ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том V, 2005 г. Выпуск 2. С. 86–105

УДК 517.95

Коэрцитивные свойства обыкновенного дифференциального оператора четного порядка

А. В. Чуешев

Основной вопрос, который мы исследуем в этой работе — вопрос об условиях, при выполнении которых оператор

$$L_0(t)u = \sum_{i=0}^{2m} a_i(t)u^{(i)}(t), \quad t \in (0,1), \tag{1}$$

где $u^{(i)} - i$-я производная функции u по t, удовлетворяет условию: найдутся постоянные $\delta_0 > 0, \delta_1$ такие, что

$$(-1)^m Re(L_0 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} \geq \delta_0 \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} - \delta_1 \left\| uu \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)}, \tag{H}$$

для любой функции $u \in \mathbf{W}_2^{2m}(0,1)$, для которой выполняются краевые условия достаточно общего вида. Для этого вначале установлены некоторые необходимые и достаточные условия того, что обыкновенный дифференциальный оператор вида (1) удовлетворял условию (H). Доказано, что если известен набор краевых условий порядков меньших, чем m или больших, чем m, то можно построить краевые условия порядков больших, чем m и меньших, чем m, соответственно так, чтобы выполнялись эти необходимые и достаточные условия. Установлены необходимые и достаточные условия при которых обыкновенный дифференциальный оператор вида (1), удовлетворяет условию (H). Приведены примеры краевых условий, при которых обыкновенный дифференциальный оператор вида (1), удовлетворяет условию (H).

Некоторые примеры простейших краевых условий, при которых обыкновенный дифференциальный оператор является коэрцитивным, приведены в работах [1, 2, 4, 6]. В данной работе рассмотрены обыкновенный дифференциальный оператор и краевые условия более общего вида.

§ 1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$L_0u = \sum_{i=0}^{2m} a_i(t)u^{(i)}(t), \quad t \in (0,1), \tag{1.1}$$

где $u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ – i-я производная функции u по t.

Как обычно, под $\mathbf{L}_p(0,1)$ понимаем пространство измеримых функций, определенных на $(0,1)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathbf{L}_p(0,1)} = \left(\int_0^1 |u(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \ (1 \le p < \infty),$$

$$\|u\|_{\mathbf{L}_\infty(0,1)} = \operatorname*{vraimax}_{t\in(0,1)} |u(t)|.$$

Пространство $\mathbf{W}_p^k(0,1)$ состоит из функций $u \in \mathbf{L}_p(0,1)$, имеющих обобщенные производные по переменой t до порядка k включительно, которые принадлежат пространству $\mathbf{L}_p(0,1)$.

Лемма 1.1. *Пусть $u \in \mathbf{W}_2^{2m}(0,1)$ и $a_i \in \mathbf{W}_\infty^{\max(0,i-1)}(0,1)$, $i = 0,1,\dots,2m$. Для любого $p = 1,2,\dots,m$ справедливо представление*

$$L_0u = \frac{\partial^p}{\partial t^p}L_pu + \widetilde{L}_pu,$$

где $L_pu = \sum\limits_{j=0}^{2m-p} b_{p,j}u^{(j)}$, $\widetilde{L}_pu = \sum\limits_{j=0}^{p-1} \widetilde{a}_{p,j}u^{(j)}$; причем коэффициенты $b_{p,j}$ определяются единственным образом и могут быть найдены по формуле

$$b_{p,j} = \sum_{s=0}^{2m-p-j} a_{p+j+s}^{(s)}(-1)^s C_{p+s-1}^{p-1}, \quad j = 0,1,\dots,2m-p, \tag{1.2}$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m $(n \ge m)$.

Следствие 1.1. *Для $u \in \mathbf{W}_2^{2m}(0,1), v \in \mathbf{W}_2^m(0,1)$ имеем*

$$2Re(L_0u,v)_{\mathbf{L}_2(0,1)} =$$
$$= 2ReL_1u\overline{v}|_0^1 - 2ReL_2u\overline{v^{(1)}}|_0^1 + \ldots + (-1)^{m-1}2ReL_mu\overline{v^{(m-1)}}|_0^1 + (-1)^m 2Re(L_mu, v^{(m)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} +$$
$$+ (-1)^{m-1}2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_mu, v^{(m-1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} + \ldots - 2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_2u, v^{(1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} + 2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_1u, v)_{\mathbf{L}_2(0,1)},$$

где $L_pu = \sum\limits_{j=0}^{2m-p} b_{p,j}u^{(j)}$, $\widetilde{\widetilde{L}}_pu = \widetilde{\widetilde{a}}_pu$, $p = 1,2,\dots,m$. Здесь $b_{p,j}, \widetilde{\widetilde{a}}_p$ — некоторые постоянные, зависящие от $a_i, i = 0,1,\dots,2m$.

Замечание 1.1. Зная оператор L_p для некоторого $p = 1,2,\dots,m$ и соответственно постоянные $b_{p,j}, j = 0,1,\dots,2m-p$, мы можем однозначно определить $a_i, i = p,\dots,2m$, при этом $a_{2m} = b_{\xi+1,2m-1-\xi}$ для любого $\xi = 0,1,\dots,m-1$.

§ 2. Коэрцитивные свойства обыкновенного дифференциального оператора четного порядка

В этом параграфе докажем необходимые и достаточные условия типа коэрцитивности для обыкновенного дифференциального оператора четного порядка.

Пусть $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ и краевые условия имеют вид

$$l_{i1}u = u^{(p_i)}(1) - \sum_{\mu=0}^{p_i-1} \alpha_{p_i,\mu} u^{(\mu)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.1}$$

$$l_{j0}u = u^{(q_j)}(0) - \sum_{\mu=0}^{q_j-1} \beta_{(0,1)_j,\mu} u^{(\mu)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.2}$$

Здесь $\alpha_{p_i,\mu}, \beta_{q_j,\mu}$ — произвольные постоянные;

$$2m-1 \geq p_{m-1} > \ldots > p_0 \geq 0, \quad 2m-1 \geq q_{m-1} > \ldots > q_0 \geq 0.$$

Представим краевые условия (2.1) в матричном виде. Аналогичные рассуждения проводятся в случае краевых условий (2.2). Без ограничения общности можно считать, что краевые условия нормированы [3], то есть для любого $i = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\alpha_{p_i,\mu} = 0, \tag{2.3}$$

если $\mu = p_j$ для некоторого $j = 0, 1, \ldots, i-1$. Разобьем краевые условия на две группы. Найдем $z \in \mathbb{N}$ такое, что $2m-1 \geq p_{m-1} > \ldots > p_z \geq m > p_{z-1} > \ldots > p_0 \geq 0$. Для $i = z, \ldots, m-1$ имеем

$$u^{(p_i)}(1) = \sum_{\mu=0}^{p_i-1} \alpha_{p_i,\mu} u^{(\mu)}(1) = \sum_{\mu=m}^{p_i-1} \alpha_{p_i,\mu} u^{(\mu)}(1) + \sum_{\mu=0}^{m-1} \alpha_{p_i,\mu} u^{(\mu)}(1) =$$
$$= \sum_{d=0}^{p_i-m-1} \alpha_{p_i,m+d} u^{(m+d)}(1) + \sum_{\mu=0}^{m-1} \alpha_{p_i,\mu} u^{(\mu)}(1). \tag{2.4}$$

