УДК 51: 101.8

В. М. Резников

Институт философии и права СО РАН
ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: rvm@philosophy.nsc.ru

ФИЛОСОФСКИЙ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАРТИНГАЛОВ И ИГРОВЫХ МАРТИНГАЛОВ [*]

Показана значимость мартингалов и игровых мартингалов для философии науки, чистой и прикладной стохастической математики. Исследованы подходы к построению предсказаний на основе игровых мартингалов. Игровые мартингалы обеспечивают построение предсказаний, с учетом всех известных законов теории вероятностей. Эффективность предсказаний на основе мартингалов демонстрируется на игре Предсказателя против коалиции Реальности и Скептика, в которой Предсказатель не проигрывает.

Ключевые слова: мартингал, игровой мартингал, оценочный мартингал, принцип Курно, теорема закона больших чисел, предсказание.

Настоящая работа является продолжением ранее выполненных исследований, посвященных анализу значимости мартингалов в философии науки, чистой и прикладной стохастической математике [Резников, 2008; 2010], наибольшее внимание уделено возможности предсказаний на основе мартингалов.

Значимость неигровых мартингалов

В теории вероятностей под мартингалом понимают последовательность малозависимых случайных величин. Формально последовательность случайных величин Y_1, Y_2, …, называется мартингалом, если условное математическое ожидание Y_{n+1}, где в качестве условия берется последовательность: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ равна значению Y_n:

$$E(Y_{n+1}/Y_1, Y_2, .., Y_n) = Y_{n.} \qquad (1)$$

Для теории вероятностей развитие мартингалов имеет многообразную значимость. Во-первых, доказательство всех известных фундаментальных теорем для случайных величин, связанных мартингальной зависимостью, и прежде доказанных для независимых случайных величин, является обобщением и развитием фундаментальных теорем для слабозависимых случайных величин. Во-вторых, мартингалы явились фундаментом для развития современной теории случайных процессов, разработанной Дж. Дубом [1956].

В-третьих, развитие теории мартингалов оказало сильное влияние на критику частотной концепции Р. Мизеса. Обычно концепция Мизеса критикуется с помощью следующих аргументов. Математики критикуют концепцию за то, что она представлена в неаксиоматической форме. Определение вероятности является предельным, и вероятность неопределена для конечного числа испытаний. В наибольшей степени оказали влияние на создание теории мартингалов работы Д. Вилли, до самого последнего времени известного только специалистам

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-07-00560а) и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН № 47.

в области стохастической математики [Villii, 1939. P. 55–63] [1]. До работ Вилли самая сильная критика концепции Мизеса связана с неконструктивным характером описаний последовательностей, для которых определяются вероятности. Несмотря на усилия математиков А. Вальда, А. Н. Колмогорова, А.Черча, методологов Г. Рейхенбаха, К. Поппера и многих других, все предложенные ими способы выделения последовательностей приводили к несимметричным описаниям. Например, для двузначных последовательностей, моделируемых на основе единицы и нуля, всегда оказывалось единиц больше, чем нулей. Очевидно, что эти подходы не являются адекватными, так как выбираемые последовательности данных предназначены для моделирования случайности, используемой в азартной игре, и по Мизесу в честной азартной игре любой игрок не должен выиграть, поэтому выборки данных не должны обнаруживать закономерностей и быть примерно равновероятными.

Однако Вилли обнаружил более сильный недостаток теории Мизеса. В тридцатые годы прошлого столетия теория Мизеса являлась главным претендентом на роль работающей стохастической математики. В таком случае теория должна была обеспечить представление всех известных законов теории вероятностей. Для обоснования представимости всех известных законов теории вероятностей, т. е. утверждений, осуществляющихся с единичной вероятностью, необходимо обосновать, что используемые способы отбрасывания множеств меры нуль гарантируют отбраковку всех таких множеств.

Однако, как показал Вилли, известные способы выбора элементов не могут обеспечить отбрасывание всех множеств меры нуль. Если говорить более строго, то было показано, что при любом известном способе формирования коллективов, по крайней мере, одно множество меры нуль не будет отброшено [Ibid.]. В действительности достаточно абстрактный результат Вилли о принципиальной непредставимости всех законов теории вероятностей на основе коллективов был полностью подтвержден. Оказалось, что в концепции Мизеса на основе коллективов не имеет место закон повторного логарифма. Согласно этому закону теории вероятностей колебание частот вокруг теоретической вероятности происходит в области, в которой сходимость частот к вероятности является двухсторонней, как со стороны значений меньших предельной вероятности, так и со стороны больших значений. Однако при всех способах формирования подпоследовательностей наблюдалась исключительно односторонняя сходимость частот к вероятности. Как писал основатель современной теории случайных процессов Дж. Дуб, подход Вилли обеспечивает исключение всех последовательностей, имеющих нулевые вероятности, в то время как критерии, используемые А. Коплэндом, К. Поппером, Г. Рейхенбахом, Е. Торнером, А. Вальдом, могли обеспечить только исключение некоторых видов последовательностей меры нуль.

