii) *$tp\,(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определим и конечно выполним в M;*
(iii) *$\bar{\gamma} \perp^w q := tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha})$.*

Тогда q определим если и только, если $r := tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Предложения 2). Заметим, что условие $\bar{\gamma} \perp^w q$ влечет $q(N) =$ $= r(N)$. Тогда в силу факта 3 q и r одновременно иррациональны или квазирациональны. Если они оба квазирациональны, то по факту 6 они оба определимы, что доказывает предложение 2 для этого случая. Таким образом, мы будем полагать, что q и r иррациональны.

Предположим, q определим. Для q есть две возможности: либо q строго определим, либо не строго определим. Тогда, принимая во внимание предложение 1 для не строго определимого типа, имеем три различных случая (В случаях (a)–(b) предполагается, что тип q нестрого определим):

(a) Существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и M-формульное подмножество $X \subset$ $\subset M^{l(\bar{y})}$ (Факт 11) так, что $LC(H, X, q)$, $\neg RC(H, X, q)$.

(b) Существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и M-определимое подмножество $X \subset \subset M^{l(\bar{y})}$ (Факт 11) так, что $\neg LC(H, X, q)$, $RC(H, X, q)$.

(c) Для любой $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $H(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$ и для любого M-формульного подмножества $X \subset M^{l(\bar{y})}$ имеем

$$\neg LC(H, X, q), \ \neg RC(H, X, q),$$

т. е. q строго определим.

Во всех случаях (a)–(c) мы покажем, что $r = tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

(a) Пусть $\phi(x, \bar{u}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})$ произвольная $L(\bar{\gamma} \cup \bar{\alpha})$-формула. Тогда существуют $L(M)$-формулы $\Theta(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, $\mu_\Theta(\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}), l(\bar{y}) = l(\bar{z}), l(\bar{t}) = l(\bar{\alpha})$ такие, что для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{u})}$ верно:

(i) $[\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}) \Longleftrightarrow \exists\, \bar{g} \in X, \forall\, \bar{d} \in X$
$N \models \forall\, x(H(N, \bar{g}, \bar{\alpha}) < x < H(N, \bar{d}, \bar{\alpha})^+ \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}))]$
(так как $\bar{\gamma} \perp^w q, LC(H, X, q), \neg RC(H, X, q)$).

(ii) $(\forall\, \bar{g} \in X), (\forall\, \bar{d} \in X)$
$[N \models \forall\, x(H(N, \bar{g}, \bar{\alpha}) < x < H(N, \bar{d}, \bar{\alpha})^+ \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}))$
$\Longleftrightarrow N \models \Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d}, \bar{\alpha})]$ (так как $tp\,(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ определим).

(iii) $(\forall\, \bar{g} \in X), (\forall\, \bar{d} \in X)[N \models \Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow M \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{g}, \bar{d})]$
(так как $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим).

Таким образом, $M \models \exists\, \bar{y}\,[\bar{y} \in X \wedge \forall \bar{z}(\bar{z} \in X \to \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z}))]$ тогда и только тогда, когда

$$\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}).$$

(b) Аналогично (a).

(c) Для произвольной $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $\phi(x, \bar{u}, \bar{y}, \bar{\alpha})$, $l(\bar{y}) = l(\bar{\gamma})$, в силу строгой определимости q, существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $G \in F(q)$,
$D \in R(q)$ такие, что $\forall \bar{b} \in M^{l(\bar{y})}, \forall\, \bar{a} \in M^{l(\bar{u})}$ верно:

$$[\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q \Longleftrightarrow N \models \forall\, x(G(N) < x < D(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}))].$$

Пусть $\Theta(\bar{y}, \bar{a}, \bar{\alpha}) := \forall x(G(N) < x < D(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{y}, \bar{\alpha}))$.

Тогда, так как $tp\,(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ определим, существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $\mu_\Theta(\bar{u}, \bar{\alpha})$ такая, что $\forall\, \bar{a} \in M[\Theta(\bar{y}, \bar{a}, \bar{\alpha}) \in tp\,(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow N \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})]$. Таким образом, для любого $\bar{a} \in M$, если $N \models \mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$, то $\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$.
Предположим обратное неверно, т. е. для некоторого $\bar{a} \in M$ выполняется

$$(*)_{\bar{a}}\ N \models \neg\mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}), \ \text{ и } \ \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in r = tp\,(\beta/M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}).$$

$N \models \neg\mu_\Theta(\bar{a}, \bar{\alpha})$ означает по определению, что

$$N \models \exists\, x\,[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})].$$

В силу иррациональности r существуют $G_1 \in F(q)$, $D_1 \in R(q)$ такие, что

$$N \models \forall\, x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})].$$

Таким образом, имеем

$$N \models \forall x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})] \wedge \exists x[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha})].$$

Тогда, так как $tp\,(\bar{\gamma}/M \cup \bar{\alpha})$ конечно выполним в M, существует $\bar{b} \in M$ такой, что

$$N \models \forall x[G_1(N) < x < D_1(N) \to \phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha})] \wedge \exists x[G(N) < x < D(N) \wedge \neg\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha})].$$

Истинность первого члена конъюнкции означает $\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q$ и истинность второго члена этой конъюнкции означает $\neg\phi(x, \bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}) \in q$. Противоречие, которое вытекает из предположения $(*)_{\bar{a}}$. Следовательно, для любого $\bar{a} \in M$ верно

$$[N \models \mu(\bar{a}, \bar{\alpha}) \Longleftrightarrow \phi(x, \bar{a}, \bar{\gamma}, \bar{\alpha}) \in r],$$

что означает определимость r.

Теперь покажем достаточность. Предположим, r определим. Пусть $\varphi(x, \bar{y})$ произвольная $L(A)$-формула. Обозначим $\varphi'(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) := \varphi(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge y_i \neq \alpha_j$. Тогда, так как $q \subset r$, для любого $\bar{a} \in M^{l(\bar{y})}$ верно:

$$\varphi(x, \bar{a}) \in q \iff^{(1)} \varphi'(x, \bar{a}, \bar{\alpha}) \in r.$$

Тип r определим, поэтому существует $\varphi'(x, \bar{y}, \bar{\alpha})$-определение типа r некоторая $L(A \cup \bar{\alpha})$-формула $\Theta(\varphi')(\bar{y}, \bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{c}))$ такая, что выполняется

$$[\varphi'(x, \bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \bar{c}) \in r \iff^{(2)} N \models \Theta(\varphi')(\bar{a}, \bar{\alpha})].$$

Из определения типа следует, что

$$N \models \Theta(\varphi')(\bar{a}, \bar{\alpha}) \iff^{(3)} \Theta(\varphi')(\bar{a}, \bar{z}) \in tp\,(\bar{\alpha}|M).$$

Так как тип $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим, существует $L(A)$-формула $\Psi_{\Theta(\varphi')}$ такая, что

$$\Theta(\varphi')(\bar{a}, \bar{z}) \in tp\,(\bar{\alpha}|M) \iff^{(4)} M \models \Psi_{\Theta(\varphi')}(\bar{a}).$$

Условия (1)–(4)означают, что q есть определимый тип. □

Определение 8. Скажем, что теория T имеет *свойство совместного расширения для нестрого определимых 1-типов (AP для NSD-1-типов)*, если для любой пары моделей (M, N) теории T, $\forall\, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma} \in N \setminus M$ таких, что типы $tp\,(\bar{\alpha}|M)$, $tp\,(\bar{\gamma}|M \cup \bar{\alpha})$ определимы, $q := tp\,(\beta \mid M \cup \bar{\alpha})$ иррационален и определим, $\bar{\gamma} \perp^w q$, следующее верно:

Если q не строго определим, тогда $tp\,(\beta|M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определим.

Из доказательства предложения 2 (необходимость, случаи (a)–(b)) вытекают два следующих утверждения.

Следствие 1. *Каждая слабо о-минимальная теория имеет AP для NSD-1-типов.*

Следствие 2. *Пусть $p, q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$, $\bar{\alpha} \in N \setminus M$, $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определимы, $p \perp^w q$, $\delta \in p(N)$, $\beta \in q(N)$. Предположим, что p и q определимы, иррациональны и по крайне мере один из этих типов не строго определим. Тогда $tp\,(\beta\delta \mid M \cup \bar{\alpha})$ определим.*

Принимая во внимание пример 1 и следствие 2, сформулируем следующий

Вопрос 1. Обладает ли (слабо) о-минимальная теория AP для D-1-типов или, эквивалентно, AP для SD-1-типов?

§ 2. Критерий и его следствия

В этом параграфе мы докажем теорему 2. Из теоремы 2, вопроса 1 следует, что ответ на вопрос о существовании D-ω-насыщенного консервативного расширения для произвольной модели слабо о-минимальной теории для нас неизвестен, даже в о-минимальном контексте. Тем не менее, из доказательств предложения 2 и теоремы 2 (ii)$\Rightarrow$(i) следует существование для любой модели слабо о-минимальной теории консервативного NSD-ω-насыщенного расширения и консервативного CD-ω-насыщенного расширения (Следствие 5).

Теорема 2. *Пусть T — слабо о-минимальная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Каждая модель M для T имеет D-ω-насыщенное консервативное расширение.*
(ii) *T имеет AP для D-1-типов.*
(iii) *T имеет AP для SD-1-типов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Теоремы 2). (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из определения D-ω-насыщенной консервативной пары и AP для D-1-типов.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) следует из следствия 2 и определения 3.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

Определение 9. Пусть $A \subset B \subset N$, где N — большая насыщенная модель. Говорят, что B — *консервативное 1-расширение* A, если для любого $\alpha \in B \setminus A$ верно, что $tp\,(\alpha|A)$ определим. Говорят, что B — *консервативное расширение* A, если для любого $\bar{\alpha} \in B \setminus A$ $tp\,(\bar{\alpha}|A)$ определим.

Утверждение 1. *Пусть $A \subset B \subset C \subset N$. Если B — консервативное расширение A и C — консервативное расширение B, то C — консервативное расширение A.*

Пусть $M \prec N$, где N — большая насыщенная модель. Определим модель M_ω ($M \prec M_\omega \prec N$) как объединение элементарной цепи моделей $M_n, n < \omega$ (**D1**). Построение M_{n+1} ($M_n \prec M_{n+1}$) будем вести в два этапа. На первом этапе мы строим B_n ($M_n \subset B_n \subset M_{n+1}$), предполагая, что все определимые не реализованные в M_n (**D4**) 1-типы над $M \cup \bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} \in M_n$) реализованы в B_n (**D5**). На втором этапе мы замыкаем B_n до модели M_{n+1}, пользуясь критерием Тарского-Вота. Для этого мы строим множество $E(n,m) \subset E(n,m+1)$, $m < \omega$ такое, что любая $L(E(n,m))$-1-формула имеет решение в $E(n,m+1)$ (**D6, D7**), а M_{n+1} есть объединение $E(n,m)$, $m < \omega$ (**D3**).