Зафиксируем ξ — произвольное произвольное целое число из интервала $[0, m-1]$. Если $m + \xi \neq (0,1)p_j$ для любого $j = z, \ldots, m-1$, то положим $\alpha_{m+\xi,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \ldots, m+\xi-1; \alpha_{m+\xi,m+\xi} = 1$. Если $m + \xi = p_j$ для некоторого $\alpha_{m+\zeta,m+\xi} = 0$ для любого $\zeta = \xi, \ldots, m-1$. Если $\xi = p_{j_0}$ для некоторого $j_0 = 0, 1, \ldots, z-1$, то положим $\alpha_{m+\zeta_0,\xi} = 0$ для любого $\zeta_0 = 0, 1, \ldots, m-1$. Обозначим

$$P(1) = \begin{pmatrix} \alpha_{m,m} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{m+1,m} & \alpha_{m+1,m+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_{m+2,m} & \alpha_{m+2,m+1} & \alpha_{m+2,m+2} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2m-2,m} & \alpha_{2m-2,m+1} & \alpha_{2m-2,m+2} & \ldots & \alpha_{2m-2,2m-2} & 0 \\ \alpha_{2m-1,m} & \alpha_{2m-1,m+1} & \alpha_{2m-1,m+2} & \ldots & \alpha_{2m-1,2m-2} & \alpha_{2m-1,2m-1} \end{pmatrix};$$

$$P_0(1) = \begin{pmatrix} \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,m-2} & \alpha_{m,m-1} \\ \alpha_{m+1,0} & \alpha_{m+1,1} & \alpha_{m+1,2} & \dots & \alpha_{m+1,m-2} & \alpha_{m+1,m-1} \\ \alpha_{m+2,0} & \alpha_{m+2,1} & \alpha_{m+2,2} & \dots & \alpha_{m+2,m-2} & \alpha_{m+2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2m-2,0} & \alpha_{2m-2,1} & \alpha_{2m-2,2} & \dots & \alpha_{2m-2,m-2} & \alpha_{2m-2,m-1} \\ \alpha_{2m-1,0} & \alpha_{2m-1,1} & \alpha_{2m-1,2} & \dots & \alpha_{2m-1,m-2} & \alpha_{2m-1,m-1} \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{u_2}(t) = \begin{pmatrix} u^{(m)}(t) \\ u^{(m+1)}(t) \\ u^{(m+2)}(t) \\ \dots \\ u^{(2m-2)}(t) \\ u^{(2m-1)}(t) \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{u_1}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u^{(1)}(t) \\ u^{(2)}(t) \\ \dots \\ u^{(m-2)}(t) \\ u^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (2.4) можем переписать в виде

$$\overrightarrow{u_2}(1) = P(1)\overrightarrow{u_2}(1) + P_0(1)\overrightarrow{u_1}(1), \tag{2.5}$$

где на диагонали матрицы $P(1)$ стоят нули и единицы.

Рассмотрим краевые условия (2.1) при $i = 0, 1, \dots, z-1$. Зафиксируем ξ – произвольное целое число из интервала $[0, m-1]$. Если $\xi \neq p_j$ для любого $j = 0, 1, \dots, z-1$, то положим $\alpha_{\xi,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \dots, \xi - 1; \alpha_{\xi,\xi} = 1$. Если $\xi = p_j$ для некоторого $j = 0, 1, \dots, z-1$, то, учтя (2.3), положим $\alpha_{\zeta,\xi} = 0$ для любого $\zeta = \xi, \dots, m-1$. Обозначим

$$P_1(1) = \begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m-2,0} & \alpha_{m-2,1} & \alpha_{m-2,2} & \dots & \alpha_{m-2,m-2} & 0 \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-1,2} & \dots & \alpha_{m-1,m-2} & \alpha_{m-1,m-1} \end{pmatrix}.$$

Краевые условия в этом случае можем переписать в виде

$$\overrightarrow{u_1}(1) = P_1(1)\overrightarrow{u_1}(1), \tag{2.6}$$

где на диагонали матрицы $P_1(1)$ стоят нули и единицы.

Определение 2.1. Оператор (1.1) удовлетворяет условию (H), если существуют постоянные $\delta_0 > 0, \delta_1$ такие, что

$$(-1)^m Re(L_0 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} \geq \delta_0 \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} - \delta_1 \left\| u \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)},$$

для любой функции $u \in \mathbf{W}^{2m}_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}(0,1)$.

Под пространством $\mathbf{W}^{2m}_{2,\{l_{i1},l_{j0}\}}(0,1)$ понимаем пространство функций $u \in \mathbf{L}_2(0,1)$, удовлетворяющих (2.1), (2.2) и имеющих обобщенные производные по переменной t до порядка $2m$ включительно. Имеем

$$P_1^*(1) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{0,0}} & \overline{\alpha_{1,0}} & \overline{\alpha_{2,0}} & \dots & \overline{\alpha_{m-2,0}} & \overline{\alpha_{m-1,0}} \\ 0 & \overline{\alpha_{1,1}} & \overline{\alpha_{2,1}} & \dots & \overline{\alpha_{m-2,1}} & \overline{\alpha_{m-1,1}} \\ 0 & 0 & \overline{\alpha_{2,2}} & \dots & \overline{\alpha_{m-2,2}} & \overline{\alpha_{m-1,2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \overline{\alpha_{m-2,m-2}} & \overline{\alpha_{m-1,m-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{\alpha_{m-1,m-1}} \end{pmatrix}.$$

Положим $B_0(t) =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^m b_{1,m} & (-1)^m b_{1,m+1} & \dots & (-1)^m b_{1,2m-2} & (-1)^m b_{1,2m-1} \\ (-1)^{m-1} b_{2,m} & (-1)^{m-1} b_{2,m+1} & \dots & (-1)^{m-1} b_{2,2m-2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m-1,m} & b_{m-1,m+1} & \dots & 0 & 0 \\ -b_{m,m} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для элементов $\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)$ матрицы $P_1^*(1)B_0(1)P(1)$ справедливо представление

$$\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1) = \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} \Big(\sum_{k=\xi}^{m-1-d} \overline{\alpha_{k,\xi}} b_{k+1,m+d}(1)(-1)^{k+m} \Big) \alpha_{m+d,m+\eta}$$

для $\xi = 0,1,\dots,m-1$, $\eta = 0,1,\dots,m-1-\xi$;

$$\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1) = 0$$

для $\xi = 1,2,\dots,m-1$, $\eta = m-\xi,\dots,m-1$. Заметим, что если $\xi_0 = p_k$ для некоторого $k = 0,1,\dots,z-1$ или η_0 такое, что $m+\eta_0 = p_d$ для некоторого $d = z,\dots,m-1$, то по построению $\widetilde{p}_{\xi_0,\eta_0}(1) = 0$. Имеем

$$\langle P_1^*(1)B_0(1)P(1)\overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle = \sum_{\xi=0}^{m-1}\sum_{\eta=0}^{m-1-\xi} \widetilde{p}_{\xi,\eta}(1) u^{(m+\eta)}(t)\overline{u^{(\xi)}}(t).$$

Мы определили матрицы $P(1), P_0(1), P_1(1), P_1^*(1), B_0(1)$, вектора $\overrightarrow{u_2}(1), \overrightarrow{u_1}(1)$ и элементы $\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)$ в случае краевых условий (2.1). Аналогично определяются матрицы $P(0)$, $P_1(0)$, $P_1(0)$, $P_1^*(0)$, $B_0(0)$, вектора $\overrightarrow{u_2}(0)$, $\overrightarrow{u_1}(0)$ и элементы $\widetilde{p}_{\xi,\eta}(0)$ в случае краевых условий (2.2), только вместо $\alpha_{i,j}$ будут стоять $\beta_{i,j}$.

