ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том V, 2005 г. Выпуск 3. С. 43–56

УДК 517.95

Разрешимость одной краевой задачи для псевдопараболических уравнений четвертого порядка[1]

С. Г. Пятков

Введение

Мы рассматриваем псевдопараболические уравнения вида

$$Mu = L_0(x,t,D_x)u_t + L_1(x,t,D_x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{0.1}$$

где $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ и L_1, L_0 — эллиптические операторы четвертого и второго порядка, соответственно:

$$L_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \quad L_1 u = \sum_{|\alpha|\le 4} a_\alpha(x,t)D^\alpha u.$$

Краевые условия имеют вид

$$u|_S = \varphi(x,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = \Gamma \times (0,T), \tag{0.2}$$

где n — вектор внешней нормали к Γ. Уравнение вида (0.1) возникает при исследовании обратных задач для параболических уравнений второго порядка, когда дополнительные данные задаются на боковой поверхности цилиндра, или при исследовании близких к ним задач (см., напр., [1, 2]). Уравнения такого вида или близкие к ним обычно называют уравнениями типа Соболева, поскольку они имеют такой же тип или близки с точки зрения свойств решений к известному уравнению С. Л. Соболева. Краевые задачи для них исследовались в работах Т. И. Зеленяка, С. В. Успенского, Г. В. Демиденко и многих других авторов (см. библиографию в [3]). В частности, для уравнения (1) исследовался вопрос о разрешимости задачи Коши ($G = \mathbb{R}^n$) и вопрос о разрешимости краевой

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 03–01–00819)

задачи (0.1), (0.2) в полупространстве ($G = \mathbb{R}^n_+$) [3]. В данной работе, используя весовые пространства Соболева, мы исследуем вопрос о разрешимости задачи (0.1), (0.2) в ограниченной области G.

Работа состоит из следующих частей. В § 1 мы приводим необходимые определения и вспомогательные результаты. § 2 посвящен разрешимости некоторых вспомогательных задач и наконец в § 3 посвящен разрешимости задачи (0.1), (0.2). Определения функциональных пространств в основном стандартные и могут быть найдены в [5, 6].

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(G)$, т. е.

$$(u, v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}\, dx,$$

Под $W_p^s(G)$, $W_p^s(S)$ (соответственно $B^s_{p,q}(G)$, $B^s_{p,q}(S)$) и т.д. понимаем пространства Соболева и Бесова. Полагаем $W_p^{-s}(G) = (\overset{\circ}{W}{}^s_q(G))'$ $(s > 0,\ p \in (1,\infty))$ [5], $W_p^{\alpha,\beta}(Q) = L_p(0,T; W_p^\alpha(G)) \cap L_p(G; W_p^\beta(0,T))$ и $W_p^{\alpha,\beta}(S) = L_p(0,T; W_p^\alpha(\Gamma)) \cap L_p(\Gamma; W_p^\beta(0,T))$. Аналогично определяем анизотропные пространства Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ и анизотропные пространства Бесова. Положим $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\}$, $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \ t > 0\}$, $\mathbb{R}^{n+1}_{++} = \mathbb{R}^n_+ \times R_+ = \{(x,t) :\ x \in \mathbb{R}^n_+, t > 0\}$.

Всюду в работе мы предполагаем, что $\Gamma \in C^4$ [7]. При этих условиях существует функция $\rho(x) \in C^4(\overline{G})$ такая, что для некоторых постоянных $\delta, M > 0$ в G выполнено неравенство $\delta\rho(x) \le \rho(x,\Gamma) \le M\rho(x)$, где $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние от $x \in G$ до Γ. Положим $H_p^k(G) = \{u \in L_p(G) :\ \rho D_x^\alpha u \in L_p(G),\ |\alpha| \le k\}$, $\overset{\circ}{H}{}^2_p(G) = \{u \in H_p^2(G) :\ u|_\Gamma = 0\}$, $\overset{\circ}{H}{}^k_p(G) = \{u \in H_p^k(G) :\ u|_\Gamma = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = 0\}$ $(k = 3, 4)$. Если $G = \mathbb{R}^n_+$, то определяем пространство $H_p^k(\mathbb{R}^n_+)$ аналогично, полагая $\rho = x_n$. Из неравенства Харди вытекает, что $H_p^k(G) \subset W_p^{k-1}(G)$, $H_p^k(\mathbb{R}^n_+) \subset W_p^{k-1}(\mathbb{R}^n_+)$. Обозначим через $L_{p,\rho}(G)$ $(L_{p,\rho}(Q))$ весовое пространство с нормой $\|u\|_{L_{p,\rho}(G)} = \|\rho u\|_{L_p(G)}$ $(\|u\|_{L_{p,\rho}(Q)} = \|\rho u\|_{L_p(Q)})$.