Наша главная задача в этой стандартной схеме построения модели (см., например, [15, Гл. 3.1], или [32, Ch. 4]) заключается в выборе элементов $\beta_{n,\lambda} \in B_{n+1}$ ($\mathbf{D8}_{n,\lambda}$) и $e_{n,m,\lambda} \in E_{n,m+1}$ ($\mathbf{D9}_{n,m,\lambda}$) таких, что и B_n, и $E(n,m)$ являются консервативными расширениями M_n. В итоге применение утверждения 1 будет завершать доказательство теоремы. Таким образом, условия **D1-D7** описывают конструкцию модели M_ω, описание выбора элементов **D8** совместно с **D4** и **D5** обеспечивает D-ω-насыщенность модели M_ω, описание выбора элементов **D9** совместно с **D6** и **D7** обеспечивает условие, что M_{n+1} есть элементарное расширение M_n:

D1 $M_\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} M_n,\ M_n \prec M_{n+1} \prec M_\omega, M_n$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D2}_{n<\omega}$ $M_n \subset B_n \subset E(n,m) \subset E(n,m+1) \subset M_{n+1},\ m<\omega$.

$\mathbf{D3}_{n<\omega}$ $M_{n+1} = \bigcup\limits_{m<\omega} E(n,m)$.

$\mathbf{D4}_{n<\omega}$ $K_n = \bigcup\limits_{\bar\alpha \in M_n \setminus M} S_1^d(M \cup \bar\alpha)$. Здесь

$$S_1^d(M \cup \bar\alpha) = \{q \in S_1(M \cup \bar\alpha) \mid q \text{ — определимый}, q(N) \cap M_n = \emptyset\}.$$

Зафиксируем произвольное перечисление типов множества

$$K_n = \{q_{n,\lambda} \in S_1^d(M \cup \bar\alpha_{n,\lambda}) \mid \lambda < \mu_n, \bar\alpha_{n,\lambda} \in M_n \setminus M\}, \quad \mu_n = |K_n|.$$

$\mathbf{D5}_{n<\omega}$ $B_n = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_n} B_{n,\lambda},\ \forall\,\lambda<\mu_n$,

$B_{n,\lambda} = \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$, $\beta_{n,\lambda} \in q_{n,\lambda}(N)$, $B_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D6}_{n,m<\omega}$ $F(n,m) = \{\psi(x) | \psi(x)$ — $L(E(n,m))$-формула, такая что $\psi(N) \neq \emptyset$, $\psi(N) \cap \cap E(n,m) = \emptyset\}$. Зафиксируем произвольное перечисление формул множества

$$F(n,m) = \{\psi_{n,m,\lambda}(x) \mid \lambda < \mu_{n,m}\}, \quad \mu_{n,m} = |F(n,m)|.$$

$\mathbf{D7}_{n,m<\omega}$ $E(n,m+1) = \bigcup\limits_{\lambda<\mu_{n,m}} E(n,m,\lambda),\ \forall\,\lambda<\mu_{n,m}$,

$$E(n,m,\lambda) = \bigcup_{\lambda'<\lambda} E(n,m,\lambda') \cup \{e_{n,m,\lambda}\}, \quad e_{n,m,\lambda} \in \psi_{n,m,\lambda}(N),$$

$E(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M.

Для завершения описания построения M_ω дадим объяснение выбора $\beta_{n,\lambda}$ и $e_{n,m,\lambda}$ и доказательства того, что $B_{n,\lambda}$ и $E(n,m,\lambda)$ суть консервативные расширения M.

$\mathbf{D8}_{n,\lambda}$ **Выбор** $\beta_{n,\lambda}$ **для** $n<\omega, \lambda<\mu_n$.

Обозначим $B'_{n,\lambda} := \bigcup\limits_{\lambda'<\lambda} B_{n,\lambda'}$. Рассмотрим два случая:

$\mathbf{D8.1}_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \perp^w q_{n,\lambda}$. Возьмем произвольный элемент $\beta \in q_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его $\beta_{n,\lambda}$. Согласно (ii), т.е. потому, что T удовлетворяет AP для D-1-типов, $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

$\mathbf{D8.2}_{n,\lambda}$ $B'_{n,\lambda} \not\perp^w q_{n,\lambda}$. Пусть $H(x)$ будет произвольной $L(B'_{n,\lambda})$-формулой, такой что $H(x)$ расщепляет $q_{n,\lambda}(N)$, т.е. $H(N) < \neg H(N)$ и $H(N) \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$, $\neg H(N) \cap \cap q_{n,\lambda}(N) \neq \emptyset$. Существование такой формулы $H(x)$ следует из определения неортогональности множества типу и замечаний 3 и 4.

Пусть $\Gamma_{n,\lambda}(x) := q_{n,\lambda}(x) \cup \{\phi(N) < x < H(N)^+ \mid \phi(x)$ будет $L(B'_{n,\lambda})$-формулой, такой что $N \models \exists x\,(\phi(N) < x < H(N)^+)\}$. Заметим, что $\Gamma_{n,\lambda}(x)$ имеет единственное расширение до полного 1-типа $p_{n,\lambda}$ над $B'_{n,\lambda}$, который либо изолированный, либо квазирациональный вправо и, следовательно, в любом случае $p_{n,\lambda}(x)$ определим (Факт 6).

Покажем единственность $p_{n,\lambda}$. Возьмем произвольную $L(B(n,\lambda)')$-формулу $\Theta(x)$ и рассмотрим $(\Theta(N) \cap H(N))^+$. Положим, что $\Theta(x) \in p_{n,\lambda}$, если и только если $(\Theta(N) \cap \cap H(N))^+ = H(N)^+$. Из определения $\Gamma_{n,\lambda}(x)$ следует, что $p_{n,\lambda}(N)^+ = H(N)^+$.

Возьмем произвольный элемент β из $p_{n,\lambda}(N)$ и обозначим его $\beta_{n,\lambda}$. Тогда по замечанию 1 $B_{n,\lambda} = B'_{n,\lambda} \cup \{\beta_{n,\lambda}\}$ — консервативное расширение M, если $B'_{n,\lambda}$ — консервативное расширение M.

D9$_{n,m,\lambda}$ **Выбор** $e_{n,m,\lambda}$ **для** $n, m < \omega, \lambda < \mu_{n,m}$.

Обозначим $E'(n,m,\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda' < \lambda} E(n,m,\lambda')$. Рассмотрим два случая:

D9.1$_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$, такая что $N \models \forall x\, (\theta(x) \to \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$, и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Тогда по замечанию 1 для произвольного $e \in \theta(N)$ имеем, что $E'(n,m,\lambda) \cup \{e\}$ — консервативное расширение M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Таким образом, положим $e_{n,m,\lambda} = e$.

D9.2$_{n,m,\lambda}$ Существует $L(E'(n,m,\lambda))$-формула $\theta(x)$, такая что $N \models \forall x\, (\theta(x) \to \to \psi_{n,m,\lambda}(x))$ и $\theta(x)$ определяет некоторый изолированный 1-тип над $E'(n,m,\lambda)$. Пусть $\psi^i_{n,m,\lambda}(x)$ будет выпуклой подформулой в разбиении $\psi_{n,m,\lambda}(x)$ (Факт 5) такой, что $\psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+ = \psi_{n,m,\lambda}(N)^+$.

Рассмотрим $\Gamma_{n,m,\lambda}(x) := \{\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+ \mid \phi(x)$ — выпуклая $E'(n,m,\lambda)$-определимая формула такая, что

$$\phi(N) \subset \psi^i_{n,m,\lambda}(N) \ \text{ и } \ N \models \exists x\, (\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+)\}.$$

Заметим, что для каждой выпуклой $L(E'(n,m,\lambda))$-формулы $\phi(x)$ такой, что $\phi(N) \subset \subset \psi^i_{n,m,\lambda}(N)$, верно

$$\models \exists x\, (\phi(N) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+) \vee \exists x\, ((\psi^i_{n,m,\lambda}(x) \wedge \neg\phi(N)) < x < \psi_{n,m,\lambda}(N)^+).$$

Действительно, в силу того, что $\phi(x)$ и $\psi^i_{n,m,\lambda}(x)$ выпуклые, если $\phi(N)^+ \neq \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$, то $\psi^i_{n,m,\lambda}(N) \cap \neg\phi(N) < \phi(N)$. Покажем, что $\Gamma_{n,m,\lambda}(x)$ имеет единственный расширяющий его полный 1-тип $p_{n,m,\lambda}$ над $E'(n,m,\lambda)$, который к тому же является квазирациональным вправо. Возьмем произвольную $L(E'(n,m,\lambda))$-формулу $\Theta(x)$ и рассмотрим $(\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+$. Положим, что $\Theta(x) \in p_{n,m,\lambda}$, если и только если $(\Theta(N) \cap \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+ = \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$. Если

$$(\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+ \neq \psi^i_{n,m,\lambda}(N))^+,$$

то для $K(x) := (\Theta(N) \cap \psi^i_{n,m,\lambda}(N)) < x < \psi^i_{n,m,\lambda}(N)^+$ мы имеем, что $K(x) \in \Gamma_{n,m,\lambda}(x)$. Это значит, что $\Gamma_{n,m,\lambda}(x) \cup \{\Theta(x)\}$ не совместно. Из определения $\Gamma_{n,m,\lambda}(x)$ следует, что $p_{n,m,\lambda}(N)^+ = \psi_{n,m,\lambda}(N)^+$.

Тогда для произвольного элемента $e_{n,m,\lambda} \in p_{n,m,\lambda}(N)$ верно, что $E(n,m,\lambda) := := E'(n,m,\lambda) \cup \{e_{n,m,\lambda}\}$ является консервативным расширением M, если $E'(n,m,\lambda)$ — консервативное расширение M. Это завершает определение M_ω.

M_ω есть элементарное расширение M в силу **D6**$_{n,m}$, **D7**$_{n,m}$, **D9**$_{n,m,\lambda}$ и критерия Тарского-Вота [18, 19].

Из конструкций (**D4**$_n$, **D5**$_n$, **D8**$_{n,\lambda}$) следует, что M_ω — D-ω-насыщенное консервативное расширение M. □

Заметим, что когда T о-минимальна, случай **D8.2** сводится к случаю **D9.1** потому, что в о-минимальной теории в силу факта 1 верно, что

$$\forall A \subset N, \forall q \in S_1(A), \forall \bar{\alpha} \in N[\bar{\alpha} \not\perp^w q \to \exists \beta \in q(N) \cap acl(A \cup \bar{\alpha})].$$

Аналогично, случай **D9.2** сводится к случаю **D9.1**, потому что в о-минимальной теории для любой выпуклой $L(A)$-формулы $\phi(x)$, если существует $L(A)$-формула $\Theta(x)$, такая что $\phi(N)\cap\Theta(N)\neq\emptyset$ и $\phi(N)\cap\neg\Theta(N)\neq\emptyset$, то $\phi(N)\cap acl(A)\neq\emptyset$.