Теорема 2.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ и $a_{2m} \geq \delta > 0$, где δ – некоторое число. Для того, чтобы оператор (1.1), $a_i \in \mathbf{W}_\infty^{\max(0,i-1)}(0,1)$, $i = 0,1,\dots,2m$ удовлетворял условию (H), необходимо и достаточно, чтобы*

$$P_1^*(1)B_0(1)P(1) = P_1^*(0,x)B_0(0)P(0) = 0. \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $u \in \mathbf{W}^{2m}_{2,\{l_{i0},l_{j1}\}}(0,1)$. Из следствия 1.1

$$(-1)^m 2Re(L_0u,u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} =$$
$$= (-1)^m 2ReL_1 u\overline{u}|_0^1 + (-1)^{m-1}2ReL_2 u\overline{u^{(1)}}|_0^1 + \ldots - 2ReL_m u\overline{u^{(m-1)}}|_0^1 +$$
$$+ 2Re(L_m u, u^{(m)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} - 2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_m u, u^{(m-1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} + \ldots + (-1)^{m-1}2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_2 u, u^{(1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} +$$
$$+ (-1)^m 2Re(\widetilde{\widetilde{L}}_1 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} = (-1)^m 2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{1,j}u^{(j)}\overline{u}|_0^1 +$$
$$+ (-1)^{m-1}2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{2,j}u^{(j)}\overline{u^{(1)}}|_0^1 + \ldots - 2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{m,j}u^{(j)}\overline{u^{(m-1)}}|_0^1 +$$
$$+ 2Re < B_0(t)\overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t) > |_0^1 + \int\limits_{(0,1)} 2b_{m,m}|u^{(m)}|^2\,dt + + 2Re\int\limits_{(0,1)}\sum_{j=0}^{m-1} b_{m,j}u^{(j)}\overline{u^{(m)}}\,dt -$$
$$- 2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_m u, u^{(m-1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} + \ldots + (-1)^{m-1}2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_2 u, u^{(1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} +$$
$$+ (-1)^m 2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_1 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)}. \tag{2.8}$$

Используя (2.5)–(2.7) имеем

$$2Re\langle B_0(t)\overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 =$$
$$= 2Re\langle B_0(t)P(t)\overrightarrow{u_2}(t), P_1(t)\overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 + 2Re\langle B_0(t)P_0(t)\overrightarrow{u_1}(t), P_1(t)\overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 =$$
$$= 2Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P(t)\overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 + 2Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P_0(t)\overrightarrow{u_1}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 =$$
$$= 2Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P_0(t)\overrightarrow{u_1}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1. \tag{2.9}$$

С помощью теоремы о следах [5] и интерполяционного неравенства [2] вида

$$\|u\|_{\mathbf{W}_2^s(0,1)} \le c(\gamma, s_1, s_2)\,\|u\|^{\gamma}_{\mathbf{W}_2^{s_1}(0,1)}\,\|u\|^{1-\gamma}_{\mathbf{W}_2^{s_2}(0,1)}, s_1\gamma + s_2(1-\gamma) = s, \tag{2.10}$$

где $c(\gamma, s_1, s_2)$ — некоторая постоянная, получим

$$(-1)^m 2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{1,j}u^{(j)}\overline{u}|_0^1 + (-1)^{m-1}2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{2,j}u^{(j)}\overline{u^{(1)}}|_0^1 + \ldots -$$
$$- 2Re\sum_{j=0}^{m-1} b_{m,j}u^{(j)}\overline{u^{(m-1)}}|_0^1 + 2Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P_0(t)\overrightarrow{u_1}(t), \overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 +$$
$$+ 2Re\int\limits_{(0,1)}\sum_{j=0}^{m-1} b_{m,j}u^{(j)}\overline{u^{(m)}}\,dt - 2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_m u, u^{(m-1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} + \ldots + (-1)^{m-1}2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_2 u, u^{(1)})_{\mathbf{L}_2(0,1)} +$$
$$+ (-1)^m 2Re(\widetilde{\widetilde{a}}_1 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} \ge -\varepsilon_0\left\|u^{(m)}\right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} - c(\varepsilon_0)\,\|u\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)}, \tag{2.11}$$

где ε_0 — произвольное положительное число. Так как $b_{m,m} = a_{2m}$ (см. замечание 1.1), то

$$\int\limits_{(0,1)} 2b_{m,m}|u^{(m)}|^2 dt \geq \int\limits_{(0,1)} 2\delta |u^{(m)}|^2 dt,$$

и из (2.8), (2.9), (2.11) подбирая ε_0 так, что $\delta - \varepsilon_0 \geq 0$, имеем

$$(-1)^m 2Re(L_0 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} \geq \delta \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} + (\delta - \varepsilon_0) \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} -$$
$$- c(\varepsilon_0) \left\| u \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} \geq 2 \geq (0,1) 2\delta_0 \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} - 2\delta_1 \left\| u \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)},$$

где $\delta_0 = \frac{1}{2}\delta$, $\delta_1 = \frac{1}{2}c(\varepsilon_0)$. Достаточность доказана.

Необходимость. Докажем $P_1^*(1)B_0(1)P(1) = 0$ равенство $P_1^*(0)B_0(0)P(0) = 0$ доказывается аналогично. Используя следствие 1.1, теоремы о следах [5], интерполяционное неравенство (2.10), можно доказать, что для некоторых фиксированных $\delta_0', \delta_1' > 0$ и для любой функции $u \in \mathbf{W}^{2m}_{2,\{l_{i0}, l_{j1}\}}(0,1)$

$$(-1)^m Re(L_0 u, u)_{\mathbf{L}_2(0,1)} \leq \delta_0' \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} + \delta_1' \left\| u \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} +$$
$$+ Re\langle P_1^*(t) B_0(t) P(t,x) \overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t) \rangle|_0^1.$$

Учитывая (Н), получаем

$$\begin{gathered}(\delta_0 - \delta_0') \left\| u^{(m)} \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} - (\delta_1 + \delta_1') \left\| u \right\|^2_{\mathbf{L}_2(0,1)} \leq \\ \leq Re\langle P_1^*(t) B_0(t) P(t,x) \overrightarrow{u_2}(t), \overrightarrow{u_1}(t) \rangle|_0^1,\end{gathered} \tag{2.12}$$

где нормы в левой части конечны.

Пусть произвольные целые ξ_0 от 0 до $m-1$ и η_0 от 0 до $m-1-\xi_0$ удовлетворяют условиям: $\xi_0 \neq p_k$ для любого $k = 0, 1, \ldots, z-1; m + \eta_0 \neq p_d$ для любого $d = z, \ldots, m-1$. Предположим, $\widetilde{p}_{\xi_0,\eta_0}(1) = r_0$ тождествено не равно нулю. Подберем специальным образом вектор $\overrightarrow{u_{1_0}}$ из (2.6), а вектор $\overrightarrow{u_{2_0}}$ из (2.5). Будем искать вектор $\overrightarrow{u_{1_0}}$ в виде

$$\overrightarrow{u_{1_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ u_0^{(\xi_0)} \\ u_0^{(\xi_0+1)} \\ \ldots \\ u_0^{(m-2)} \\ u_0^{(m-1)} \end{pmatrix},$$

где $u_0^{(\xi_0)} = r_0$. Подставляя $\overrightarrow{u_{1_0}}$ в (2.6) имеем

$$u_0^{(\xi_0)} = r_0,$$

$$u_0^{(\xi_0+1)} = \alpha_{\xi_0+1,\xi_0} r_0 + \alpha_{\xi_0+1,\xi_0+1} u_0^{(\xi_0+1)},$$
$$u_0^{(\xi_0+2)} = \alpha_{\xi_0+2,\xi_0} r_0 + \alpha_{\xi_0+2,\xi_0+1} u_0^{(\xi_0+1)} + \alpha_{\xi_0+2,\xi_0+2} u_0^{(\xi_0+2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_0^{(m-1)} = \alpha_{m-1,\xi_0} r_0 + \alpha_{m-1,\xi_0+1} u_0^{(\xi_0+1)} + \alpha_{m-1,\xi_0+2} u_0^{(\xi_0+2)} + \ldots + \alpha_{m-1,m-1} u_0^{(m-1)}.$$