В-четвертых, мартингалы часто встречаются в практике азартных игр.

Пример 1. При бросании правильной монеты игрок получает один доллар, если выпадает герб, и он теряет один доллар, если выпадает решка. Пусть X_n – выигрыш игрока после n бросков правильной монеты. Тогда X_n является мартингалом. Проверим выполнимость формулы (1). Исходя из определения математического ожидания, имеем

$$EX_{n+1} = (X_n + 1) \cdot 0{,}5 + (X_n - 1) \cdot 0{,}5 = X_n.$$

В литературе эта система называется д'Аламберовой системой игры.

Пример 2. В отличие от прошлого примера производится n бросаний неправильной монеты. В остальном правила игры совпадают. X_n – это выигрыш игрока после n бросаний монеты. $X_{n+1} = X_n + 1$, если выпадает герб, и $X_{n+1} = X_n - 1$, если выпадает решка. Тогда $Y_n = (q/p)^{X_n}$ является мартингалом относительно $\{X_n,\ n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\}$. Здесь p – вероятность выпадения герба, $q = 1 - p$ – вероятность выпадения решки. Проверим выполнение требования к мартингалам. Имеем

$$EY_{n+1} = (Y_n + 1) \cdot p + (Y_n - 1) \cdot q =$$
$$= (q/p)^{X_n} (q/p) \cdot p + (q/p)^{X_n} \big/ (q/p) \cdot q =$$
$$= (q/p)^{X_n} \cdot (q + p) = (q/p)^{X_n} = Y_n.$$

[1] Перевод на английский и введение Гленн Шафер, 2005 // The Game-Theoretic Probability and Finance Project. URL: http://www.probabilityandfinance.com/

Описанная система игры известна под названием системы де Муавра.

Третий пример в комбинаторике получил название урны Полиа. В урне первоначально находятся r красных и b голубых мраморных шариков. Случайно вытаскивается шарик из урны, и какого бы цвета он не был, он возвращается в урну вместе с дополнительным шариком того же цвета. Пусть X_n – число красных шариков после n этапов игры. Переменная Y_n определяется следующим образом $Y_n = X_n / (n + r + b)$. Проверим, является ли Y_n мартингалом.

$$EY_{n+1} = Y_{n+1} \cdot p(Y_{n+1}) =$$
$$= (X_n + 1) / (n + r + b + 1) \times$$
$$\times (X_n) / (n + r + b) + (X_n) /$$
$$/ (n + r + b + 1) \cdot (n + r + b - X_n) /$$
$$/ (n + r + b) = X_n(1 + n + r + b) /$$
$$/ (1 + n + r + b) \cdot (n + r + b) =$$
$$= X_n / (n + r + b) = Y_n.$$

Четвертый пример важен для установления связи мартингалов с критериями стандартной математической статистики. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – случайные величины, описывающие исходные данные. Известно, что эти величины подчиняются плотности распределения f или плотности распределения g. Если данные скорее распределены в соответствии с плотностью f, чем с плотностью g, то отношение правдоподобия

$$Y_n = \prod g(X_i) / f(X_i),\ i = 1, k$$

при $n = 1, 2, \ldots$ является мартингалом. Отношение правдоподобия, важнейший инструмент для проверки гипотез в статистической теории Неймана-Пирсона, оказывается неигровым мартингалом. Используя отношение правдоподобия, Вилли установил связь неигровых мартингалов с игровыми мартингалами [2].

Математики полагают, что мартингалы были известны всегда, но благодаря Вилли они стали разработанной теорией, давшей импульс развитию теории случайных процессов Дуба, новой игровой вероятностной математики Г. Шафера и В. Вовка, нашедшей широкие применения в финансовой математике, в концепции обучения(Matching learning), и других.

[2] *Shafer G.* Game-Theoretic Probability and Its Uses, Especially Defensive Forecasting // The Game-Theoretic Probability and Finance Project. Working paper is No. 22. URL: http://www.probabilityandfinance.com/

Игровые мартингалы

Последовательность функций $K_0, K_1, \ldots$ называется игровым мартингалом, если выполняются следующие условия:

$K_0 = \alpha$,

$K_n = K_{n-1} + s_n \times$

$\times (y_n - P(Y_n = 1 / Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_{n-1} = y_{n-1}))$.