Вспомним, что для любых $\beta,\bar\gamma\in N\setminus A, A\subset N$ таких, что $q:=tp(\beta|A)$ квазирациональный и $\bar\gamma\perp^w q$, тип β над $A\cup\bar\gamma$ квазирациональный (Факт 3) и, следовательно, определимый (Факт 6). Это позволяет модифицировать доказательство теоремы 2(ii)⇒(i) с помощью сокращения условия AP для D-1-типов и реализации только квазирациональных 1-типов для построения для каждой модели (каждого множества) консервативного расширения. Таким образом, общая схема построения модели из теоремы 2 позволяет, после изменения условия **D4**, с использованием фактов 8(iii), 9 и 10, а также замечания 7, строить консервативные расширения, опуская все иррациональные 1-типы (Следствие 3) и реализуя различные классы иррациональных определимых типов (Следствие 5).

Следствие 3 (Опускание иррациональных 1-типов в консервативных расширениях).

Пусть $M\prec N$, где N — M^+-насыщенное элементарное расширение M, $\bar\gamma\in N\setminus M$, $tp(\bar\gamma|M)$ определимый. Тогда существует M' ($M\prec M'\prec N$), такая что $\bar\alpha\in M'$, (M,M') консервативная пара, и для любого иррационального $r\in S(M\cup\bar\gamma)$ верно, что $r(N)\cap M'=\emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Следствия 3). Доказательство повторяет доказательство теоремы 2 со следующими двумя изменениями:

(a) Вместо $\mathbf{D4}_{n<\omega}$ мы рассмотрим $\mathbf{D4}'_{n<\omega}$:

$\mathbf{D4}'_{n<\omega}$ $K'_n=\bigcup\limits_{\bar\alpha\in M_n\setminus M}S_1^{qr}(M\cup\bar\gamma\cup\bar\alpha)$. Здесь, $S_1^{qr}(M\cup\bar\gamma\cup\bar\alpha):=\{q\in S_1(M\cup\bar\alpha)\mid q$ — квазирациональный, не строго определимый, и $q(N)\cap M_n=\emptyset\}$.

Зафиксируем произвольное перечисление типов множества

$$K'_n=\{q_{n,\lambda}\in S_1^{qr}(M\cup\bar\gamma\cup\bar\alpha_{n,\lambda})|\lambda<\mu_n,\bar\alpha_{n,\lambda}\in M_n\setminus M\},\mu_n=|K'_n|.$$

(b) **D8.1**. Из факта 3 следует, что для произвольного $\beta\in q_{n,\lambda}(N)$, $tp(\beta|B'_{n,\lambda})$ квазирациональный. Тогда в силу факта 6 тип $tp(\beta|B'_{n,\lambda})$ определимый, и, следовательно, $B_{n,\lambda}=B'_{n,\lambda}\cup\{\beta_{n,\lambda}\}$ консервативное расширение.

Пусть r — иррациональный 1-тип над A, $\delta\in r(N)$. Индукцией по построению M' мы покажем, что $E(n,m,\lambda)\perp^w r$, $B_{n,\lambda}\perp^w r$ и, следовательно, в силу факта 3 типы $r_{n,m,\lambda}:=tp(\delta|E(n,m,\lambda))$ и $r_{n,\lambda}:=tp(\delta|B_{n,\lambda})$ иррациональны.

Таким образом, мы предполагаем, что тип $r'_{n,\lambda}:=tp(\delta\mid B'_{n,\lambda})$ иррациональный, а $r'_{n,\lambda}(N)=r(N)$. Тогда, так как $q_{n,\lambda}$ квазирациональный, в случае **D8.1** мы имеем по факту 3, что $tp(\beta_{n,\lambda}\mid B'_{n,\lambda})$ квазирациональный, и, следовательно, по факту 10, $tp(\beta_{n,\lambda}|B'_{n,\lambda})\perp^w r'_{n,\lambda}$. Тогда, снова в силу факта 3, $r_{n,\lambda}(N)=r'_{n,\lambda}(N)=r(N)$, и $r_{n,\lambda}$ — иррациональный. Это означает, что $B_{n,\lambda}\perp^w r$.

Так как в случаях **D.8.2**, **D9** типы $tp(\beta_{n,\lambda}\mid B'_{n,\lambda})$ и $tp(e_{n,m,\lambda}\mid E'(n,m,\lambda))$ либо изолированны, либо квазирациональны, имеем в случае **D8.1**, что $B_{n,\lambda}\perp^w r$ и $E(n,m,\lambda)\perp^w r$. Таким образом, мы получаем, что $M'\perp^w r$, и, следовательно, $M'\cap$ $\cap\, r(N)=\emptyset$. □

То же самое доказательство, как в следствии 3, дает нам

Следствие 4 (Опускание иррациональных 1-типов над множеством). *Пусть A — подмножество $|A|^+$-насыщенной модели N слабо о-минимальной теории T. Тогда существует M — консервативное расширение для A ($A \subset M \prec N$), такое что любой иррациональный тип $r \in S_1(A)$ опускается в M.*

Говорят, что неизолированный тип $q \in S_1(A)$ удовлетворяет *свойству левой сходимости (PLC)*, если существуют $L(A)$-формулы $H(x, \bar{y})$ и $\Theta(\bar{y})$, такие что $LC(H, \Theta, q)$ и $\neg RC(H, \Theta, q)$.

Говорят, что неизолированный тип $q \in S_1(A)$ удовлетворяет *свойству правой сходимости (PRC)*, если существуют $L(A)$-формулы $H(x, \bar{y})$ и $\Theta(\bar{y})$, такие что $\neg LC(H, \Theta, q)$ и $RC(H, \Theta, q)$.

В дальнейшем мы предполагаем, что если верно $LC(H, \Theta, q)$ и $\neg RC(H, \Theta, q)$, то для любого $\bar{a} \in A$ выполняется, если $N \models \Theta(\bar{a})$, то $H(N, \bar{a}) < q(N)$ и $RC(H, \Theta, q)$, а если верно $\neg LC(H, \Theta, q)$, то для любого $\bar{a} \in A$ выполняется, если $N \models \Theta$, то $q(N) < H(N, \bar{a})^+$. Действительно, для случая $LC(H, \Theta_1, q), \neg RC(H, \Theta_1, q)$, из $\neg RC(H, \Theta, q)$ следует существование формулы $D(x) \in R(q)$ (Определение 7), такой что для любого $\bar{a} \in \Theta(N) \cap A$ верно $[H(N, \bar{a}) < D(N) \to H(N, \bar{a}) < q(N)]$. Предположим, что $\Theta_1(\bar{y}) := \Theta(\bar{y}) \wedge H(N, \bar{y}) < D(N)$. Тогда мы имеем $LC(H, \Theta_1, q)$, $\neg RC(H, \Theta_1, q)$ и $\forall\, \bar{a} \in \Theta_1(N) \cap A$ верно $H(N, \bar{a}) < q(N)$.

Говорят, что $q \in S_1(A)$ удовлетворяет *свойству сходимости (PC),* если он удовлетворяет PLC или PRC. Также говорят, что тип удовлетворяет *свойству двусторонней сходимости (PBC)*, если он удовлетворяет как PLC, так PRC. Заметим, что в силу теоремы 1 любой определимый, но не строго определимый 1-тип удовлетворяет PC, а в силу предложения 1 любой не строго определимый 1-тип над объединением модели M и конечного ht-определимого над M множества удовлетворяет PC тогда и только тогда, когда этот тип определимый.

Утверждение 2. *Пусть $q \in S_1(A)$ — неизолированный.*

(i) *Предположим, что q квазирациональный. Тогда q не строго определимый тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PC, тогда и только тогда, когда q является CD-1-типом.*

(ii) *Предположим, что q иррациональный. Тогда q удовлетворяет PBC тогда и только тогда, когда q является CD-1-типом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 2). Мы докажем эти пункты для иррационального 1-типа, случай для квазирационального 1-типа рассматривается аналогично. Действительно, пусть $A \subset N$, $q \in S_1(A)$, $H_1(x, \bar{y}_1)$, $\Theta_1(\bar{y}_1)$, $H_2(x, \bar{y}_2)$, $\Theta_2(\bar{y}_2)$ — $L(A)$-формулы, такие, что имеет место

$$LC(H_1, \Theta_1, q),\ \ \neg RC(H_1, \Theta_1, q),\ \ RC(H_2, \Theta_2, q), \neg LC(H_2, \Theta_2, q).$$

Обозначим $\phi(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) := H_1(N, \bar{y}_1) < x < H_2(N, \bar{y}_2)^+$ и $\Theta(\bar{y}_1, \bar{y}_2) := \Theta_1(\bar{y}_1) \wedge \Theta_2(\bar{y}_2)$.

Рассмотрим произвольную выпуклую $\Psi(x) \in q$. Тогда $\Psi(N)^- < q(N) < \Psi(N)^+$. Из определения 7 следует, что существуют $\bar{b}_1 \in \Theta_1(N) \cap A^{l(\bar{y}_1)}$ и $\bar{b}_2 \in \Theta_2(N) \cap A^{\bar{y}_2}$, такие что

$$N \models \exists\, x_1(\Psi(N)^- < x_1 < H_1(N, \bar{b}_1)) \wedge \exists\, x_2(H_2(N, \bar{b}_2) < x_2 < \Psi(N)^+).$$

Это означает, что $N \models \forall x(\phi(x,\bar{b}_1,\bar{b}_2) \to \Psi(x))$. Таким образом, q определяется $q_{\phi,\Theta}$-типом, и, следовательно, q является CD-1-типом.

Теперь предположим, что q — это CD-1-тип. Тогда левая граница формул $\phi(x,\bar{a})$, где $\bar{a} \in \Theta(N) \cap A$, определяет левую сходимость к 1-типу q и не определяет правую сходимость к q, а правая граница формул $\phi(x,\bar{a})$, где $\bar{a} \in \Theta(N) \cap A$, определяет правую сходимость к типу q, но не определяет левую (Определение 7).

(iii) следует из (i), (ii). $\square$

Замечание 6. Пара моделей (M,N) будет CD-ω-насыщенной парой тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in N \setminus M$ любой квазирациональный не строго определимый 1-тип над $M \cup \bar{\alpha}$ и любой иррациональный 1-тип над $M \cup \bar{\alpha}$, удовлетворяющий PBC, реализуются в N.

Следующий факт является следствием фактов 8(iii), 9 и 10.

Замечание 7. Пусть $p, q \in S_1(A)$ и $p \not\perp^w q$. Тогда следующее верно:

(i) p удовлетворяет PC тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PC.