Определим $u_0^{(\xi_0+1)}, u_0^{(\xi_0+2)}, \ldots, u_0^{(m-1)}$. Рассмотрим второе равенство. Если $\xi_0 + 1 \neq p_k$ для любого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то по построению $\alpha_{\xi_0+1,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \ldots, \xi_0$; $\alpha_{\xi_0+1,\xi_0+1} = 1$, и в этом случае положим $u_0^{(\xi_0+1)} = 0$. Если $\xi_0 + 1 = p_k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то по построению $\alpha_{\zeta,\xi_0+1} = 0$ для любого $\zeta = \xi_0+1, \ldots, m-1$ и $u_0^{(\xi_0+1)} = \alpha_{\xi_0+1,\xi_0} r_0$. Для третьего равенства, если $\xi_0+2 \neq p_k$ для любого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то аналогично положим $u_0^{(\xi_0+2)} = 0$. Если $\xi_0 + 2 = p_k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то $\alpha_{\zeta,\xi_0+2} = 0$ для любого $\zeta = \xi_0+2, \ldots, m-1$ и $u_0^{(\xi_0+2)} = \alpha_{\xi_0+2,\xi_0} r_0$ и т. д. Из последнего уравнения имеем, если $m - 1 \neq p_k$ для любого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то $u_0^{(m-1)} = 0$. Если $m - 1 = p_k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, z-1$, то $\alpha_{m-1,m-1} = 0$ и $u_0^{(m-1)} = \alpha_{m-1,\xi_0} r_0$.

Таким образом, вектор $\overrightarrow{u1_0}$ имеет вид

$$\overrightarrow{u1_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ r_0 \\ \alpha'_{\xi_0+1} \\ \ldots \\ \alpha'_{m-2} \\ \alpha'_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Для $j = \xi_0 + 1, \ldots, m-1$ величина α'_j равна 0 при $j \neq p_k$ для любого $k = 0, 1, \ldots, z-1$ и равна $\alpha_{j,\xi_0} r_0$ при $j = p_k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, z-1$. Построим вектор, удовлетворяющий (2.5), в виде

$$\overrightarrow{u2_0} = \begin{pmatrix} u_0^{(m)} \\ u_0^{(m+1)} \\ \ldots \\ u_0^{(m+\eta_0-1)} \\ u_0^{(m+\eta_0)} \\ u_0^{(m+\eta_0+1)} \\ \ldots \\ u_0^{(2m-1)} \end{pmatrix},$$

где $u_0^{(m+\eta_0)} = -n = r_{1n}$ ($|r_{1n}| \to \infty$ при $n \to \infty$). Должны выполняться следующие равенства:

$$u_0^{(m)} = \alpha_{m,m} u_0^{(m)} + \alpha_{m,\xi_0} r_0 + \sum_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m,k} \alpha_k^{'},$$

$$u_0^{(m+1)} = \alpha_{m+1,m} u_0^{(m)} + \alpha_{m+1,m+1} u_0^{(m+1)} + \alpha_{m+1,\xi_0} r_0 + \sum_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+1,k} \alpha_k^{'},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_0^{(m+\eta_0-1)} = \alpha_{m+\eta_0-1,m} u_0^{(m)} + \ldots + \alpha_{m+\eta_0-1,m+\eta_0-1} u_0^{(m+\eta_0-1)} + \\ + \alpha_{m+\eta_0-1,\xi_0} r_0 + \sum_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+\eta_0-1,k} \alpha_k^{'},$$

$$u_0^{(m+\eta_0)} = r_{1n},$$

$$u_0^{(m+\eta_0+1)} = \alpha_{m+\eta_0+1,m} u_0^{(m)} + \ldots + \alpha_{m+\eta_0+1,m+\eta_0-1} u_0^{(m+\eta_0-1)} + \alpha_{m+\eta_0+1,m+\eta_0} r_{1n} + \\ + \alpha_{m+\eta_0+1,m+\eta_0+1} u_0^{(m+\eta_0+1)} + \alpha_{m+\eta_0+1,\xi_0} r_0 + \sum_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+\eta_0+1,k} \alpha_k^{'},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_0^{(2m-1)} = \alpha_{2m-1,m} u_0^{(m)} + \ldots + \alpha_{2m-1,m+\eta_0-1} u_0^{(m+\eta_0-1)} + \alpha_{2m-1,m+\eta_0} r_{1n} + \\ + \alpha_{2m-1,m+\eta_0+1} u_0^{(m+\eta_0+1)} + \ldots + \alpha_{2m-1,2m-1} u_0^{(2m-1)} + \alpha_{2m-1,\xi_0} r_0 + \\ + \sum_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{2m-1,k} \alpha_k^{'}.$$

Определим $u_0^{(m)}, \ldots, u_0^{(m+\eta_0-1)}, u_0^{(m+\eta_0+1)}, \ldots, u_0^{(2m-1)}$. Рассмотрим первое равенство. Если $m \neq p_k$ для любого $k = z, \ldots, m-1$, то по построению $\alpha_{m,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \ldots, m-1$; $\alpha_{m,m} = 1$, и в этом случае положим $u_0^{(m)} = 0$. Если $m = p_k$ для некоторого $k = z, \ldots, m-1$, то $\alpha_{m+\zeta,m} = 0$ для любого $\zeta = 0, 1, \ldots, m-1$, и положим $u_0^{(m)} = \alpha_{m,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m,k} \alpha_k^{'}$. Для второго равенства, если $m+1 \neq p_k$ для любого $k = z, \ldots, m-1$, то аналогично положим $u_0^{(m+1)} = 0$. Если $m+1 = p_k$ для некоторого $k = z, \ldots, m-1$, то $\alpha_{m+\zeta,m+1} = 0$ для любого $\zeta = 1, 2, \ldots, m-1$ и $u_0^{(m+1)} = \alpha_{m+1,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+1,k} \alpha_k^{'}$ и т. д. Для $m+\eta_0-1$ равенства, если $m+\eta_0-1 \neq p_k$ для любого $k = z, \ldots, m-1$, то положим $u_0^{(m+\eta_0-1)} = 0$. Если $m+\eta_0-1 = p_k$ для некоторого $k = z, \ldots, m-1$, то $\alpha_{m+\zeta,m+\eta_0-1} = 0$ для любого $\zeta = \eta_0-1, \ldots, m-1$ и $u_0^{(m+\eta_0-1)} = \alpha_{m+\eta_0-1,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+\eta_0-1,k} \alpha_k^{'}$. Так мы определим $u_0^{(m)}, u_0^{(m+1)}, \ldots, u_0^{(m+\eta_0-1)}$. Далее имеем $u_0^{(m+\eta_0)} = r_{1n}$. Если $m+\eta_0+1 \neq p_k$ для любого $k = z, \ldots, m-1$, то $u_0^{(m+\eta_0+1)} = 0$. Если $m+\eta_0+1 = p_k$ для некоторого $k = z, \ldots, m-1$, то $\alpha_{m+\zeta,m+\eta_0+1} = 0$ для любого

$\zeta = \eta_0 + 1, \dots, m-1$ и $u_0^{(m+\eta_0+1)} = \alpha_{m+\eta_0+1,m+\eta_0} r_{1n} + \alpha_{m+\eta_0+1,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+\eta_0+1,k} \alpha_k^{'}$ и т. д. Из последнего уравнения имеем, если $2m-1 \neq p_k$ для любого $k = z, \dots, m-1$, то $u_0^{(2m-1)} = 0$. Если $2m-1 = p_k$ для некоторого $k = z, \dots, m-1$, то $\alpha_{2m-1,2m-1} = 0$ и $u_0^{(2m-1)} = \alpha_{2m-1,m+\eta_0} r_{1n} + \alpha_{2m-1,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{2m-1,k} \alpha_k^{'}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{u2_0}$ имеет вид

$$\overrightarrow{u2_0} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{''} \\ \dots \\ \alpha_{\eta_0-1}^{''} \\ r_{1n} \\ \alpha_{\eta_0+1}^{''} \\ \dots \\ \alpha_{m-1}^{''} \end{pmatrix}.$$

Для $j = 0, 1, \dots, \eta_0 - 1$ величина $\alpha_j^{''}$ равна 0 при $m + j \neq p_k$ для любого $k = z, \dots, m-1$ и равна $\alpha_{m+j,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+j,k} \alpha_k^{'}$ при $m + j = p_k$ для некоторого $k = z, \dots, m-1$. Для $j = \eta_0 + 1, \dots, m-1$ величина $\alpha_j^{''}$ равна 0 при $m + j \neq p_k$ для любого $k = z, \dots, m-1$ и $\alpha_{m+j,m+\eta_0} r_{1n} + \alpha_{m+j,\xi_0} r_0 + \sum\limits_{k=\xi_0+1}^{m-1} \alpha_{m+j,k} \alpha_k^{'}$ при $m+j = p_k$ для некоторого $k = z, \dots, m-1$.

