ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том V, 2005 г. Выпуск 3. С. 20–28

УДК 517.924.4

Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом[1]

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

В работе рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau > 0, \tag{0.1}$$

где A, B — постоянные матрицы размера $n \times n$, $F(u, v)$ — вещественно-значная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица и

$$\|F(u, v)\| \leq q\|u\|^{1+\omega}, \quad q, \ \omega > 0.$$

Цель наших исследований — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения системы (0.1) и получение оценок решений системы (0.1), характеризующих убывание при $t \to \infty$.

§ 1. Асимптотическая устойчивость решений систем линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Хорошо известно, что для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > \tau, \tag{1.1}$$

справедлив аналог теоремы об асимптотической устойчивости (см, например, [1–3]), который формулируется в терминах принадлежности корней квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I) = 0 \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03-01-00095, 04-01-00458, 04-01-00750), программы Рособразования «Развитие потенциала высшей школы» (код проекта 8273), Сибирского отделения Российской академии наук (код проекта 119).

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Однако проверка этого условия представляет очень сложную задачу. В случае систем дифференциальных уравнений без запаздывания, т. е. при $B \equiv 0$, вопрос об асимптотической устойчивости решений обычно решается с использованием матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{1.3}$$

Для линейных систем (1.1) также имеет место аналог теоремы об асимптотической устойчивости, который формулируется на основе матричного уравнения Ляпунова. Приведем формулировку этой теоремы из монографии [3].

Теорема 1.1 (достаточные условия асимптотической устойчивости). *Пусть спектр матрицы $A + B$ лежит в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, и матрица $H_0 = H_0^* > 0$ — решение уравнения Ляпунова*

$$H_0(A + B) + (A + B)^*H_0 = -C, \qquad C = C^* > 0.$$

Если выполнено матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} H_0A + A^*H_0 + H_0 & H_0B \\ B^*H_0 & -H_0 \end{pmatrix} \le 0,$$

то нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво при любом запаздывании $\tau > 0$.

Отметим, что доказательство этой теоремы проводится с использованием функционала Ляпунова – Красовского

$$v_0(t, y) = \langle H_0y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle H_0y(s), y(s)\rangle\, ds, \tag{1.4}$$

рассматриваемого на решениях системы (1.1), и вытекает из теоремы Красовского об асимптотической устойчивости. Аналогичные утверждения об асимптотической устойчивости нулевого решения можно сформулировать для систем квазилинейных уравнений (0.1), которые также доказываются с использованием функционала вида (1.4).

Следует подчеркнуть, что используемый функционал Ляпунова – Красовского вида (1.4) играет ключевую роль при доказательстве асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В этом смысле функционал (1.4) является аналогом функционала Ляпунова $\langle Hy, y\rangle$, где $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения (1.3). Однако использование функционала (1.4) не позволяет получить оценки скорости убывания на бесконечности решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в то время как при выводе неравенства

$$\|e^{tA}\| \le \sqrt{2\|A\|\|H\|}\, e^{-\frac{t}{2\|H\|}}, \tag{1.5}$$

где $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения (1.3) при $C = I$, используется именно функционал Ляпунова $\langle Hy, y\rangle$ [4].

Оценки типа (1.5) играют очень важную роль при численном исследовании асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений. Именно *наличие оценок такого типа* позволяет разрабатывать соответствующие алгоритмы с гарантированной точностью [5]. Следует добавить также, что такие неравенства дают некоторую оценку для скорости убывания решений систем дифференциальных уравнений при $t \to \infty$. Поэтому получение аналогов оценок такого типа представляет очень важную задачу в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, как с прикладной, так и с теоретической точек зрения.

Отметим, что в последние годы в ряде работ были получены оценки экспоненциального убывания решений систем линейных уравнений (1.1) (см. обзор [6]). При получении таких оценок авторы используют различные модификации функционала Ляпунова–Красовского.

В настоящей работе мы предлагаем еще одну модификацию функционала Ляпунова–Красовского, с помощью которой получаем оценки экспоненциального убывания на бесконечности решений линейных (1.1) и квазилинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (0.1). Более того, функционалы такого типа можно использовать для получения аналогичных оценок решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с переменными коэффициентами в линейных членах. В следующей работе, опираясь на наши результаты из [7, 8], мы продемонстрируем это в случае, когда коэффициенты в линейных членах являются периодическими функциями.