(ii) p удовлетворяет PBC тогда и только тогда, когда q удовлетворяет PBC.

Определение 10. Говорят, что теория T удовлетворяет *свойству совместного расширения (AP) для CD-1-типов*, если для любой пары моделей (M,N) теории T, $\forall\, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\gamma} \in N \setminus M$, таких что типы $tp\,(\bar{\alpha} \,|\, M)$, $tp\,(\bar{\gamma} \mid M \cup \bar{\alpha})$ определимые, а тип $q := tp\,(\beta \mid M \cup \bar{\alpha})$ иррациональный и определимый, и $\bar{\gamma} \perp^w q$, верно следующее:

> Если q есть CD-1-тип или, что эквивалентно, удовлетворяет PBC, то
> $tp\,(\beta | M \cup \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma})$ определимый.

Так как любой определимый CD-1-тип не является строго определимым, имеем

Замечание 8. Если теория T удовлетворяет AP для D-1-типов, то T удовлетворяет AP для NSD-1-типов, а если T удовлетворяет AP для NSD-1-типов, то T удовлетворяет AP для CD-1-типов.

Следствие 5. *Пусть M — модель слабо о-минимальной теории T. Тогда для M существуют:*

(i) *NSD-ω-насыщенное консервативное расширение;*

(ii) *CD-ω-насыщенное консервативное расширение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Следствия 5). (i) Построение NSD-ω-насыщенного расширения повторяет конструкцию из теоремы 2(ii)⇒(i) с точностью до следующих двух модификаций:

(a) В **D8.1** мы используем условие AP для NSD-1-типов вместо условия AP для D-1-типов.

(b) Вместо $\mathbf{D4}_{n<\omega}$ мы рассмотрим $\mathbf{D4}''_{n<\omega}$ $K''_n = \bigcup_{\bar{\alpha} \in M_n \setminus M} S_1^{nsd}(M \cup \bar{\alpha})$. Здесь, $S_1^{nsd}(M \cup \bar{\alpha}) := \{q \in S_1(M \cup \bar{\alpha}) \mid q(N) \cap M_n = \emptyset$, и q определимый, не строго определимый$\}$. Зафиксируем произвольное перечисление типов множества

$$K''_n = \{q_{n,\lambda} \in S_1^{nsd}(M \cup \bar{\alpha}_{n,\lambda}) \mid \lambda < \mu_n,\ \bar{\alpha}_{n,\lambda} \in M_n \setminus M\}, \quad \mu_n = |K''_n|.$$

(ii) Построение CD-расширения повторяет конструкцию из теоремы 2(ii)⇒(i) с точностью до следующих двух модификаций:

(a) В **D8.1** мы используем AP для NSD-1-типов вместо условия AP для D-1-типов.

(b) Вместо $\mathbf{D4}_{n<\omega}$ мы рассмотрим $\mathbf{D4}'''_{n<\omega}$ $K'''_n = \bigcup_{\bar{\alpha}\in M_n\setminus M} S_1^{cd}(M\cup\bar{\alpha})$. Здесь, $S_1^{cd}(M\cup\bar{\alpha}) :=$ $:= \{q \in S_1(M \cup \bar{\alpha}) \mid q(N) \cap M_n = \emptyset$, и q удовлетворяет PC или PBC, если он иррациональный$\}$. Зафиксируем произвольное перечисление

$$K'''_n = \{q_{n,\lambda} \in S_1^{cd}(M \cup \bar{\alpha}_{n,\lambda}) \mid \lambda < \mu_n, \bar{\alpha}_{n,\lambda} \in M_n \setminus M\}, \quad \mu_n = |K''_n|. \qquad \square$$

Замечание 9. Д. Маркер в [23] доказал существование консервативного расширения для любой о-минимальной модели. Мы не знаем, что значит «дедекиндовы красивые пары» в статье Байсалова-Пуаза [33, с. 574], но в действительности они доказали существование CD-ω-насыщенного консервативного расширения для любой о-минимальной модели. Будем говорить, по аналогии с [30], что пара моделей (M, N) есть консервативная D-красивая пара, если

1) (M, N) есть консервативная пара,
2) M есть ω-насыщенная модель,
3) (M, N) — D-ω-насыщенная пара.

Мы не знаем, существует ли консервативная D-красивая пара для произвольной (слабо) о-минимальной теории.

В заключение параграфа приведем примеры D-ω-насыщенной, NSD-ω-насыщенной, CD-ω-насыщенной консервативных пар о-минимальной теории. Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — рациональных. Обозначим $\mathbb{Q}^{>0} := \{a \in \mathbb{Q} | a > 0\}$, $I := \{\frac{1}{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$, $B_1 := \{0\} \times N$, $B_2 := B_1 \cup \{1\} \times \mathbb{Z}$, $B_3 := B_1 \cup I \times \mathbb{Z}$, $B_4 := B_1 \cup \mathbb{Q}^{>0} \times \mathbb{Z}$.

На моделях $M_i := \langle B_i; =, <\rangle$, $1 \le i \le 4$, отношение $<$ есть лексикографическое упорядочение. Эти четыре модели являются моделями теории дискретного порядка с левым концом, но без правого. Эта теория о-минимальна [28]. Из определения следует, что

$$M_1 \prec M_2 \prec M_3 \prec M_4.$$

Говорят, что пара моделей (M, N) является *1-консервативной*, если для любого $\alpha \in N \setminus M$ верно, что $tp\,(\alpha|M)$ определим. Д. Маркер и Ч. Стейнхорн доказали, что любая 1-консервативная пара произвольной о-минимальной теории — консервативная [24] (Заметим, что существует 1-консервативная неконсервативная пара моделей слабо о-минимальной теории [7]).

Так как существует только один неизолированный 1-тип над M_1, и этот тип рациональный (определимый), любое элементарное расширение для M_1 является 1-консервативным. Тогда по теореме Маркера–Стейнхорна пары моделей (M_1, M_2), (M_1, M_3), (M_1, M_4) консервативны. Мы оставляем читателям проверку следующих утверждений:

(M_1, M_2) — CD-ω-насыщенная, не NSD-ω-насыщенная консервативная пара;

(M_1, M_3) — NSD-ω-насыщенная, не D-ω-насыщенная консервативная пара;

(M_1, M_4) — D-ω-насыщенная консервативная пара.

§ 3. Аксиоматизируемые классы консервативных пар

Пусть $L^* = L \cup \{P^1\}$. Обозначим, $\bar{z} \notin P := \wedge_i \neg P^1(z_i)$, $\bar{y} \in P := \wedge_i P^1(y_i)$.

Пусть (M, N) — пара моделей слабо о-минимальной теории T. Через T_0^* обозначим множество всех предложений в L^*, которое говорит, что предикат P^1 выделяет M как элементарную подмодель для N. А. Пиллай заметил [27], что класс консервативных пар моделей слабо о-минимальной теории аксиоматизируем. В самом деле, любой определимый 1-тип над о-минимальной моделью рациональный [24] и следующая аксиома А. Пиллая выделяет класс всех 1-консервативных пар, который по теореме Маркера–Стейнхорна совпадает с классом всех консервативных пар:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ax(P)} \;:=\; & \forall x\,(x \notin P \to (\exists y\,(y \in P \wedge x < y \wedge \\ & \wedge \forall z\,(x < z < y \to z \notin P)) \vee \exists y\,(y \in P \wedge x > y \wedge \forall z\,(x > z > y \to z \notin P)))).\end{aligned}$$

В этом параграфе мы покажем, что класс CD-ω-насыщенных пар моделей произвольной слабо о-минимальной теории аксиоматизируем (Утверждение 3) в языке пар моделей, и выделим два подкласса класса слабо о-минимальных теорий, содержащих класс о-минимальных теорий и имеющих следующие свойства:

1) Класс 1-консервативных пар моделей *конечно слабо о-минимальной теории* (Определение 11) аксиоматизируем в языке пар моделей;

2) Класс 1-консервативных пар *почти о-минимальной MS-теории* совпадает с классом консервативных пар моделей этой теории (Лемма 1).

Это позволяет выделить такие слабо о-минимальные теории, что класс их консервативных CD-ω-насыщенных пар моделей аксиоматизируем (Утверждение 4). В заключительной части параграфа приведем примеры таких теорий (Примеры 1)

Пусть $\phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ произвольная выпуклая по x L-формула. Для любой L-формулы $\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, любого $\bar{\alpha} \in (N \setminus M)^{l(\bar{z})}$, любого $\bar{b} \in M^{l(\bar{u})}$ определим множество $L(M \cup \bar{\alpha})$-1-формул

$$\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x) := \{\phi(x, \bar{a}, \bar{\alpha}) \mid N \models \Theta(\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{b}), \bar{a} \in M\}.$$

Заметим, 2-совместность семейства выпуклых формул влечет его n-совместность для любого $n < \omega$, и следовательно, для $L^*(\bar{\alpha} \cup \bar{b})$-формулы

$$K_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b}) := \forall \bar{y}_1 \forall \bar{y}_2 [(\bigwedge_i \bar{y}_i \in P \wedge \bigwedge_i \Theta(\bar{y}_i, \bar{\alpha}, \bar{b})) \to \exists x(\neg P^1(x) \wedge \bigwedge_i \phi(x, \bar{y}_i, \bar{\alpha}))]$$

следующее верно:

$$\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x) \text{ совместно } \iff (M, N) \models K_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b}).$$

Рассмотрим следующие L^*-формулы.

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(\Theta, \phi)(\bar{z}, \bar{u}) := K_{\Theta,\phi}(\bar{z}, \bar{u}) \to \exists x[\neg P^1(x) \wedge \forall \bar{y}((\Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \wedge \bar{y} \in P) \to \phi(x, \bar{y}, \bar{z}))],\\ &\quad \mathbf{A}x(\Theta, \phi) = \forall \bar{z} \forall \bar{u}(\mathbf{B}(\Theta, \phi)(\bar{z}, \bar{u})).\end{aligned}$$

Заметим, что для произвольной модели M и ее произвольного элементарного $|M|^+$-насыщенного расширения N все формулы вида **Ax** истинны на (M, N) потому, что истинность на паре (M, N) таких формул означает, что каждый иррациональный 1-тип над объединением M и конечного множества, имеющий РВС, реализуется в N и каждый не строго определимый, квазирациональный 1-тип над объединением M и конечного множества реализуется в N. Таким образом, $T_1^* := T_0^* \cup \{\mathbf{Ax}(\Theta, \phi) | \Theta(\bar{y}, \bar{z}), \phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ — L-формулы, $\phi(x, \bar{y}, \bar{z})$ выпукло по $x\}$ совместно.