Пусть $\eta_0 = m-1, \xi_0 = 0$, тогда векторы $\overrightarrow{u2_0}$, $\overrightarrow{u1_0}$ имеют вид

$$\overrightarrow{u2_0} = \begin{pmatrix} \alpha_0^{''} \\ \alpha_1^{''} \\ \dots \\ \alpha_{m-2}^{''} \\ r_{1n} \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{u1_0} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \alpha_1^{'} \\ \dots \\ \alpha_{m-2}^{'} \\ \alpha_{m-1}^{'} \end{pmatrix}.$$

Построим последовательность функций $u_n(t)$ такую, что

$$\|u_n\|_{\mathbf{W}_2^m(0,1)} \leq 1$$

для любого n, причем эти функции принимают при $t = 1$ значения, заданные векторами $\overrightarrow{u2_0}$, $\overrightarrow{u1_0}$, то есть

$$u_n(1) = r_0, \quad u_n^{(j)}(1) = \alpha_j^{'}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$
$$u_n^{(m+i)}(1) = \alpha_i^{''}, \quad i = 0, 1, \dots, m-2, \quad u_n^{(2m-1)}(1) = r_{1n},$$

а при $t = 0$

$$u_n^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

(то есть $\langle P_1^*(0) B_0(0) P(0) \overrightarrow{u_2}(0), \overrightarrow{u_1}(0) \rangle \ = 0$). В этом случае

$$Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P(t)\overrightarrow{u_2}(t),\overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 =$$
$$= Re\langle P_1^*(1)B_0(1)P(1)\overrightarrow{u_{2_0}},\overrightarrow{u_{1_0}}\rangle = Re\sum_{\xi=0}^{m-1}\sum_{\eta=0}^{m-1-\xi}\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)u_0^{(m+\eta)}\overline{u_0^{(\xi)}} =$$
$$= Re\sum_{\eta=0}^{m-1}\sum_{\xi=0}^{m-1-\eta}\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)u_0^{(m+\eta)}\overline{u_0^{(\xi)}} = r_{1n}r_0 + Re\sum_{\eta=0}^{m-2}\sum_{\xi=0}^{m-1-\eta}\widetilde{p}_{\xi,\eta}\alpha_\eta^{''}\overline{u_0^{(\xi)}}.$$

Так как последнее слагаемое ограничено, а

$$r_{1n}\to-\infty \text{ при } n\to\infty,$$

то величина

$$Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P(t)\overrightarrow{u_2}(t),\overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1\to-\infty$$

при $n\to\infty$. Получили противоречие с (2.12). Мы доказали, что $\widetilde{p}_{0,m-1}(1)=0$.

Пусть $\eta_0=m-2,\xi_0=1$, построим вектора $\overrightarrow{u_{2_0}},\overrightarrow{u_{1_0}}$ вида

$$\overrightarrow{u_{2_0}}=\begin{pmatrix}\alpha_0^{''}\\ \alpha_1^{''}\\ \dots\\ \alpha_{m-3}^{''}\\ r_{1n}\\ \alpha_{m-1}^{''}\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{u_{1_0}}=\begin{pmatrix}0\\ r_0\\ \alpha_2^{'}\\ \dots\\ \alpha_{m-2}^{'}\\ \alpha_{m-1}^{'}\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$Re\langle P_1^*(t)B_0(t)P(t)\overrightarrow{u_2}(t),\overrightarrow{u_1}(t)\rangle|_0^1 = Re\langle P_1^*(1)B_0(1)P(1)\overrightarrow{u_{2_0}},\overrightarrow{u_{1_0}}\rangle =$$
$$= Re\sum_{\eta=0}^{m-1}\sum_{\xi=0}^{m-1-\eta}\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)u_0^{(m+\eta)}\overline{u_0^{(\xi)}} = r_{1n} + Re\int\limits_\Omega\sum_{\eta=0}^{m-3}\sum_{\xi=0}^{m-1-\eta}\widetilde{p}_{\xi,\eta}\alpha_\eta^{''}\overline{u_0^{(\xi)}}.$$

Аналогично получаем $\widetilde{p}_{1,m-2}(1)=0$. Таким способом мы докажем, что $\widetilde{p}_{\xi,\eta}(1)=0$, $\xi=0,1,\ldots,m-1$, $\eta=0,1,\ldots,m-1-\xi$. Теорему 2.1 можно считать доказаной.

Лемма 2.1. *Пусть $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Если заданы элементы матриц $P_1(1),B_0(1)$ $(P_1(0),B_0(0))$ причем для любого $\xi=0,1,\ldots,m-1$*

$$|a_{2m}(1)|=|b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1)|\geq\delta>0$$
$$(\ |a_{2m}(0)|=|b_{\xi+1,2m-1-\xi}(0)|\geq\delta>0),$$

где δ — некоторое число, то из условия (2.7) при $t=1(t=0)$ можно рекуррентно определить элементы матрицы $P(1)$ $(P(0))$. Если заданы элементы матриц $P(1)$, $B_0(1)$, $(P(0)$, $B_0(0))$, то из этого условия можно рекуррентно определить элементы матрицы $P_1(1)$ $(P_1(0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $p = 0, 1, \ldots, m-1, \xi = 0, 1, \ldots, m-1-p$ имеем

$$\widetilde{p}_{\xi,m-1-\xi-p}(1) = \sum_{d=m-1-\xi-p}^{m-1-\xi} (\sum_{k=\xi}^{m-1-d} \overline{\alpha_{k,\xi}} b_{k+1,m+d}(1)(-1)^k)\alpha_{m+d,2m-1-\xi-p} = 0.$$

Делая замену $d_1 = d - (m-1-\xi-p)$, $k_1 = k - \xi$, получим

$$0 = \sum_{d_1=0}^{p} (\sum_{k_1=0}^{p-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{k_1+\xi}) \times$$

$$\times \alpha_{2m-1-\xi-p+d_1,2m-1-\xi-p} = (\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1)(-1)^{\xi} +$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{p} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p}(1)(-1)^{k_1+\xi})\alpha_{2m-1-\xi-p,2m-1-\xi-p} +$$

$$+ \sum_{d_1=1}^{p} (\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{\xi} +$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{p-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{k_1+\xi}) \times \alpha_{2m-1-\xi-p+d_1,1)} \quad (2.13)$$

Пусть $p = 0$, тогда для любого $\xi = 0, 1, \ldots, m-1$ имеем

$$\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1)\alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi} = 0. \quad (2.14)$$

По заданным матрицам $P_1^*(1), B_0(1)$ определим матрицу $P(1)$. Так как (2.14) содержит m равенств, а в точке $t = 1$ краевых условий не более m, то величины $\overline{\alpha_{\xi,\xi}}$, $\alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi}$ не могут одновременно обращаться в нуль (иначе краевых условий будет больше m). Зафиксируем произвольное целое ξ_0 от 0 до $m-1$. Если $\alpha_{\zeta,\xi_0} = 0$ для любого $\zeta = \xi_0, \ldots, m-1$, то положим

$$\alpha_{2m-1-\xi_0,2m-1-\xi_0} = 1, \quad \alpha_{2m-1-\xi_0,\eta} = 0 \quad (2.15)$$

для любого $\eta = 0, 1, \ldots, 2m-1-\xi_0-1$. Если $\alpha_{\xi_0,\xi_0} = 1$, $\alpha_{\xi_0,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0$, $1, \ldots, \xi_0 - 1$, то положим

$$\alpha_{\zeta,2m-1-\xi_0} = 0 \quad (2.16)$$

для любого $\zeta = 2m-1-\xi_0, \ldots, 2m-1$. В частности, мы определили все диагональные элементы матрицы $P(1)$.