Пространства $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+)$, $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ определяем аналогично. Пусть $H_p = \{u \in L_p(0,T; H_p^4(G)) :\ u_t \in L_p(0,T; H_p^2(G))\}$. Положим $B^s_{p,\rho}(G) = (H_p^4(G), H_p^2(G))_{\theta,p}$ $(4 - 2\theta = s)$. Норма в этом пространстве описана в теореме 3.3.3 в [5] (там используется обозначение $W_p^k(G,\rho)$ вместо $H_p^k(G)$). Эта теорема приведена для случая границ класса C^∞. Однако, используя свойство инвариантности класса $H_p^4(G)$ относительно замены переменной класса C^4 нетрудно убедиться, что утверждение теоремы остается справедливым. При $p = 2$ соответствующее пространство $B^3_{2,\rho}(G)$ совпадает с $H_2^3(G)$.

Лемма 1.1. *Если $u \in H_p$, то $u(x,0) \in B^{4-2/p}_{p,\rho}(G)$ и для любой функции $u_0 \in B^{4-2/p}_{p,\rho}(G)$ существует функция $\Phi \in H_p$ такая, что $\Phi(x,0) = u_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 1.8.3 в [5].

Обозначим через P_0 оператор продолжения нулем функций, заданных при $t > 0$, на промежуток $t < 0$. Пусть $S' = \Gamma \times (-\infty, T)$. Приведем условия на функции из (0.2), при выполнении которых мы будем рассматривать нашу задачу:

$$\begin{gathered} u_0 \in B_{p,\rho}^{4-\frac{2}{p}}(G), \quad P_0(\varphi - \Phi) \in B_{p,p}^{3-\frac{1}{p},1}(S'), \\ \tfrac{\partial}{\partial t} P_0(\varphi - \Phi) \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p},0}(S'),\ P_0\big(\psi - \tfrac{\partial \Phi}{\partial n}\big) \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S'), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где Φ — функция, построенная по функции u_0 в лемме 1.1. Условия (1.1) — условия гладкости искомых функции и одновременно их условия согласования при $t = 0$.

Лемма 1.2. *При выполнении условий* (1.1) *существует функция* $\Psi \in H_p$ *такая, что* $\Psi|_S = \varphi$, $\frac{\partial \Psi}{\partial n}\big|_S = \psi$, $\Psi(x,0) = u_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на стандартной схеме связанной с построением покрытия границы и разбиения единицы, с последующим распрямлением границы [6], использованием теоремы 1.8.3 в [5] и интерполяционных свойств пространств Соболева-Бесова [5, 8].

Лемма 1.2 позволяет свести задачу (0.1), (0.2) к однородной и тем самым мы всегда можем считать что данные в условиях (0.2) нулевые.

Лемма 1.3. *Справедливы вложения* $L_{p,\rho}(G) \subset W_p^{-1}(G)$, $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+) \subset W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ $(p \in (1,\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно на гладких функциях f получить неравенства

$$\|f\|_{W_p^{-1}(G)} \le c\|f\|_{L_{p,\rho}(G)}, \quad \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)} \le c\|f\|_{L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{1.2}$$

второе из которых следует непосредственно из неравенства Харди [5] и определения нормы в $W_p^{-1}(G)$, а первое из соответствующих аналогов неравенства Харди (см. пункт 3.2.6 в [5] и § 1.4, гл. 3 в [9]).

Сформулируем основные предположения на операторы L_0, L_1.

a) Всюду в работе считаем, что коэффициенты оператора L_0 и старшие коэффициенты L_1 (a_α при $|\alpha| = 4$) вещественны.

b) Для некоторой постоянной $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(L_0 u, u) \ge \delta \|u\|^2_{W_2^1(G)} \quad \forall u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}_2^1(G), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

c) $a_{i,j} \in C^{2,0}(\overline{Q})$, $b_i \in C^{1,0}(\overline{Q})$ $(i,j = 1,\ldots,n)$, $c \in C(\overline{Q})$, $a_\alpha \in C^{\max(|\alpha|-2,0),0}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \le 4)$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_0|\xi|^2, \quad \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha \xi^\alpha \ge \delta_0|\xi|^4 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n, (x,t) \in Q), \ \delta_0 > 0. \tag{1.4}$$

Легко увидеть [10–11], что справедлива

Лемма 1.4. *При выполнении* a)–c) L_0 — *изоморфизм пространств* $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}_p^2(G)$ *и* $L_{p,\rho}(G)$ $(1 < p < \infty)$.