Утверждение 3. *Для любой пары моделей (M, M') теории T верно:*

$$(M, M') \models T_1^* \Longleftrightarrow (M, M') \text{ является } CD\text{-}\omega\text{-насыщенной парой.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 3). ($\Rightarrow$) Это следует из утверждения 2, замечания 6 и определения $\mathbf{Ax}$.

($\Leftarrow$) Пусть (M, M') есть CD-ω-насыщенная пара моделей, $\phi(x, \bar{y}, \bar{z}), \Theta(\bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ — L-формулы, ϕ — выпуклая по x, такие что

$$(M, M') \models \neg\, \mathbf{Ax}(\Theta, \phi).$$

Тогда для некоторого $\bar{\alpha} \in (M' \setminus M)$ и некоторого $\bar{b} \in M$, $\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x)$ совместно и не реализуется в M'. Тогда не существует неизолированного $q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ такого, что $\Gamma_{\Theta,\phi}(\bar{\alpha}, \bar{b})(x) \subset q(x)$ и q не реализуется в M'. Обозначим

$$H^1_\phi(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) := x < \phi(N, \bar{y}, \bar{\alpha}), \quad H^2_\phi(x, \bar{y}, \bar{\alpha}) := \phi(N, \bar{y}, \bar{\alpha}) < x, \quad \Theta(\bar{y}) := \Theta(\bar{y}, \bar{\alpha}, \bar{b}).$$

Мы рассмотрим три различных случая и во всех случаях покажем, что q реализуется в M', что будет противоречить нашему предположению.

(i) q иррационален. Тогда $LC(H^1_\phi, \Theta, q), RC(H^2_\phi, \Theta, q), \neg\, RC(H^1_\phi, \Theta, q), \neg\, LC(H^2_\phi, \Theta, q)$. Это означает, что q имеет РВС, и по замечанию 6 q реализуется в M'.

(ii) q квазирационален вправо. Тогда существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула U_q такая, что $q(M')^+ = U_q(M')^+$ и $LC(H^1_\phi, \Theta, q)$. Это означает, что q не строго определим и по замечанию 6 q реализуется в M'.

(iii) q квазирационален влево. Тогда существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула U_q такая, что $q(M')^- = U_q(M')^-$ и $RC(H^1_\phi, \Theta, q)$. Это означает, что q не строго определим и, по замечанию 6 q реализуется в M'. □

Определение 11. Пусть M — модель слабо о-минимальной теории, $\bar{b} \in M$, $\Psi(x, \bar{b})$ — $L(\bar{b})$-1-формула, N — большое $|M|^+$-насыщенное элементарное расширение M. Будем говорить, что $\Psi(x, \bar{b})$ конечно слабо о-минимальна в M, если существует конечное число L-формул $\{\phi_i(x, \bar{y}_i), \phi'_i(x, \bar{y}_i) : i < n\}$ таких, что для любого квазирационального $q \in S_1(M), \Psi(x, \bar{b}) \in q$ существуют $i < n$ и $\bar{a} \in M$, такие что

$$q(N)^+ = \phi_i(N, \bar{a})^+ \quad \text{или} \quad q(N)^- = \phi'_i(N, \bar{a})^-.$$

Будем говорить, что модель M конечно слабо о-минимальна, если формула $x = x$ конечно слабо о-минимальна в M.

Отметим, если M конечно слабо о-минимальна, тогда для любой модели N такой что $N \equiv M$, N является также конечно слабо о-минимальной. Таким образом, слабо о-минимальная теория T *конечно слабо о-минимальна*, если для некоторой $M \models T$, M конечно о-минимальна. Каждая о-минимальная теория является конечно о-минимальной из-за формул $\{\phi_1(x,y) = x<y,\ \phi_2(x,y) = y<x\}$.

Обозначим в языке L^* для любой конечно слабо о-минимальной теории T следующее предложение:

$$\mathbf{Ax}(\mathbf{DP}) = \forall\, x \Big(\neg\, P^1(x) \to \bigvee_{i<n} \exists\, \bar{y}_i\, [\bar{y}_i \in P \wedge$$

$$\wedge \forall\, z\, ([x<z<\phi_i(N,\bar{y}_i)^+ \to \neg\, P^1(z)] \vee [\phi_i'(N,\bar{y}_i)^- < z < x \to \neg\, P^1(z)])]\Big).$$

$$T^* := T_1^* \cup \{\mathbf{Ax}(\mathbf{DP})\}.$$

Из утверждения 3 следует, что любая модель T^* является CD-ω-насыщенной парой и, по $\mathbf{Ax}(\mathbf{DP})$, 1-консервативной парой. Когда T о-минимальна, T^* есть теория, введенная А. Пиллаем [27, с. 1406], и в этом случае H_ϕ^1, H_ϕ^2 являются графиками монотонных функций f_i, g_j. А. Пиллай доказал, что для о-минимальной теории, имеющей плотный линейный порядок, при условии совместности T^* ее полнота.

Пусть T — теория с линейным порядком, N — достаточно большая насыщенная модель для T, $A \subset N$, $p,q \in S_1(A)$. Мы говорим [2, 3], тип p *не почти ортогонален* q, ($p \not\perp^a q$), если существует $L(A)$-формула $\phi(x,y)$, такая что $\forall\, \alpha \in p(N), \exists\, \beta_1, \beta_2 \in q(N)$, что верно $\beta_1 < \phi(N,\alpha) < \beta_2, \emptyset \neq \phi(N,\alpha) \subset q(N)$. В случае иррационального q это условие можно ослабить до «$\phi(N,\alpha) \subset q(N)$».

Мы будем говорить, что множество $A \subset N \models T$ слабо о-минимальной теории T *почти о-минимально*, если для любого $p,q \in S_1(A)$ имеем

$$q \not\perp^w p \Longleftrightarrow q \not\perp^a p.$$

Скажем, слабо о-минимальная теория *почти о-минимальна*, если любое ее множество почти о-минимально. Из факта 1 следует, что любая о-минимальная теория почти о-минимальна.

Чтобы доказать совпадение класса 1-консервативных пар моделей и класса консервативных пар для любой о-минимальной теории T, Д. Маркер и Ч. Стейнхорн [24] показали, что для любых $M \prec N \models T, \forall\, \bar{\alpha} \in N \setminus M$, ht-определимого над M, $\forall\, q \in S_1(M \cup \bar{\alpha})$ верно:

> (*) Если q неопределим, то существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-2-формула $H(x,y)$ такая, что $C(H(x,y), \Theta(y), q(x))$.

Мы будем говорить, что полная теория T есть *MS-теория*, если T удовлетворяет (*) для любых $M \prec N \models T$.

Лемма 1. *Любая (M, M') 1-консервативная пара почти о-минимальной MS-теории является консервативной парой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Леммы 1). Пусть N — достаточно большая насыщенная модель теории T, такая что $M \prec M' \prec N$. Предположим, существует неопределимый тип, реализуемый в M'. Выберем такой тип с минимальной длиной кортежа. Рассмотрим $\bar{\alpha}, \beta \in M' \setminus M$, такие что $q := tp\,(\beta|M \cup \bar{\alpha})$ иррационален, $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ определим, а

$tp\,(\beta\bar{\alpha}|M)$ неопределим. Тогда q неопределим и, следовательно, по теореме 1 существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $H(x,\bar{y},\bar{\alpha})$ и $\Theta(\bar{y},\bar{\alpha})$, такие что $C(H,\Theta,q)$. Тогда в силу того, что T является MS-теорией, существуют $L(M \cup \bar{\alpha})$-2-формулы $H_1(x,y,\bar{\alpha})$ и $\Theta_1(y,\bar{\alpha})$, такие что $C(H_1,\Theta_1,q)$. Используя факт 11, мы можем полагать, что $\Theta_1(y)$ есть M-формула. Далее мы будем полагать, что $\Theta = \Theta_1,\ H = H_1$.

Для любой выпуклой формулы $\phi(x,\bar{\alpha}) \in q$ определим $(M \cup \bar{\alpha})$-1-формулу

$$K_\phi(y,\bar{\alpha}) := \exists\, x_1 \exists\, x_2 (\Theta(y) \wedge H(x_1,y,\bar{\alpha}) \wedge \neg\, H(x_2,y,\bar{\alpha}) \wedge \phi(x_1,\bar{\alpha}) \wedge \phi(x_2,\bar{\alpha})).$$

Тогда $C(H,K_\phi,q)$. Рассмотрим следующее множество $(M \cup \bar{\alpha})$-1-формул

$$\Gamma(y,\bar{\alpha}) := \{K_\phi(y) | \phi \in q, \phi \text{ выпуклая формула }\}.$$

Так как для конечного множества формул $\phi_i \in q$, имеем $\wedge_i \phi_i \in q$ и

$$N \models \forall\, y (K_{\wedge_i \phi_i}(y) \to \wedge_i K_{\phi_i}(y)),$$

$\Gamma(y,\bar{\alpha})$ — совместное множество формул так же как и $\Gamma_0(y,\bar{\alpha})$, его замыкание относительно конечных конъюнкций. $\Gamma_0(y,\bar{\alpha})$ удовлетворяет следующему условию:

Для всех $\Psi \in \Gamma_0(y,\bar{\alpha})$ верно

$$(*)\ \exists b \in M,\ N \models \Psi(b).$$

Из определения $\Gamma(y,\bar{\alpha})$ следует, что для любого $\gamma \in \Gamma_0(N,\bar{\alpha})$, формульное множество $H(N,\gamma,\bar{\alpha})$ делит $q(N)$. Тогда, так как $\Gamma_0(y,\bar{\alpha})$ совместно и замкнуто относительно конечных конъюнкций, существует конечно выполнимый в M (по $(*)$ [6, Fact 46] 1-тип $r \in S_1(M \cup \bar{\alpha}), \Gamma_0 \subset r$, такой что $r \not\perp^w q$. Из факта 8(iii) следует, что r неопределим. Пусть $\gamma \in r(N)$ произвольная реализация r. Обозначим $r_0 := tp\,(\gamma|M)$. Покажем, что r_0 иррационален. Предположим, r_0 квазирационален, скажем, вправо. Так как r конечно выполним в M , для любой $L(M \cup \bar{\alpha})$-формулы $\varphi(x)$, такой что $\varphi(N) \subset r_0(N)$ или, что эквивалентно, $\varphi(N) \cap M = \emptyset$, имеем $\gamma \notin \varphi(N)$ или, что эквивалентно, $\varphi(x) \notin r$. Рассмотрим, $QV_{r_0}(\bar{\alpha}) := \{\delta \in r_0(N) |$ существует $L(M \cup \bar{\alpha})$-формула $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(N) \subset r_0(N)\}$. Отметим, если $\varphi(N) \subset r_0(N)$, то $\psi(N) \subset r_0(N)$ для $\psi(x) := \varphi(N)^- < x < U_{r_0}(N)^+$.