Рассмотрим (2.13) при $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $\xi = 0, 1, \ldots, m-1-p$. Возможны следующие случаи:

1) $\alpha_{\zeta,\xi} = 0$ для любого $\zeta = \xi, \ldots, m-1$;

2) $\alpha_{\xi,\xi} = 1, \alpha_{\xi,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \ldots, \xi-1$;

1^0) $\alpha_{m+\zeta,2m-1-\xi-p} = 0$ для любого $\zeta = m-1-\xi-p, \ldots, m-1$;

$2^0)$ $\alpha_{2m-1-\xi-p,2m-1-\xi-p}=1, \alpha_{2m-1-\xi-p,\eta}=0$
для любого $\eta=0,1,\ldots,2m-1-\xi-p-1$.
Если для некоторых $p_0=1,2,\ldots,m-1, \xi_0=0,1,\ldots,m-1-p_0$ выполняется случай 2), 2^0)(во всех остальных случаях получаем тождества), тогда

$$b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0}(1)+\sum_{k_1=1}^{p_0}\overline{\alpha_{k_1+\xi_0,\xi_0}}b_{k_1+\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0}(1)(-1)^{k_1}+$$
$$+b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0}(1)\alpha_{2m-1-\xi_0,2m-1-\xi_0-p_0}+\sum_{d_1=1}^{p_0-1}(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0+d_1}(1)+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{p_0-d_1}\overline{\alpha_{k_1+\xi_0,\xi_0}}b_{k_1+\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0+d_1}(1)(-1)^{k_1})\times\alpha_{2m-1-\xi_0-p_0+d_1,2m-1-\xi_0-p_0}=0.$$

Отсюда,

$$\alpha_{2m-1-\xi_0,2m-1-\xi_0-p_0}=-\frac{1}{a_{2m}(1)}(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0}(1)+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{p_0}\overline{\alpha_{k_1+\xi_0,\xi_0}}b_{k_1+\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0}(1)(-1)^{k_1}+\sum_{d_1=1}^{p_0-1}(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0+d_1}(1)+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{p_0-d_1}\overline{\alpha_{k_1+\xi_0,\xi_0}}b_{k_1+\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0+d_1}(1)(-1)^{k_1})\times\alpha_{2m-1-\xi_0-p_0+d_1,2m-1-\xi_0-p_0}). \quad (2.17)$$

Определим оставшиеся элементы матрицы $P(1)$.
Если $p_0=1, \xi_0=0,1,\ldots,m-2$, то из (2.17) получаем

$$\alpha_{2m-1-\xi_0,2m-1-\xi_0-1}=-\frac{1}{a_{2m}(1)}(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-1}(1)-\overline{\alpha_{\xi_0+1,\xi_0}}b_{\xi_0+2,2m-1-\xi_0-1}(1)). \quad (2.18)$$

Если $p_0=2, \xi_0=0,1,\ldots,m-2$, то из (2.17), (2.18) получаем

$$\alpha_{2m-1-\xi_0,2m-1-\xi_0-2}=-\frac{1}{a_{2m}(1)}(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-2}(1)+$$
$$+\sum_{k_1=1}^{2}\overline{\alpha_{k_1+\xi_0,\xi_0}}b_{k_1+\xi_0+1,2m-1-\xi_0-p_0}(1)(-1)^{k_1}+$$
$$+(b_{\xi_0+1,2m-1-\xi_0-1}(1)-\overline{\alpha_{\xi_0+1,\xi_0}}b_{\xi_0+2,2m-1-\xi_0-1}(1))\alpha_{2m-1-\xi_0-1,2m-1-\xi_0-2})$$

и т. д. Из (2.15)–(2.17) рекуррентно определяются все элементы матрицы $P(1)$. Определение матрицы $P_1(1)$ по заданным $P(1), B_0(1)$ аналогично. Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Лемма 2.1 говорит о том, что если известна матрица $B_0(1)$ ($B_0(0)$) с не нулевыми диагональными элементами и при $t=1(t=0)$ известен набор краевых условий порядков меньших, чем m, или больших, чем m, то можно построить краевые условия порядков больших, чем m и меньших, чем m, соответственно так, чтобы выполнялось условие (2.7) при $t = 1$ $(t = 0)$.

Лемма 2.2.. *Пусть $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ и заданы матрицы $P_1(1)$, $P(1)$ так, что диагональные элементы удовлетворяют условию*

$$\alpha_{\xi,\xi} + \alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi} = 1, \tag{2.19}$$

для любого $\xi = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда найдется матрица $B_0(1)$ такая, что

$$P_1^*(1)B_0(1)P(1) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим матрицу $B_0(1)$. Для любого $p = 0, 1, \ldots, m-1$, $\xi = 0$, $1, \ldots, m-1-p$ имеем

$$\widetilde{p}_{\xi,m-1-\xi-p}(1) = \sum_{d=m-1-\xi-p}^{m-1-\xi} (\sum_{k=\xi}^{m-1-d} \overline{\alpha_{k,\xi}} b_{k+1,m+d}(1)(-1)^k)\alpha_{m+d,2m-1-\xi-p} = 0.$$

Делая замену $d_1 = d - (m-1-\xi-p), k_1 = k - \xi$, получим

$$\begin{gathered}0 = \sum_{d_1=0}^{p} (\sum_{k_1=0}^{p-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{k_1+\xi}) \times \\ \times \alpha_{2m-1-\xi-p+d_1,2m-1-\xi-p} = (\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1)(-1)^{\xi} + \\ + \sum_{k_1=1}^{p} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p}(1)(-1)^{k_1+\xi})\alpha_{2m-1-\xi-p,2m-1-\xi-p} + \\ + \sum_{d_1=1}^{p} (\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{\xi} + \\ + \sum_{k_1=1}^{p-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{k_1+\xi}) \times \alpha_{2m-1-\xi-p+d_1,2m-1-\xi-p}.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Пусть $p = 0$, тогда для любого $\xi = 0, 1, \ldots, m-1$, учитывая (2.19), имеем тождество

$$\overline{\alpha_{\xi,\xi}} b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1)\alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi} = 0.$$

Таким образом, величины $b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1)$ произвольны. Положим, например,

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1) = a_{2m}(1) \tag{2.21}$$

для любого $\xi = 0, 1, \ldots, m-1, a_{2m}$ — некоторая постоянная.