Функции K_i, описывают изменение капитала в игре, K_0 – это первоначальный капитал, Y_i – случайные величины, принимающие в простейшем случае значения единица и ноль, y_i значения, которые принимают случайные величины Y_i, s_n – ставка для n-го хода игры.

Для того чтобы в игровой концепции использовались принципы и методы проверки гипотез, разработанные в стандартной статистической теории, необходимо осуществить игровую интерпретацию этих принципов. В стандартной статистической теории исследуемая гипотеза фальсифицируется, если при условии ее правильности происходит событие, имеющее малую вероятность. Это так называемый принцип А. Курно в сильной форме, запрещающий маловероятные события и имеющий статус моста, связывающего стохастическую математику и реальность.

Значимость игровых мартингалов

Во-первых, к методологическим достижениям игровой теории относится создание Вилли игрового аналога принципа Курно, выполняющего функцию критерия отбрасывания гипотез в игровой концепции теории вероятностей. Финансовая игровая интерпретация принципа Курно заключается в невозможности многократного выигрыша в безрисковой игре.

Во-вторых, концепция мартингалов, в границах ее применимости является независимой от используемой вероятностной интерпретации, так как понятие вероятности в концепции игровых мартингалов является вторичным, оно вводится на основе понятия цены игры [Shafer, Vovk, 2001].

В-третьих, все фундаментальные теоремы в классической теории вероятностей верны с точностью до множеств меры нуль, однако в случае игровых мартингалов фундаментальные теоремы являются категорическими утверждениями, верными и для множеств нулевой меры. Частично в большей общности игровых мартингалов легко убедиться с помощью выведения игрового мартингала путем несложных преобразований описания неигрового мартингала [Резников, 2010].

В-четвертых, доказательства на основе игровых мартингалов имеют универсальный характер. Один из универсальных подходов основан на оценочном мартингале. Последовательность функций K_0, K_1, … является оценочным мартингалом, если она является мартингалом, $K_0 = 1$ и функция K_n всегда является неотрицательной.

Доказательство теорем теории вероятностей с помощью игрового подхода реализуется с помощью игроков. Среди игроков выделяются ключевые игроки и вспомогательные фигуры. К ключевым игрокам относится теоретик, проверяющий правильность созданной им теории посредством столкновения ее с действительностью. Теоретик может функционировать под другим именем, например, Предсказателя. Его функция заключается в получении предсказания и его проверки. Другим ключевым игроком является Реальность, именно Реальность определяет итоговый результат. Иногда вводится третий игрок. Это Скептик, он выполняет некоторые функции теоретика. Скептик пытается опровергнуть предложенную теоретиком теорию. Если Скептик в результате игры становится многократно богаче, или тем более становится бесконечно богатым, при этом не рискуя основным капиталом, то это обстоятельство является решающим аргументом несовершенства теории.

Унификационная схема доказательства различных теорем теории вероятностей с использованием мартингалов предполагает обоснование, что используемый мартингал является оценочным. Некоторые элементы унификационного подхода рассмотрим на примере доказательств теорем строгого закона больших чисел и слабого закона больших чисел.

Для доказательства строгого закона больших чисел Вилли использовал следующий протокол игры [3]. (В этом протоколе Предсказатель, задав моделируемую постоянную вероятность с помощью параметра p, напрямую не участвует в игре.)

$K_0 = 1$. Скептик делает ставку s_n. Ставка – это число купленных билетов, если число купленных билетов положительное, то это означает, что Скептик верит, что Реальность объявит $Y = 1$. Стоимость билета равна вероятности того, что Реальность объявит текущий результат положительным. Если число билетов отрицательное, то Скептик рассчитывает, что Реальность примет $Y = 0$. Реальность объявляет, что y_n принадлежит множеству вещественных чисел $\{0, 1\}$. Изменение капитала задается следующей формулой:

$$K_n = K_{n-1} + s_n(y_n - p). \qquad (2)$$

На основе этого протокола необходимо доказать классический закон больших чисел:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left(r_n/n = p\right)\right) = 1. \qquad (3)$$

Для того чтобы доказать теорему, Вилли использует следующий мартингал:

$$K_n\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \\ = r_n!\left(n - r_n\right)!/\left(n+1\right)!\,p^{-r_n}q^{-(n-r_n)}. \qquad (4)$$

Здесь n – объем выборки, r_n – число единиц, $n - r_n$ – число нулей, $y_i = 0$ или 1,