Таким образом, $QV_{r_0}(\bar{\alpha})^+ = r_0(N)^+$, и для нашего γ имеем $\gamma < QV_{r_0}(\bar{\alpha})$. Это означает $LC(y < x, y = y, r(x))$ и $\neg\, RC(y < x, y = y, r(x))$. Тогда по предложению 1 r определим. Противоречие. Таким образом, r_0 иррационален и по факту 7(i) неопределим. Так как $\bar{\alpha}$ является ht-определимым над M, по факту 8(ii) $\bar{\alpha}\ \perp^w\ r_0$. Таким образом, имеем $r(N) = r_0(N)$.

Вспомним, $q \not\perp^w r$ и T почти о-минимальная теория. Тогда $q \not\perp^a r_0$, и, следовательно, существует $(M \cup \bar{\alpha}\beta)$-формула $H(x)$, такая что $\emptyset \neq H(N) \subset r(N) = r_0(N)$.

Так как $M' \prec N, \bar{\alpha}, \beta \in M'$, $\exists\, \gamma' \in H(M')$. Это противоречит тому, что (M, M') — 1-консервативная пара моделей, потому что мы получили, что $tp\,(\gamma'|M) = r_0$ неопределим. □

Утверждение 4. *Пусть T конечно слабо о-минимальная, почти о-минимальная MS-теория. Тогда следующее верно:*

(i) *T^* — совместное множество формул.*

(ii) *Пусть (M, N) пара моделей T.*
Тогда $(M, N) \models T^*$, если и только если (M, N) является CD-ω-насыщенной консервативной парой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 4). (i) Из утверждения 3 следует, что каждая CD-ω-насыщенная консервативная пара является моделью для T^*. Существование CD-ω-насыщенной консервативной пары следует из следствия 5(ii).

(ii) Пусть (M, N) есть модель для T^*. Тогда по $\mathbf{Ax(DP)}$, так как T конечно слабо о-минимальная теория, (M, N) является 1-консервативной парой. По лемме 1, (M, N) — консервативная пара. Тогда из утверждения 3 следует, что (M, N) есть (CD)-ω-насыщенная консервативная пара. □

Вспомним, что обогащение модели слабо о-минимальной теории выпуклым одноместным предикатом является моделью слабо о-минимальной теории [6]. В примерах 1 мы представляем слабо о-минимальные теории вышеупомянутых подклассов, некоторые из них будут получены как обогащения выпуклыми предикатами, и мы будем использовать их слабо о-минимальность без специального упоминания. Фактически мы будем использовать ее слабую версию, теорему об обогащении о-минимальной модели выпуклым одноместным предикатом [1, 30].

Примеры 1. (i) Пусть $M_1 := \langle \mathbb{Q}; =, < \rangle$ счетная модель теории плотного порядка без концевых элементов, $M_1^* := \langle \mathbb{Q}; =, <, P^1 \rangle$ произвольное слабо о-минимальное обогащение выпуклым одноместным предикатом P^1. Тогда M_1^* имеет почти о-минимальную, конечно слабо о-минимальную теорию.

(ii) Пусть M_2 — абелева делимая упорядоченная группа с двумя архимедовыми классами и M_2^* — обогащение M_2 одноместным выпуклым предикатом, такое что множество всех реализаций этого предиката есть малый архимедов класс.
Тогда M_2^* конечно слабо о-минимальная модель.

(iii) Пусть M_1 модель из (i), M_3 произвольная о-минимальная модель в языке L. Положим $M_3^* := (M_3 \times M_1; L^*)$, $L^* := L \cup \{\epsilon^2\}$ так, что отношение порядка « $<$ » $\in L^*$ есть отношение лексикографического порядка на M_3^* и другие предикаты из L определяются следующим способом:

Для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n) \in M_3 \times M_1$ следующее верно:

$[M_3^* \models \epsilon^2((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \iff M_3 \models a_1 = a_2]$ и для любого $P^n \in L \setminus \{<\}$,

$[M_3^* \models P^n((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \iff M_3 \models P^n(a_1, \ldots, a_n)]$.

Тогда M_3^* конечно слабо о-минимальна, почти о-минимальна.

(iv) Пусть $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ множество всех вещественных чисел, $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел, $M_4 := \langle \mathbb{Q};\ =, <, + \rangle \prec R := \langle \mathbb{R}; =, <, + \rangle$ делимые архимедовы группы, $\gamma := \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $M_4^* := \langle \mathbb{Q};\ =, <, +, P^1 \rangle$ такие, что

$$\forall\, a \in \mathbb{Q}\, [M_4^* \models P^1(a) \iff \mathbb{R} \models a < \sqrt{2}].$$

Тогда M_4^* не почти о-минимальна и не конечно слабо о-минимальна.

Объяснение примеров 1. (i) Так как теория M_1^* допускает элиминацию кванторов, его теория конечно слабо о-минимальна, и поэтому два различных 1-типа над любым множеством модели элементарной теории M_1^* ортогональны. Эта теория почти о-минимальна.

(ii) Заметим, что малый архимедов класс определяет формульную подгруппу в M_2^*, и каждый класс смежности по этой подгруппе есть выпуклое множество без максимального и минимального элементов. Каждый квазирациональный нерациональный 1-тип определяется $L^*(M)$-1-формулой. Граница (левая или правая) любой $L^*(M)$-1-формулы — либо элемент M, либо граница (левая или правая, внутренняя или внешняя) таких классов. Это означает, что эта модель конечно слабо о-минимальна.

(iii) Фиксируем конечное множество параметров $\bar{\alpha} := \langle \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{i,j} \dots \rangle$ таких, что $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+1} < \alpha_{i+1,1}$ и $M_3^* \models \epsilon(\alpha_{i,j}, \alpha_{k,s})$, если и только если $i = k$. Используя автоморфизмы M_3^*, мы можем понять, что для любого $\alpha_{i,1}$ существует только конечное множество различных $L(\bar{\alpha})$-формул в этом ϵ-классе, т. е. для любой $L^*(\bar{\alpha})$-1-формулы $\phi(x, \bar{\alpha})$, $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \epsilon(x, \alpha_{i,1})$ эквивалентна формуле следующего вида:

$$(\epsilon(x, \alpha_{i,1}) \wedge x < \alpha_{i,s}) \vee \bigvee_{n,j} (\alpha_{i,n} < x < \alpha_{i,j}) \vee \bigvee_{k} (x = \alpha_{i,k}) \vee (\epsilon(x, \alpha_{i,1}) \wedge \alpha_{i,r} < x). \tag{1}$$

Утверждение 5. *Пусть $\{\beta_{i,0}, \beta_{i,1}, \dots\}$ — конечное множество параметров, такое что $M_3^* \models \epsilon(\alpha_{i,1}, \beta_{i,j}) \wedge (\beta_{i,0} < \alpha_{i,1} < \beta_{i,1} < \dots < \alpha_{i,j} < \beta_{i,j} < \dots)$. Тогда для любой $L^*(\alpha)$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ верно:*

(i) $\exists\, y(\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \wedge H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})) \equiv \bigvee_j (H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \vee H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \vee H(\beta_{i,0}, \bar{z}, \bar{\alpha})$,

(ii) $\forall\, y(\epsilon(y, \alpha_{i,1}) \to H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})) \equiv \bigwedge_j (H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \wedge H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \wedge H(\beta_{i,0}, \bar{z}, \bar{\alpha})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 5). Заметим, что по (1), для любого $\gamma \in M_3^*$, если $\alpha_{i,j} < \gamma < \alpha_{i,j+1}$, то $tp\,(\gamma | \bar{\alpha}) = tp\,(\beta_{i,j} | \bar{\alpha})$. □

Для любой $L^*(\alpha)$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ обозначим

$$\forall^b y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) := \forall\, y\, [\bigwedge_i \neg\, \epsilon(y, \alpha_{i,1}) \to H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})];$$
$$\exists^b y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) := \exists\, y\, [\bigwedge_i \neg\, \epsilon(y, \alpha_{i,1}) \wedge H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})].$$

Тогда, из-за утверждения 5 и потому, что $y = y \equiv \bigvee_i \epsilon(y, \alpha_{i,1}) \vee \bigwedge_i \neg\, \epsilon(y, \alpha_{i,1})$, для любой $L^*(\bar{\alpha})$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ имеем

$$\forall\, y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \bigwedge_i \bigwedge_j (H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \wedge H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \wedge \forall^b y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}), \tag{2}$$
$$\exists\, y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \bigvee_i \bigvee_j (H(\beta_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha}) \vee H(\alpha_{i,j}, \bar{z}, \bar{\alpha})) \vee \exists^b y\, H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}). \tag{3}$$

Утверждение 6. *Для любой $L(\bar{\alpha})$-формулы $H(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ существуют $L(\bar{\alpha})$-формулы $H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha}), H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ такие, что в записи формул H_1, H_2 не присутствуют соответственно формулы вида $\epsilon(y, \alpha_{i,j})$, $\forall^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \forall^b y H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ и $\exists^b y H(y, \bar{z}, \bar{\alpha}) \equiv \exists^b y H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Утверждения 6). Для получения H_1 необходимо преобразовать H в пренексную конъюнктивную нормальную форму H_1', а для получения H_2 необходимо преобразовать H в пренексную дизъюнктивную нормальную форму H_2'. Затем преобразуем эти формулы внесением $\bigvee_i \epsilon(y, \alpha_{i,1})$ и $\bigwedge_i \neg\, \epsilon(y, \alpha_{i,1})$ в бескванторные части формул H_1' and H_2', соответственно. Тогда после обычных элементарных преобразований формул мы получим результат. Мы будем называть формулы $\forall^b y H_1(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$, $\exists^b y H_2(y, \bar{z}, \bar{\alpha})$ *ограниченными по* y и их кванторы *ограниченными кванторами.* $\square$

Пусть $\phi(x, \bar{\alpha})$ произвольная $L^*(\bar{\alpha})$-1-формула. Имеем

$$\phi(x, \bar{\alpha}) \equiv \bigvee_i (\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \wedge \epsilon(x, \alpha_{i,1})) \vee (\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\, \epsilon(x, \alpha_{i,1}).$$