Рассмотрим (2.20) при $p = 1, 2, \ldots, m-1, \xi = 0, 1, \ldots, m-1-p$. Возможны следующие случаи:

1) $\alpha_{\zeta,\xi} = 0$ для любого $\zeta = \xi, \dots, m-1$;
2) $\alpha_{\xi,\xi} = 1, \alpha_{\xi,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \dots, \xi - 1$;
1^0) $\alpha_{m+\zeta,2m-1-\xi-p} = 0$ для любого $\zeta = m-1-\xi-p, \dots, m-1$;
2^0) $\alpha_{2m-1-\xi-p,2m-1-\xi-p} = 1$, $\alpha_{2m-1-\xi-p,\eta} = 0$ для любого $\eta = 0, 1, \dots, 2m-1-\xi-p-1$.
В случае 2), 2^0) (во всех остальных случаях получаем тождества) имеем

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1) = -\sum_{k_1=1}^{p} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p}(1)(-1)^{k_1} - \sum_{d_1=1}^{p} (b_{\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1) + \\ + \sum_{k_1=1}^{p-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-p+d_1}(1)(-1)^{k_1})\alpha_{2m-1-\xi-p+d_1,2m-1-\xi-p}\,. \quad (2.22)$$

При $p = 1$, $\xi = 0, 1, \dots, m-2$, из (2.21), (2.22) получаем

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi-1}(1) = \overline{\alpha_{\xi+1,\xi}} b_{\xi+2,2m-1-\xi-1}(1) - b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1)\alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi-1} = \\ = \overline{\alpha_{\xi+1,\xi}} a_{2m}(1) - a_{2m}(1)\alpha_{2m-1-\xi,2m-1-\xi-1}. \quad (2.23)$$

При $p = 2$, $\xi = 0, 1, \dots, m-3$, из (2.22), (2.23) получаем

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi-2}(1) = -\sum_{k_1=1}^{2} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-2}(1)(-1)^{k_1} - \sum_{d_1=1}^{2} (b_{\xi+1,2m-1-\xi-2+d_1}(1) + \\ + \sum_{k_1=1}^{2-d_1} \overline{\alpha_{k_1+\xi,\xi}} b_{k_1+\xi+1,2m-1-\xi-2+d_1}(1)(-1)^{k_1})\alpha_{2m-1-\xi-2+d_1,2m-1-\xi-2}$$

и т. д. Из (2.21), (2.22) рекуррентно определяются все элементы матрицы $B_0(1)$. Лемма 2.2. доказана.

Замечание 2.2. Аналогичная лемма справедлива для $P_1^*(0)$, $P(0), B_0(0)$.

Пусть $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ и для $\xi = 0, 1, \dots, m-1$ и почти всех $t \in (0, 1)$

$$a_{2m}(t) = b_{\xi+1,2m-1-\xi}(t) \geq \delta > 0, \quad (2.24)$$

где δ — некоторое число. Опишем условия на коэффициенты граничных операторов (2.1), (2.2), при выполнении которых существует оператор вида (1.1), удовлетворяющий условию (H). Из равенства (1.2) при $t = 1$ вытекает

$$b_{p,j}(1) = \sum_{s=0}^{2m-p-j} a^{(s)}_{p+j+s}(1)(-1)^s C^{p-1}_{p+s-1}, \quad (2.25)$$

$$p = 1, 2, \dots, m, \quad j = m, \dots, 2m-p,$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — число сочетаний из n по m ($n \geq m$). Предположим, имеет место (2.7), тогда, учитывая (2.25), для $\xi = 0, 1, \dots, m-1$, $\eta = 0, 1, \dots, m-1-\xi$ имеет место

$$0 = \widetilde{p}_{\xi,\eta}(1) = \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} (\sum_{k=\xi}^{m-1-d} \overline{\alpha_{k,\xi}} b_{k+1,m+d}(1)(-1)^{k+m})\alpha_{m+d,m+\eta} =$$

$$= \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} \sum_{k=\xi}^{m-1-d} \overline{\alpha_{k,\xi}} \sum_{s=0}^{m-1-k-d} a^{(s)}_{k+1+m+d+s}(1)(-1)^s C^k_{k+s}(-1)^{k+m}\alpha_{m+d,m+\eta} =$$

$$= \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} \sum_{s=0}^{m-1-d-\xi} \sum_{k=\xi}^{m-1-d-s} (a^{(s)}_{k+1+m+d+s}(1)C^k_{k+s}(-1)^{k+m+s}\overline{\alpha_{k,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta}).$$

Делая замену $j = k+1+m+d+s$, $j = \xi+1+m+d+s, \ldots, 2m$, получаем

$$0 = \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} \sum_{s=0}^{m-1-d-\xi} \sum_{j=\xi+1+m+d+s}^{2m} (a^{(s)}_j(1)C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d} \times \overline{\alpha_{j-1-m-d-s,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1-\eta-\xi} \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi-s} \sum_{j=\xi+1+m+d+s}^{2m} (C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d-s,\xi}} \times \alpha_{m+d,m+\eta})a^{(s)}_j(1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1-\eta-\xi} \sum_{j=\xi+1+m+\eta+s}^{2m} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi-s} (C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d-s,\xi}} \times \alpha_{m+d,m+\eta})a^{(s)}_j(1) =$$

$$= \sum_{s=1}^{m-1-\eta-\xi} \sum_{j=\xi+1+m+\eta+s}^{2m} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi-s} (C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d-s,\xi}} \times \alpha_{m+d,m+\eta})a^{(s)}_j(1)+$$

$$+ \sum_{j=\xi+1+m+\eta}^{2m-1} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi} ((-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta})a_j(1)+$$

$$+ \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} ((-1)^{2m-1-d}\overline{\alpha_{m-1-d,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta})a_{2m}(1). \tag{2.26}$$

Ввиду (2.24), положим $a_{2m}(1) = 1$. Тогда (2.26) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{m-1-\eta-\xi} \sum_{j=\xi+1+m+\eta+s}^{2m} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi-s} (C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d-s,\xi}} \times \alpha_{m+d,m+\eta})a^{(s)}_j(1) +$$

$$+ \sum_{j=\xi+1+m+\eta}^{2m-1} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi} (-1)^{j-1-d}\overline{\alpha_{j-1-m-d,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta}a_j(1) =$$

$$= - \sum_{d=\eta}^{m-1-\xi} (-1)^{2m-1-d}\overline{\alpha_{m-1-d,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta}, 1) \tag{2.27}$$

$$\xi = 0, 1, \ldots, m-1, \quad \eta = 0, 1, \ldots, m-1-\xi.$$

Аналогично можно получить при $t = 0$

$$\sum_{s=1}^{m-1-\eta-\xi} \sum_{j=\xi+1+m+\eta+s}^{2m} \sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi-s} (C^{j-1-m-d-s}_{j-1-m-d}(-1)^{j-1-d}\overline{\beta_{j-1-m-d-s,\xi}} \times \beta_{m+d,m+\eta})a^{(s)}_j(0) +$$

$$+\sum_{j=\xi+1+m+\eta}^{2m-1}\sum_{d=\eta}^{j-m-1-\xi}(-1)^{j-1-d}\overline{\beta_{j-1-m-d,\xi}}\beta_{m+d,m+\eta}a_j(0)=$$

$$=-\sum_{d=\eta}^{m-1-\xi}(-1)^{2m-1-d}\overline{\beta_{m-1-d,\xi}}\beta_{m+d,m+\eta}, \tag{2.28}$$

$$\xi=0,1,\ldots,m-1,\quad \eta=0,1,\ldots,m-1-\xi.$$

Теорема 2.2. *Пусть $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ и выполнено (2.24). Для данных граничных операторов (2.1), (2.2) оператор вида (1.1), где $a_i\in\mathbf{W}_\infty^{\max(0,i-1)}(0,1)$, $i=0,1,\ldots,2m$, удовлетворяющий условию (H) существует тогда и только тогда, когда система (2.27) разрешима относительно величин*

$$a_j^{(s)}(1),\quad j=m+1,\ldots,2m,\quad s=max(0,j+1-2m),\ldots,j-m-1,$$

а система (2.28) разрешима относительно величин

$$a_j^{(s)}(0),\quad j=m+1,\ldots,2m,\quad s=max(0,j+1-2m),\ldots,j-m-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть системы (2.27), (2.28) разрешимы относительно величин $a_j^{(s)}(1)$, $a_j^{(s)}(0)$, $j=m+1,\ldots,2m$, $s=max(0,j+1-2m),\ldots,j-m-1$ соответственно. Положим $a_{2m}(1)=a_{2m}(0)=1$ и для достаточно малого ε :
при $t\in(0,\varepsilon)$

$$a_j(t)=\sum_{s=0}^{j-m-1}\frac{t^s}{s!}a_j^{(s)}(0),\quad j=m+1,\ldots,2m;$$

при $t\in(1-\varepsilon,1)$

$$a_j(t)=\sum_{s=0}^{j-m-1}\frac{(1-t)^s}{s!}a_j^{(s)}(1),\quad j=m+1,\ldots,2m,$$