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (5)$$

Подход Вилли не является ни чисто мартингальным, ни чисто вероятностным, он сочетает мартингальные и вероятностные свойства данных. В этом подходе мартингал это правдоподобие: отношение двух вероятностных функций. В данном случае это отношение функции $r_n!\left(n-r_n\right)!/\left(n+1\right)!$ к функции $p^{r_n}q^{(n-r_n)}$, поэтому выражение (4) является мартингалом. Легко получить, что (4) является оценочным ограниченным мартингалом. Отсюда, решая неравенство

$$r_n!\left(n-r_n\right)!/\left(n+1\right)!\,p^{-r_n}q^{-(n-r_n)} < C,$$

где С – константа, с помощью формулы Стирлинга для факториалов получим искомую формулу (3).

С помощью совершенно аналогичного подхода на основе мартингала

[3] *Shafer G.* Game-Theoretic Probability and Its Uses, Especially Defensive Forecasting // The Game-Theoretic Probability and Finance Project. Working paper is No. 22, 2007. URL: http://www.probabilityandfinance.com/

$$K_n = 1 + 1\Big/ N\left(S_n^2 - \sum\left(y_i - p_i\right)^2\right)$$

получается доказательство теоремы слабого закона больших чисел [4].

У Вилли это доказательство также основано на сочетании вероятностных и мартингальных свойств. В работе Шафера и Вовка [Shafer, Vovk, 2001] даны чисто мартингальные доказательства всех известных фундаментальных теорем. Другой общий подход в игровой теории вероятностей к доказательству фундаментальных теорем теории связан методом вынуждения. Для специалиста в области философии математики интерес представляют не технические детали, а принципиальные идеи доказательств. Рассмотрим идеи доказательства слабой теоремы закона больших чисел методом вынуждения [5].

В простейшем варианте теоремы это игра Скептика и Реальности. Протокол игры имеет следующий характер.

$K_0 = 1$. Для $n = 1, 2, \ldots$ Скептик объявляет, что M_n принадлежит области вещественных чисел. Реальность объявляет, что x_n принадлежит двухэлементному множеству, состоящему из нулей и единиц. Изменение капитала задано следующим выражением:

$$K_n = K_{n-1} + M_n x_n.$$

Здесь описана игра двух игроков по угадыванию результата бросания монеты. Ход каждого игрока тут же делается известным сопернику, K_0 – это первоначальный капитал Скептика, M_n – число купленных билетов Скептиком, x_n – результат игры, объявленный реальностью. Скептик выиграет в одном из трех случаев:

1) K_n всегда неотрицательно;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = 1$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} 1\Big/ n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1/2$.

Третье условие представляет собой теорему закона больших чисел в слабой форме.

Предположим, что Скептик делает ставку на герб, при этом на каждом шаге он выделяет определенную пропорцию денег ε на появление герба. Реальность, чтобы воспрепятствовать обогащению Скептика, устанавливает среднее число выпадений герба после n экспериментов, равное

$$1\Big/ n\sum_{i=1}^{n} x_i\,,$$

меньшим или равным ε. Делая бесконечное число ставок на появление герба, Скептик вынуждает Реальность делать усредненную асимптотическую частоту гербов не больше чем ε. Повторяя рассуждения для ставки на решку, Скептик вынуждает Реальность установить среднюю частоту появления гербов равной одной второй. Таким образом, вероятностные законы, в том числе закон больших чисел в слабой форме, появляются вследствие формализации правильной открытой безрисковой игры, где большие или бесконечные выигрыши невозможны.

Популярность игровой вероятностной концепции в большой степени связана с интенсивно развивающимся направлением под названием «защита предсказания». В этом направлении разрабатываются стратегии, позволяющие не только получить предсказание, но и обосновать корректность полученного предсказания. Обычно хорошему предсказанию предшествует корректная калибровка. В простейшей игре Предсказателя и Реальности первый игрок осуществляет корректную калибровку, если его ходы практически неотличимы от ходов Реальности. В более сложной игре наряду с этими двумя игроками участвует еще и Скептик. Он пытается опровергнуть теорию Предсказателя и стать богатым. Способен ли Предсказатель победить, если Реальность играет на стороне Скептика? Известный математик Филипп Давид полагал, что в этом случае у Предсказателя нет шансов на успех. Он привел следующий пример, демонстрирующий фиаско Предсказателя, когда Реальность кооперируется со Скептиком [Dawid, 1985]. Протокол игры этого примера имеет следующий вид.