По (1), верно:

$$\begin{aligned} &\bigvee_i (\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \epsilon(x, \bar{\alpha}_{i,1})) \quad \text{эквивалентна дизъюнкции выпуклых формул,} \\ &\text{и максимальное число выпуклых формул в такой дизъюнкции} \\ &\text{прямо зависит от} \quad l(\bar{\alpha}). \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\beta \in M_3^*$ такая, что $M_3^* \models \bigwedge_i \neg\, \epsilon(\alpha_{i,1}, \beta)$. Тогда для любого $\gamma \in M_3^*$, такого что $M_3^* \models \epsilon(\gamma, \beta)$, существует $\bar{\alpha}$-автоморфизм f модели M_3^*, такой что $f(\gamma) = \beta$, $f(\alpha_i) = \alpha_i$. Это означает, что $tp\,(\gamma|\bar{\alpha}) = tp\,(\beta|\bar{\alpha})$ и множество реализаций формулы $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\, \epsilon(x, \alpha_{i,1})$ есть объединение некоторых ϵ-классов. Применяя (2), (3) и утверждение 6 к пренексной форме $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\, \epsilon(x, \alpha_{i,1})$, получаем $L^*(\bar{\alpha}\bar{\beta})$-формулу $H(x, \bar{\alpha}\bar{\beta})$, имеющую только ограниченные кванторы (*ограниченная формула*). Обозначим $\bar{\alpha}' := \langle \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{i,1}, \ldots \rangle$. Можно выбирать ограниченную $L(\bar{\alpha}')$-формулу $H'(x, \bar{\alpha}')$ так, чтобы $H(x, \bar{\alpha}\bar{\beta}) \equiv H'(x, \bar{\alpha}')$. Для этого мы удалим из каждой конъюнкции дизъюнктивной нормальной формы H формулы вида $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,j+m}(\beta_{i,j+m})$ или удалим конечную конъюнкцию в случае, когда одна из следующих формул $\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j+m}(\beta_{i,s})$, $\alpha_{i,j+m} < \alpha_{i,j}(\beta_{i,j})$ представлена как член этой конъюнкции. Тогда, принимая во внимание, что каждая $P^n \in L \setminus \{<\}$ устойчива на ϵ-классах, удалим все параметры за исключением параметров вида $\alpha_{i,1}$. Если мы заменим в написании формулы $H'(x, \bar{\alpha}')$ параметры $\alpha_{i,1} = (a_{i,1}, b_{i,1})$ на $a_{i,1}$, ограниченные кванторы на стандартные и опустим формулы $\bigwedge_i \neg\, \epsilon(x, \alpha_{i,1})$, мы получим $L(\bar{a}')$-формулу $K_\phi(x, \bar{a}')$ такую, что

$$\forall\, \alpha = (a, b) \in M_3^*\, [M_3^* \models \phi(\alpha, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\, \epsilon(\alpha, \alpha_{i,1}) \Longleftrightarrow M_3 \models K_\phi(a, \bar{a}')].$$

Тогда $\phi(x, \bar{\alpha}) \wedge \bigwedge_i \neg\, \epsilon(x, \alpha_{i,1})$ является конечной дизъюнкцией выпуклых формул, и число этих выпуклых формул равно числу выпуклых формул формулы K_ϕ. Это число зависит только от вида L-формулы $K_\phi(x, \bar{z})$ в о-минимальной теории. Это означает, по (4) и факту 5, что M_3^* есть модель слабо о-минимальной теории.

Для любого $\alpha \in M_3^*$, $\epsilon(x, \alpha)$ является конечно слабо о-минимальной, и любой неизолированный 1-тип над M_3^*, содержащий формулу $\epsilon(x, \alpha)$ для некоторого $\alpha \in M_3^*$, слабо ортогонален любому другому 1-типу над M_3^*. Любой квазирациональный тип $p \in S_1(M_3^*)$ такой, что $\{\neg\, \epsilon(x, \alpha) | \alpha \in M_3^*\} \subset p$ определяет внешнюю границу (левую или правую) ϵ-класса. Это означает конечно слабую о-минимальность M_3^*.

Любой (иррациональный) тип $p \in S_1(M_3^*)$, такой что $\{\neg\, \epsilon(x, \alpha) | \alpha \in M_3^*\} \subset p$, определяется соответствующим 1-типом над о-минимальной моделью $p_0 \in S_1(M_3)$, и если p

не слабо ортогонален некоторому $r \in S_1(M_3^*)$, то по факту 9, существует монотонная $L(M_3^*)$-2-формула $K(x,y)$, такая что для любого $\gamma \in p(N)(M_3^* \prec N)$, $K(N,\gamma)$ расщепляет $r(N)$. Так как любой 1-тип, содержащий $\epsilon(x,\gamma)$, слабо ортогонален всем другим 1-типам, $K(x,y)$ удовлетворяет следующему условию:

$$M_3^* \models \forall xy\,[K(x,y) \to \forall\, x'y'((\epsilon(x,x') \to K(x,y)) \wedge (\epsilon(y,y') \to K(x,y')))]. \qquad (*)$$

Можно показать, что в качестве формулы $K(x,y)$, обеспечивающей неортогональность p' и r', можно выбрать $L(M_3)$-формульную функцию (мы оставляем это читателю). Это означает, что p и r не почти ортогональны и, следовательно, теория модели M_3^* почти о-минимальна.

(iv) Обозначим $L := \{=,<,+\}$, $L^* := L\cup\{P^1\}$. Индукцией по построению L^*-формул мы докажем, как в [1,4,6,22], что для любой $L^*(M_4)$-n-формулы $\phi(\bar{x})$ существует $L(M_4)$-$n+1$-формула $K_\phi(\bar{x},z)$ такая, что верно

$$\forall\,\bar{a} \in M_4\,[M_4^* \models \phi(\bar{a}) \Longleftrightarrow \mathbb{R} \models K_\phi(\bar{a},\gamma)]. \qquad (**)_\phi$$

Покажем это.

Базисный шаг индукции. Для любой $L(M_4)$-n-формулы $\phi(\bar{x})$ положим $K_\phi(\bar{x}) := \phi(\bar{x})$. Для $P^1(x)$ положим $K_P(x,z) := x < z$.

Проверка индукции по построению формулы сводится к рассмотрению случая введения квантора. Таким образом, предположим $\phi(y,\bar{x})$ есть $L^*(M_4^*)$-формула, такая что существует $L(M_4)$-формула $K_\phi(y,\bar{x},z)$, такая что

$$\forall\,\bar{a},b \in M_4[M_4^* \models \phi(b,\bar{a}) \Longleftrightarrow R \models K_\phi(b,\bar{a},\gamma)].$$

Обозначим $H_\phi(\bar{x},z,z_1,z_2) := \exists\,y[z \in (z_1,z_2) \wedge \phi(y,\bar{x},z) \wedge \forall\,t(t \in (z_1,z_2) \to \phi(y,\bar{x},t))]$.

$$K_{\exists\,y\phi(y,\bar{x})}(\bar{x},z) := \exists\,z_1 \exists\,z_2 H_\phi(\bar{x},z,z_1,z_2).$$

2-формула $H(x,y)$ называется *выпуклой вправо от* y [2,3], если

$$\models \forall\,y \forall\,x[H(x,y) \to y < x \wedge \forall\,x'(y < x' < x \to H(x',y))],$$

и *выпуклой влево от* y, если

$$\models \forall\,y \forall\,x[H(x,y) \to y < x \wedge \forall\,x'(y < x' < x \to H(x',y))].$$

В частности, для любой формульной функции f, такой что $\models \forall\,y(f(y) > y)$, 2-формула $H_f(x,y) := y < x < f(y)$ выпукла вправо от y. Вспомним [21, Lemma 2.7, Proposition 2.8], что каждый иррациональный 1-тип над упорядоченной делимой архимедовой группой M одиночный (uniquely realizable) и для любой реализации $\gamma \in p(N)$ $(M \prec N)$ иррационального одиночного 1-типа $p \in S_1(M)$, для любой вправо от y, $L(M)$-2-формулы $H(x,y)$, если $N \models \exists\,xH(x,\gamma)$, то

$$H(N,\gamma) \cap M \neq \emptyset. \qquad (***)$$

Последнее верно и для выпуклой влево 2-формулы.

Покажем, что $\exists\, y\phi(y,\bar{x})$ и $K_{\exists\, y\phi(y,\bar{x})}(\bar{x},z)$ удовлетворяют $(**)$. Пусть $\bar{a}\in M_4$. Предположим $R\models K_{\exists\, y\phi(y,\bar{x})}(\bar{a},\gamma)$. Тогда, так как $\exists\, z_1 H_\phi(\bar{a},z,z_1,z_2)$ выпуклая вправо от z, по $(***)$ существует $c_2\in M_4$, такой что $\mathbb{R}\models\exists\, z_1 H_\phi(\bar{a},\gamma,z_1,c_2)$. Тогда, так как $H_\phi(\bar{a},z,z_1,c_2)$ выпукла влево от z, по $(***)$ существует $c_1\in M_4$, такой что $\mathbb{R}\models H_\phi(\bar{a},\gamma,c_1,c_2)$ и, следовательно, $\mathbb{R}\models\exists\, y\forall t[t\in(c_1,c_2)\to\phi(y,\bar{a},t)]$. Так как $M_4\prec\mathbb{R}$, $M_4\models\exists\, y\forall\, t[(t\in(c_1,c_2)\to$ $\to\phi(y,\bar{a},t)]$. Таким образом, существует $b\in M_4$, $M_4\models\forall\, t(t\in(c_1,c_2)\to\phi(b,\bar{a},t)$. Тогда, так как $M_4\prec\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\models\forall\, t(t\in(c_1,c_2)\to\phi(b,\bar{a},t)$. Таким образом, так как $\gamma\in(c_1,c_2)$, имеем $\mathbb{R}\models\phi(b,\bar{a},\gamma)$.

Теперь предположим, $\exists\, b\in M_4,\mathbb{R}\models\phi(b,\bar{a},\gamma)$. Тогда $\phi(b,\bar{a},z)\in tp\,(\gamma|M_4)$. Отсюда, так как этот 1-тип иррационален, по факту 7 или [24, Lemma 2.3] существуют $c_1,c_2\in M_4$, такие что

$$M_4\models\forall\, t(t\in(c_1,c_2)\to\phi(b,\bar{a},t)).$$

Это означает, что $\mathbb{R}\models K_{\exists\, y\phi(y,\bar{x},z)}(\bar{a},\gamma)$.