§ 2. Вспомогательные задачи

Результаты, приведенные в этом параграфе представляют и самостоятельный интерес. Рассмотрим задачи

$$Mu = L_0 u_t + L_1 u = f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0,\ u|_{x_n} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ t > 0, \tag{2.1}$$

$$Mu = L_0 u_t + L_1 u = f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

$$Mu = pL_0 u + L_1 u = f(x), \quad u|_{x_n} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \operatorname{Re} p \geq 0, \tag{2.3}$$

$$Mu = pL_0 u + L_1 u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \operatorname{Re} p \geq 0. \tag{2.4}$$

Здесь L_0, L_1 — эллиптические операторы с постоянными вещественными коэффициентами вида

$$L_0(D_x)u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu \ (c > 0), \quad L_1(D_x)u = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha D^\alpha u + u$$

и p — комплексный параметр. Предположим, что для некоторой положительной постоянной δ_0 выполнены неравенства (1.4). Рассмотрим многочлены

$$M(i\xi,\tau) = L_0(i\xi)\tau + L_1(i\xi), \quad M'(i\xi,\tau,\zeta) = L_0'(i\xi,\zeta)\tau + L_1'(i\xi,\zeta), \quad \tau = i\eta + \gamma\ (\gamma \geq 0)$$

$$L_0'(i\xi,\zeta) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j}\xi_k\xi_j + i\sum_{k=1}^{n} b_k\xi_k\zeta + c\zeta^2; \quad L_1'(i\xi,\zeta) = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha \xi^\alpha + \zeta^4;$$

где i — мнимая единица. Имеем $L_0'(i\xi,1) = L_0(i\xi)$, $L_1'(i\xi,1) = L_1(i\xi)$.

Лемма 2.1. *Уравнение*

$$M(i\xi', i\lambda, \tau) = 0, \tag{2.5}$$

относительно параметра λ не имеет вещественных корней при всех $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\operatorname{Re}\tau \geq 0$. Корни располагаются поровну между верхней и нижней полуплоскостью и при соответствующей нумерации удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} &\delta_1\langle s'\rangle \leq \pm\operatorname{Im}\lambda_1^{\pm} \leq |\lambda_1^{\pm}| \leq \delta_2\langle s'\rangle \ (\langle s'\rangle = (1+|\xi'|^2)^{1/2}), \\ &\delta_1\langle s\rangle \leq \pm\operatorname{Im}\lambda_2^{\pm} \leq |\lambda_2^{\pm}| \leq \delta_2\langle s\rangle \ (\langle s\rangle = (1+|\tau|^2+|\xi'|^4)^{1/4}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\delta_i > 0$ — постоянные, не зависящие от параметров ξ', τ. При $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\tau \geq 0$ справедливо неравенство

$$|M(i\xi,\tau)| \geq \delta_3(\langle s'\rangle^2 + \xi_n^2)(\langle s\rangle^4 + \xi_n^4)^{1/2}, \quad \delta_3 > 0,$$

где постоянная δ_3 не зависит от ξ', τ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко устанавливается, что многочлен $M'(i\xi', i\lambda, \tau, \zeta)$ удовлетворяет условиям леммы 10.1 § 10 гл.4 в [3]. Тогда его корни удовлетворяют соответствующим неравенствам, которые при $\zeta = 1$ совпадают с (2.6).

Симметрические функции корней уравнения (2.5) $\alpha^\pm = \lambda_1^\pm + \lambda_2^\pm$ и $\beta^\pm = \lambda_1^\pm\lambda_2^\pm$) являются бесконечно дифференцируемыми функциями параметров ξ', τ. Более того, справедлива

Лемма 2.2. *Найдется постоянная $c = c(\beta)$ такая, что*

$$\begin{aligned} |D^\beta_{\xi'}\alpha^\pm| \le c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}, \quad |\tfrac{\partial}{\partial\tau}D^\beta_{\xi'}\alpha^\pm| \le c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle^{-2}, \\ |D^\beta_{\xi'}\beta^\pm| \le c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle, \quad |\tfrac{\partial}{\partial\tau}D^\beta_{\xi'}\beta^\pm| \le c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle^{-1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство не является сложным и использует математическую индукцию и определение функций $\alpha^\pm$, $\beta^\pm$. Мы его опустим.