Вначале рассмотрим систему линейных уравнений (1.1). Ниже мы укажем достаточные условия асимптотической устойчивости решений системы (1.1), несколько отличающиеся от условий в теореме 1.1.

Теорема 1.2. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H = H^* > 0 \quad \text{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau] \tag{1.6}$$

такие, что

$$K(s) > 0, \qquad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{1.7}$$

и составная матрица

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

положительно определена. Тогда нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи для системы (1.1)

$$\begin{aligned} &y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > \tau, \\ &y(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,\tau], \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\varphi(t) \in C[0,\tau]$ — заданная вектор-функция. Используя матрицы H и $K(s)$, рассмотрим следующую модификацию функционала Ляпунова–Красовского (1.4):

$$v(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds. \tag{1.10}$$

В силу условий (1.6), (1.7) этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \equiv \langle [HA + A^*H + K(0)]y(t), y(t)\rangle + \langle HBy(t-\tau), y(t)\rangle + \langle B^*Hy(t), y(t-\tau)\rangle -$$

$$- \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds.$$

Используя матрицу (1.8), полученное тождество можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \equiv -\left\langle C \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds. \tag{1.11}$$

Отсюда в силу условий теоремы вытекает, что функционал $v(t,y)$, определенный в (1.10), удовлетворяет условиям теоремы Красовского об асимптотической устойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (1.1) асимптотически устойчиво при любом $\tau > 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 1.2, то все корни квазимногочлена (1.2) лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$.*

§ 2. Оценки решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Используя функционал (1.10) и проведенные рассуждения, получим оценки решений системы линейных дифференциальных уравнений (1.1), которые можно рассматривать, как аналог оценки (1.5) для системы дифференциальных уравнений $y' = Ay$.

Теорема 2.1. *Пусть существуют матрицы H и $K(s) \in C^1[0,\tau]$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.2. Обозначим через $c_1 > 0$ минимальное собственное значение матрицы C из (1.8), через $k > 0$ максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{2.1}$$

Тогда для решения начальной задачи (1.9) справедливо следующее неравенство

$$\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le$$

$$\le e^{-\dfrac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}} \left[\langle Hy(\tau), y(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau} \langle K(\tau-s)y(s), y(s)\rangle\, ds\right], \quad t > \tau, \tag{2.2}$$

где

$$\varepsilon = \min\{c_1, k\|H\|\}. \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого решения $y(t)$ начальной задачи (1.9) выше было установлено тождество (1.11). По условию теоремы матрица C положительно определена, и $c_1 > 0$ является ее минимальным собственным числом, тогда

$$\left\langle C \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \ge c_1(\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^2) \ge$$

$$\ge c_1\|y(t)\|^2 \ge \frac{c_1}{\|H\|}\langle Hy(t), y(t)\rangle. \tag{2.4}$$

Из условия (2.1) имеем

$$-\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\rangle \ge k\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle. \tag{2.5}$$

Учитывая оценки (2.4) и (2.5), из тождества (1.11) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\left[\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds\right] +$$

$$+ \frac{c_1}{\|H\|}\langle Hy(t), y(t)\rangle + k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le 0.$$

Отсюда в силу определения (2.3) имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y) \le 0, \quad t > \tau,$$

т. е. в силу определения функционала $v(t,y)$ получаем неравенство (2.2).

Теорема доказана.

Из оценки (2.2) можно получить аналог неравенства (1.5).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для решения начальной задачи (1.9) справедливо неравенство*

$$\|y(t)\|^2 \le h_1^{-1} e^{-\dfrac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}} \left[\langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau} \langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right], \quad t > \tau,$$

где $h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, $\varepsilon > 0$ определено в (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство непосредственно вытекает из оценки (2.2).

Рассмотрим теперь квазилинейную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (0.1):

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau,$$

где A, B — постоянные вещественные матрицы размера $n \times n$, вещественно-значная вектор-функция $F(u, v)$ удовлетворяет условию Липшица и

$$\|F(u,v)\| \le q\|u\|^{1+\omega}, \quad q,\ \omega > 0. \tag{2.6}$$

Используя модифицированный функционал Ляпунова–Красовского вида (1.10), можно провести исследования асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво, и множество вещественно-значных функций*

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C[0,\tau] :\ \langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds < \left(\frac{\varepsilon h_1^{1+\omega/2}}{2q\|H\|^2} \right)^{2/\omega} \right\} \tag{2.7}$$