Обозначим $q:=tp\,(\gamma|M_4)$. Тогда по определению M_4^* существуют расширения q к 1-типам над M_4^* в языке L^*, $q':=q\cup\{P^1(x)\}$, $q'':=q\cup\{\neg\, P^1(x)\}$. Для любого иррационального 1-типа $p\in S_1(M_4)$ обозначим $C_p:=\{c\in M_4|c<x\in p\}, D_p:=\{d\in M_4|x<d\}$. Из доказательства утверждения 10 из [4] и $(**)$ следует, что для любого $p\in S_1(M_4)$, C_p формулен в M_4^* (и, следовательно, D_p формулен в M_4^*), если и только если $p\not\perp^a q$. Пусть $\beta\in\mathbb{R}$ неалгебраическое вещественное число, $\alpha:=\sqrt{2}+\beta$, $p:=tp\,(\beta|M_4)$, $r:=tp\,(\alpha|M_4)$. Тогда $p\perp^w q$, $r\perp^w q$, $p\perp^w$ и, следовательно, $p':=tp^*(\beta|M_4^*)$, $r':=tp^*(\alpha|M_4^*)$ являются иррациональными 1-типами над M_4^* (здесь tp^* означает тип в языке L^*). Заметим, что $p'\not\perp^w r'$. В самом деле, $(L^*(M_4^*)\cup\{\beta\})$-формула $H(x,\beta):=\exists\, y(P^1(y)\wedge x=\beta+y)$ расщепляет $r'(N^*)$ ($M_4^*\prec N^*$, N^* достаточно большое насыщенное элементарное расширение M_4^*). Покажем, что $p'\perp^a r'$. Предположим, существует $L^*(M_4^*\cup\{\beta\})$-формула $S(x,\beta)$, такая что $\emptyset\neq S(N^*,\beta)\subset r'(N^*)$. Тогда для $L^*(M\cup\{\beta\})$-1-формулы $\Theta(y,\beta):=$ $\exists\, x(S(x,\beta)\wedge y+\beta=x)$ имеем $\emptyset\neq\Theta(N^*,\beta)\subset q(N)=q'(N^*)\cup q''(N^*)$. Это означает, что $p'\not\perp^w q'$ или $p'\not\perp^w q''$. Противоречие, так как p' иррационален, а q',q'' квазирациональны (Факт 10). Таким образом, M_4^* не почти о-минимальна.

Покажем, что M_4 не конечно слабо о-минимальна. Рассмотрим семейство иррациональных типов над M_4, $\{q_n:=tp\,(n\beta|M_4)|0<n<\omega\}$. Для любого $0<n<\omega$, $q_n\not\perp^a q$ и, следовательно, существуют два квазирациональных 1-типа q'_n,q''_n в языке L^*, расширяющие q_n. В самом деле, q'_n,q''_n определяются L^*-1-формулами $U_n(x):=\exists\, y(P^1(y)\wedge$ $\wedge\, x=\ y+\ldots+y)$. Так как $\forall\, a\in M_4, n\beta\neq\beta+a$, индукцией по построению L^*-формул получаем, что семейство $U_n(x)$ и отрицаний $U_n, n<\omega$ не равномерно представлено. $\square$

§ 4. Одно наблюдение

Пусть $A\subset B$. Скажем, что B является *антиконсервативным расширением* A, если $\forall\,\bar{\alpha}\in B\setminus A$, для любого определимого 1-типа $r\in S_1(A)$, $\bar{\alpha}\perp^w r$. Пару моделей (M,N) назовем *антиконсервативной парой*, если N есть антиконсервативное расширение. Из факта 1 следует, что в о-минимальной теории пара (M,N) является антиконсервативной, если и только если для любого кортежа $\bar{\alpha}\in N\setminus M$, $tp\,(\bar{\alpha}|M)$ неопределим.

Пусть (M, N) — пара моделей о-минимальной теории и N' — промежуточная модель ($M \prec N' \prec N$), такая что (N', N) есть консервативная пара, а (M, N') является антиконсервативной парой. Байсалов – Пуаза показали для любой пары моделей о-минимальной теории существование промежуточной модели N' с упомянутыми свойствами. Они спрашивали [33, с. 574]: «Верно ли , что такая N' единственна с точностью до M-изоморфизма?»

Замечание 10. Существуют четыре модели M, N_1, N_2, N о-минимальной теории, такие что $M \prec N_1 \prec N$; $M \prec N_2 \prec N$; (N_1, N), (N_2, N) — консервативные пары, пары $(M, N_1), (M, N_2)$ — антиконсервативные пары и N_1, N_2 не являются M-изоморфными ($N_1 \ncong_M N_2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Замечания 10). Пусть $M = \langle \mathbb{Q}; =, < \rangle$, $N_1 = \langle \mathbb{R}; =, < \rangle$, где $\mathbb{Q}$ есть множество всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ есть множество всех вещественных чисел. Пусть $N = \langle N; =, < \rangle$ есть $|\mathbb{R}|^+$-насыщенное элементарное расширение N_1. Возьмем произвольное нерациональное число $\delta \in \mathbb{R}$. Элемент δ определяет иррациональное сечение (C_δ, D_δ) в $\emptyset$ и иррациональный 1-тип p_δ над $\mathbb{Q}$. Положим $N_2 := \langle \mathbb{R} \cup p_\delta(N); =, < \rangle$. Мы не будем различать модель и ее основное множество, т. е. для нас $M = \mathbb{Q}$, $N_1 = \mathbb{R}$, $N_2 = \mathbb{R} \cup p_\delta(N)$.

Теория этих моделей $\{M, N_1, N_2, N\}$ есть хорошо известная ω-категоричная, о-минимальная теория, которая допускает элиминацию кванторов. Так как $\mathbb{R}$ не имеет иррационального сечения, каждый неизолированный 1-тип над $\mathbb{R}$ рационален и, следовательно, $\forall \alpha \in N \setminus \mathbb{R}$, α принадлежит множеству реализаций некоторого рационального сечения в $\mathbb{R}$. Это же верно для любого элемента из $N \setminus (\mathbb{R} \cup p_\delta(N))$. Это означает, согласно теореме Маркера – Стейнхорна (или прямо следует из природы этих моделей), что (N_1, N), (N_2, N) — консервативные пары. Заметим, что $\forall \beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup p_\delta(N)$, $tp\,(\beta|\mathbb{Q})$ неопределим, так как он определяется иррациональным сечением в $\mathbb{Q}$.

Возьмем $\bar{\beta} := \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle$, произвольный кортеж элементов из $N_1 \setminus \mathbb{Q}$ или из $N_2 \setminus \mathbb{Q}$. Тогда, так как в данной теории алгебраическое замыкание любого множества C равно C, $acl(\mathbb{Q} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}) = \mathbb{Q} \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Таким образом, в силу факта 1, для любого $r \in S_1(\mathbb{Q})$ верно

$$\bar{\beta} \not\perp^w r \iff \exists j \in \{1, \ldots, n\}, \beta_j \in r(N).$$

Предположим $r \in S_1(\mathbb{Q})$ определим и, следовательно, в силу факта 7 и о-минимальности N, r рационален. Так как для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$, $tp\,(\beta_j|\mathbb{Q})$ иррационален, $\bar{\beta} \perp^w r$. Это означает, что $(M, N_i), i = 1, 2$ антиконсервативные пары. Из определения моделей N_1 и N_2 следует, что они не являются M-изоморфными. □

Список литературы

1. *Байжанов Б. С.* Обогащение о-минимальной модели унарными выпуклыми предикатами // Исследования в теории алгебраических систем. Караганда: Карагандинский гос. ун-т, 1995. С. 3–23.

2. *Байжанов Б. С.* Пары моделей и свойство NBAM // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. Алматы: Гылым, 1995. P. 81–89.

3. *Baizhanov B. S.* One-types in weakly o-minimal theories // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. Алматы: Гылым, 1996. P. 77–90.

4. *Baizhanov B. S.* Classification of one-types in weakly o-minimal theories and its corollaries, preprint, 1996.

5. *Baizhanov B. S.* Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory II. Новосибирск: НГТУ, 1999, P. 3–28.

6. *Baizhanov B. S.* Expansions of a model of a weakly o-minimal theory by family of convex unary predicates // J. of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. P. 1382–1414.

7. *Байжанов Б. С.* Определимость 1-типов в слабо о-минимальных теориях // Мат. труды. 2005. Т. 8, № 2. С. 3–38.

8. *Baizhanov B. S., Baldwin J. T.* Local Homogeneity // J. of Symbolic Logic. 2004. Vol. 69. P. 1243–1260.

9. *Baldwin J. T.* Fundamentals of Stability Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1988.

10. *Baldwin J. T., Benedikt M.* Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. Vol. 352. P. 4937–4969.

11. *Ben-Yaacov I., Pilaly A., Vassiliev E.* Lovely pairs of models, preprint, 2002.

12. *Bouscaren E.* Dimensional order property and pairs of models // Annals of Pure and Applied Logic. 1989. Vol. 41. P. 205–231.

13. *Buechler S.* Pseudo-proective strongly minimal sets are locally projective // J. of Symbolic Logic. 1991. Vol. 56. P 1184–1194.

14. *Casanova E., Ziegler M.* Stable theories with a new predicate // J. of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66. P. 1127–1140.

15. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

16. *Гончаров С. С.* Тотально трансцендентная разрешимая теория без конструктивизируемых однородных моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 2. С. 137–149.

17. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

18. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1979.

19. *Hodges W.* A Shorter Model Theory. Cambridge University Press. 1997.

20. *Knight J., Pillay A., Steinhorn Ch.* Definable sets in ordered structures II // Transactions of The American Mathematical Society. 1986. Vol. 295. P. 593–605.

21. *Lascovski M., Steinhorn Ch.* On o-minimal expansions of archimedian ordered groups // J. of Symbolic Logic. 1995. Vol. 60. P. 817–831.

22. *Macpherson D., Marker D., Steinhorn Ch.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. 2000. Vol. 352. P. 5435–5483.

23. *Marker D.* Omitting types in o-minimal theories // J. of Symbolic Logic. 1986. Vol. 51. P. 63–74.

24. *Marker D., Steinhorn Ch.* Definable types in o-minimal theories // J. of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59. P. 185–198.

25. *Mayer L.* Vaught's conjecture for o-minimal theories // J. of Symbolic Logic. 1988. Vol. 53. P. 146–159.

26. *Paliutin E. A.* Number of models in complete varieties // Logic, Methodology and Philosophy of Sciences. Amsterdam: North-Holland, 1980. Vol. VI. P. 203–217.

27. *Pillay A.* Definability of types, and pairs of o-minimal structures // J. of Symbolic Logic. 1994. Vol. 59. P. 1400–1409.

28. *Pillay A., Steinhorn Ch.* Definable sets in ordered structures I // Transactions of The American Mathematical Society. 1986. Vol. 295. P. 565–592.

29. *Pillay A., Steinhorn Ch.* Definable sets in ordered structures III // Transactions of The American Mathematical Society. 1988. Vol. 300. P. 469–476.

30. *B. Poizat* Pairs de structure stables // J. of Symbolic Logic. 1983. Vol. 48. P. 239–249.

31. *Shelah S.* Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories // J. of Symbolic Logic. 1972. Vol. 37. P. 107–113.

32. *Shelah S.* Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. Amsterdam: North-Holland, 1978.

33. *Baisalov Y., Poizat B.* Paires de structures o-minimales // J. of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63. P. 570–578.

Материал поступил в редколлегию 30.04.2003

Адрес автора
БАЙЖАНОВ Бектур Сембиулы
КАЗАХСТАН, 050010, г. Алматы
ул. Пушкина, 125
Институт проблем информатики и управления
Министерства образования и науки РК
тел.: +7-327-291-57-64; +7-701-481-67-12
e-mail: baizhanov@ipic.kz; baizhanov@hotmail.com