Для $n = 1, 2, \ldots$ Предсказатель объявляет результат p_n, принадлежащий замкнутому интервалу [0, 1]. Скептик объявляет результат s_n, являющийся вещественным числом. Реальность объявляет, что истинным результатом y_n будет число 0 или 1. Выигрыш Скептика определяется выражением $s_n(y_n - p_n)$.

Выигрышная стратегия, по Давиду, для Реальности и Скептика такова:

---

[4] *Shafer G.* Game-Theoretic Probability and Its Uses, Especially Defensive Forecasting // The Game-Theoretic Probability and Finance Project. Working paper is No. 22, 2007. URL: http://www.probabilityandfinance.com/

[5] Ibid.

$y_n = \{1, \text{если } p_n < 0{,}5; 0, \text{если } p_n \geq 0{,}5\}$,
$s_n = \{1, \text{если } p_n < 0{,}5; -1, \text{если } p_n \geq 0{,}5\}$.
В этом случае выигрыш Скептика всегда больше или равен 0,5. Однако в случае непрерывной стратегии Скептика Предсказатель не проигрывает. В работе «Defensive forecasting» [6] показано, что в случае непрерывной стратегии Скептика (его ставка является непрерывным отображением S_n замкнутого отрезка [0, 1] на множество вещественных чисел), Предсказатель при правильной стратегии игры добивается, того, что накопленный капитал Скептика является монотонной убывающей функцией:

$$K_0 \geq K_1 \geq K_2, \ldots$$

Идея доказательства. Если S_n всегда положительно, то Предсказатель назначает $p_n = 1$, если S_n всегда отрицательно, то Предсказатель назначает $p_n = 0$, для этих ситуаций Скептик в лучшем случае не теряет капитал. Во всех других ситуациях Предсказатель выбирает p_n такое, что $S_n(p_n) = 0$. Рассмотрение игр более общего характера, в которых Предсказатель способен защитить сделанное предсказание против коалиции Реальности и Скептика, требует проведения отдельного исследования на основе достаточно сложного аппарата теории обучения (Matching Learning). В ранее опубликованных работах [Резников, 2008; 2010] показано, что мартингалы являются теоретическим аппаратом стохастической математики и представляют широкий интерес для философии науки. Теория мартингалов представляет возможности для философов-аналитиков по моделированию интеллектуальных игр, в которых игроки на основе результатов наблюдений получают аппарат для конструирования предсказаний, проверки их правильности и защиты. Кроме того, мартингалы представляют интерес для философии науки с точки зрения взаимоотношения прикладных и теоретических подходов в стохастической математике. Начиная с восьмидесятых годов и вплоть до появления мартингалов, происходило доминирование прикладных направлений. Решение подавляющего числа проблем в практике научных исследований на основе прикладных методов является естественным, так как запросы прикладных областей опережают возможности теоретической науки. Однако решение задач теоретическими методами, в частности на основе мартингалов, которые широко используются, особенно в экономике, имеет бесспорное преимущество, связанное с пониманием и объяснением изучаемых положений дел [Shafer, Vovk, 2001].

[6] *Vovk V., Takemura A., Shafer G.* Defensive Forecasting // The Game-Theoretic Probability and Finance Project. Working paper is No. 8, 2005. URL: http://www.probabilityandfinance.com/

Список литературы

Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 607 с.

Резников В. М. Методологические игровые аспекты в статистических концепциях // Философия науки. 2008. № 1 (36). С. 102–114.

Резников В. М. Философский и методологический анализ адекватности мартингалов // Философия науки. 2010. № 1 (44). С. 4–11.

Dawid P. Self-Calibrating Priors Do not Exist: Comment // Journal of the American Statistical Association. 1985. No. 80. P. 340–341.

Shafer G., Vovk V. Probability and Finance It Is only a Game! N. Y.: Wiley-Interscience, 2001. 414 p.

Villii J. Etude critique de la collectif. P., 1939.

Материал поступил в редколлегию 23.06.2011

V. M. Reznikov

PHILOSOPHICAL AND METHODOLOGICAL ANALYSIS OF MARTINGALES AND GAME-THEORETIC MARTINGALES

The paper demonstrates the value of martingales, game martingales for the philosophy of science, pure and applied stochastic mathematics. It studies approaches to the creation of forecasts by means of game martingales. Game martingales provide for generation of prognoses taking into account all known laws of the probability theory. Efficiency of prognoses is demonstrated by the example of the Forecaster game against the coalition of Reality and Skeptic in which the Forecaster doesn't lose.

Keywords: martingale, game-theoretic martingale, scoring martingale, Cournot's principle, the law of large numbers theorem, forecasting.