причем при $t\in(\varepsilon,1-\varepsilon)$ функция $a_j(t)$ продолжается так, что

$$a_j\in\mathbf{W}_\infty^{j-1}(0,1),\quad j=m+1,\ldots,2m.$$

Обозначим

$$L_0u=\sum_{j=m+1}^{2m}a_ju^{(j)}. \tag{2.29}$$

Покажем, что оператор (2.29) удовлетворяет условию (H). Положим

$$b_{p,j}(t)=\sum_{s=0}^{2m-p-j}a_{p+j+s}^{(s)}(t)(-1)^sC_{p+s-1}^{p-1}, \tag{2.30}$$

$$p=1,2,\ldots,m,\quad j=m,\ldots,2m-p.$$

Так как $a_j^{(s)}(1), a_j^{(s)}(0)$ — решения систем (2.27), (2.28), в силу (2.26), (2.30) имеет место (2.7). По теореме 2.1 оператор (2.29) удовлетворяет условию (H).

Обратно. Пусть оператор (1.1) удовлетворяет условию (H), тогда по теореме 2.1 имеет место (2.7), причем для элементов матрицы $B_0(t)$ справедлива формула (2.30). При $t = 1$ подставим (2.30) в (2.7), тогда приходим к тождеству (2.27), где в правой части стоит

$$-\sum_{d=\eta}^{m-1-\xi}((-1)^{2m-1-d}\overline{\alpha_{m-1-d,\xi}}\alpha_{m+d,m+\eta})a_{2m}(1).$$

Учитывая (2.24), получаем разрешимость системы (2.27). Аналогично доказывается разрешимость системы (2.28). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.3. Из доказательства теоремы 2.2 видно, что если для данных граничных операторов (2.1), (2.2) оператор (1.1), где

$$a_i \in \mathbf{W}_{\infty}^{\max(0,i-1)}(0,1), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m,$$

удовлетворяющий условию (H) существует, то без ограничения общности можно считать $a_{2m} = 1$.

Пример 2.1. Пусть $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Приведем пример краевых условий, при которых существует оператор (1.1), где

$$a_i \in \mathbf{W}_{\infty}^{\max(0,i-1)}(0,1), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m,$$

удовлетворяющий условию (H). Пусть краевые условия имеют вид

$$l'_{i1}u = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2.31}$$
$$l'_{j0}u = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.32}$$

Здесь

$$l'_{i1}u = \begin{cases} u^{(p_i)}(1) - \sum\limits_{\mu=0}^{\min(p_i-1,m-1)} \alpha_{p_i,\mu}u^{(\mu)}(1), \ p_i \geq m, \\ u^{(p_i)}(1), \ p_i \leq m-1, \end{cases}$$
$$l'_{j0}u = \begin{cases} u^{(q_j)}(0) - \sum\limits_{\mu=0}^{\min(q_j-1,m-1)} \beta_{q_j,\mu}u^{(\mu)}(0) = 0, \ q_j \geq m, \\ u^{(q_j)}(0), \ q_j \leq m-1, \end{cases}$$

где $\alpha_{p_i,\mu}$, $\beta_{q_j,\mu}$ — произвольные постоянные;
$2m-1 \geq 2m-1 \geq (0,1)p_{m-1} > \ldots > p_0 \geq (0,1)0, 2m-1 \geq (0,1)$

Обозначим $\mathbb{N}_{m-1}$ — множество натуральных чисел от 0 до m-1;

$$\mathbb{N}_0(1) = \{i \in \mathbb{N}_{m-1} : i \neq p_k, \forall k = 0, 1, \ldots, m-1\};$$

$$\mathbb{N}_1(1) = \{j \in \mathbb{N}_{m-1} : 2m-1-j \neq p_d, \forall d = 0,1,\dots,m-1\};$$

$\chi_S(\xi) = \begin{cases} 1, \ \xi \in S \\ 0, \ \xi \in \mathbb{N}\backslash S \end{cases}$ — характеристическая функция множества S.

Аналогично определяются $\mathbb{N}_0(0)$, $\mathbb{N}_1(0)$ при $t=0$. Предположим, краевые условия (2.31), (2.32) заданы так, что выполнено

$$\chi_{\mathbb{N}_0(1)}(\xi) + \chi_{\mathbb{N}_1(1)}(\xi) = 1, \quad \forall \xi = 0,1,\dots,m-1, \tag{2.33}$$
$$\chi_{\mathbb{N}_0(0)}(\eta) + \chi_{\mathbb{N}_1(0)}(\eta) = 1, \quad \forall \eta = 0,1,\dots,m-1.$$

Используя лемму 2.2 определим матрицу $B_0(1)$, удовлетворяющую условию (2.7) при $t=1$ (матрица $B_0(0)$ оопределяется аналогично). Учитывая (2.33) и лемму 2.2, можно положить

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1) = 1, \quad \xi = 0,1,\dots,m-1. \tag{2.34}$$

Для $p = 1,2,\dots,m-1, \xi = 0,1,\dots,m-1-p$, получаем

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1) = 0. \tag{2.35}$$

Найдем $a_i^{(s)}(1)$ из системы (2.25) с $b_{p,j}(1)$, заданными равенствами (2.34), (2.35). Имеем

$$b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1) = \sum_{s=0}^{p} a_{2m-p+s}^{(s)}(1)(-1)^s C_{\xi+s}^{\xi},$$
$$p = 0,1,\dots,m-1, \quad \xi = 0,1,\dots,m-1-p.$$

Положим

$$a_{2m}(1) = b_{\xi+1,2m-1-\xi}(1) = 1, \quad \xi = 0,1,\dots,m-1,$$
$$a_{2m-p}(1) = b_{\xi+1,2m-1-\xi-p}(1) = 0,$$
$$p = 1,2,\dots,m-1, \quad \xi = 0,1,\dots,m-1-p$$
$$a_j^{(s)}(1) = 0, \quad j = m+2,\dots,2m, \quad s = 1,2,\dots,j-m-1.$$

Аналогичные рассуждения проводятся при $t=0$. Так же как в теореме 2.2 можно построить оператор L_0, удовлетворяющий условию (H).

Выражаю свою искреннюю благодарность моему научному руководителю профессору Сергею Григорьевичу Пяткову за чуткое руководство, ценные советы и консультации.

Литература

[1] *М. Г. Крейн*, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, Матем. сб., **21** (63), 1947, 365–404.

[2] *Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес*, Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., Мир, 1971.

[3] *М. А. Наймарк*, Линейные дифференциальные операторы, М., Наука, 1969.

[4] *S. G. Pyatkov*, Interpolation of weighted Sobolev spaces, Sib. Adv. Math., **10**, No. 3–4 (2000), 83–132.

[5] *X. Трибель*, Теория интерполяции, Функциональные пространства, Дифференциальные операторы, М., Мир, 1980.

[6] *A. V. Chueshev*, Resolvent estimates for ordinary differential operators of mixed type, Sib. Adv. Math., **10**, No. 4 (2000), 15–67.