является множеством притяжения нулевого решения, где $h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, $\varepsilon > 0$ определено в (2.3). При этом для решения системы (0.1) с начальными данными $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ имеет место оценка

$$\|y(t)\|^2 \le h_1^{-1} e^{-\dfrac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}} \left[\langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds \right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2q\|H\|^2}{\varepsilon h_1^{1+\omega/2}} \left[\langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds \right]^{\omega/2} \right)^{-2/\omega}, \qquad t > \tau. \tag{2.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим начальную задачу для системы (0.1)

$$\begin{array}{rcl} y'(t) & = & Ay(t) + By(t-\tau) + F(y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) & = & \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,\tau], \end{array} \tag{2.9}$$

где $\varphi(t) \in C[0,\tau]$ — заданная вещественно-значная вектор-функция. Рассмотрим функционал $v(t, y)$, определенный в формуле (1.10). Как при доказательстве теоремы 1.2, имеем тождество

$$\frac{d}{dt} v(t,y) \equiv -\left\langle C \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^t \langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s)\rangle\, ds +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\,\langle HF(y(t), y(t-\tau)), y(t)\rangle.$$

Поскольку $c_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы C, в силу условия (2.6) отсюда получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -c_1\|y(t)\|^2 + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds + 2q\|H\|\|y(t)\|^{2+\omega}.$$

Учитывая неравенство (2.1) и определение функционала $v(t,y)$, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -\frac{\varepsilon}{\|H\|}v(t,y) + \frac{2q\|H\|}{h_1^{1+\omega/2}}v^{1+\omega/2}(t,y),$$

где $h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, $\varepsilon > 0$ определено в (2.3). Отсюда в силу неравенства Гронуола получаем оценку

$$v(t,y) \le e^{-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}}v(\tau,y)\left(1 - \frac{2q\|H\|^2}{\varepsilon h_1^{1+\omega/2}}v^{\omega/2}(\tau,y) + \frac{2q\|H\|^2}{\varepsilon h_1^{1+\omega/2}}e^{-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}}v^{\omega/2}(\tau,y)\right)^{-2/\omega} \le$$

$$\le e^{-\frac{\varepsilon(t-\tau)}{\|H\|}}v(\tau,y)\left(1 - \frac{2q\|H\|^2}{\varepsilon h_1^{1+\omega/2}}v^{\omega/2}(\tau,y)\right)^{-2/\omega}.$$

По определению

$$v(\tau,y) = \langle H\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^{\tau} \langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds.$$

Если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то выражение, стоящее в круглых скобках в последнем неравенстве, положительно. Отсюда для решения задачи (2.9) получаем оценку (2.8), из которой вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (0.1).

Теорема доказана.

В заключение сформулируем аналогичные результаты для начальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} &y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > \tau > 0, \\ &y(t) = \varphi(t) \quad \text{при} \quad t \in [0,\tau], \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами

$$A(t+T) = A(t), \qquad B(t+T) = B(t).$$

Теорема 2.3. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1[0,T], \quad H(0) = H(T) > 0$$

и

$$K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau], \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

такие, что составная матрица

$$C(t) = -\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0) & H(t)B(t) \\ B^*(t)H(t) & -K(\tau) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

положительно определена на отрезке $[0,T]$. *Тогда нулевое решение системы (2.10) асимптотически устойчиво.*

Теорема 2.4. *Пусть существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$, *удовлетворяющие условиям теоремы 2.3,* $c_1(t) > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы (2.11),* $k > 0$ *— максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Тогда при $t > \tau$ *для решения задачи (2.10) справедливо неравенство*

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le$$
$$\le e^{-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi} \left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau} \langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right],$$

где

$$\varepsilon(t) = \min\{c_1(t), k\|H(t)\|\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теорем основано на использовании модифицированного функционала Ляпунова–Красовского

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds, \quad t > \tau,$$

и результатов из [7].

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Литература

[1] *Н. Н. Красовский*, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.

[2] *Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин*, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, М., Наука, 1971.

[3] *Д. Г. Кореневский*, Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии, Киев, Наукова думка, 1989.

[4] *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн*, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Наука, 1970.

[5] *С. К. Годунов*, Современные аспекты линейной алгебры, Новосибирск, Научная книга, 1997.

[6] *J. P. Richard*, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, Automatica. **39** (2003). 1667–1694.

[7] *Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева*, Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами, Сиб. мат. журн., **42**, № 2 (2001). 332–348.

[8] *Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева*, Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений, Сиб. мат. журн., **45**, № 6 (2004). 1271–1284.