Теорема 2.1. *Пусть $q \in (1,\infty)$. При всех $f \in L_q(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ задача (2.2) имеет единственное решение u такое, что $u \in L_q(0,\infty; W^4_q(\mathbb{R}^n))$, $u_t \in L_q(0,\infty; W^2_q(\mathbb{R}^n))$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_q(0,\infty;W^4_q(\mathbb{R}^n))} + \|u_t\|_{L_q(0,\infty;W^2_q(\mathbb{R}^n_+))} \le c\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1}_+)}. \tag{2.9}$$

При всех p с $\operatorname{Re} p \ge 0$ и $f \in L_q(\mathbb{R}^n)$ задача (2.4) имеет единственное решение из $W^4_q(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка

$$(1+|p|)\|u\|_{W^2_q(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^4_q(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.10}$$

где постоянная c не зависит от p с $\operatorname{Re} p \ge 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения вытекает из теоремы 3.3 (§ 3, гл.2) в [3]. Решение задачи (2.4) имеет вид

$$u(x) = F^{-1}_\xi \frac{1}{M(i\xi,p)} F_x(f)(\xi), \tag{2.11}$$

где символы F_x, F^{-1}_ξ обозначают преобразование Фурье, действующее по переменным x и обратное преобразование Фурье, действующее по переменным $\xi \in \mathbb{R}^n$. Функции $(i\xi)^\alpha/M(i\xi,p)$ являются мультипликаторами Фурье при всех $|\alpha| \le 4$ (см. лемму 3.3 § 3 гл.2 в [3]), откуда легко вытекает утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $q \in (1,\infty)$. Если $f \in L_{q,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, то задача (2.1) имеет единственное решение u такое, что $u \in L_q(0,\infty; H^4_q(\mathbb{R}^n_+))$, $u_t \in L_q(0,\infty; H^2_q(\mathbb{R}^n_+))$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(\mathbb{R}^n_+))} + \|u_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(\mathbb{R}^n_+))} \le c\|f\|_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})}. \tag{2.12}$$

При всех p с $\operatorname{Re} p \ge 0$ и $f \in L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)$ задача (2.3) имеет единственное решение из $H^4_q(\mathbb{R}^n_+)$ и справедлива оценка

$$(1+|p|)\|u\|_{H^2_q(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{H^4_q(\mathbb{R}^n_+)} \le c\|f\|_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводим в соответствии со схемой, изложенной в [3]. Фактически, существование решений обосновано в [3]. Нам необходимо только записать соответствующие представления и получить нужные оценки, описав отличия, связанные с рассмотрением весовых пространств. Пусть вначале функция f бесконечно дифференцируема по совокупности переменных и имеет компактный носитель.

Положим $f_0 = \begin{cases} f(x', x_n, t), & x_n \geq 0 \\ -f(x', -x_n, t), & x_n < 0 \end{cases}$. Считаем, что при $t < 0$ функция f_0 равна нулю. Обозначим через u_0 решение задачи (2.2) с правой частью f_0, продолженное нулем при $t < 0$. Применив преобразование Фурье по переменным x' и преобразование Лапласа по переменной t к (2.1), мы придем к представлению (см. [3])

$$v_0 = F^{-1}_{\xi',\eta}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x_n} J_+(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n\Big), \quad (2.14)$$

где $\tau = i\eta + \gamma$, $\gamma \geq 0$, $v_0 = e^{-\gamma t} u_0$, $g = F_{x',t}(e^{-\gamma t} f_0(x', x_n, t))$, а функции $J_\pm$ имеют вид

$$J_\pm(\xi', x_n, \tau) = \frac{\pm 1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^\pm} \frac{e^{ix_n\lambda}}{M(i\xi', i\lambda, \tau)}\, d\lambda,$$

где $\Gamma^\pm$ — замкнутые гладкие кривые, лежащие в верхней и нижней полуплоскости, соответственно, и охватывающие все корни уравнения $M(i\xi', i\lambda, \tau) = 0$ из верхней (нижней) полуплоскости. Справедливы равенства (см. [3, § 4, § 10, гл. 4])

$$F_{x_n}(\theta(x_n) J_+^{(k)}(x_n) + \theta(-x_n) J_-^{(k)}(x_n)) =$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\Big(\frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)} - \frac{\delta_{4k}}{a_4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 4, \quad (2.15)$$

$$J_+^{(k)} - J_-^{(k)}|_{x_n=0} = \frac{\delta_{3k}}{a_4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

где θ — функция Хевисайда, δ_{ik} — символ Кронекера, a_4 коэффициент перед λ^4 в многочлене $M(i\xi', i\lambda, \tau)$ и $J_\pm^{(k)}$ — k-я производная по переменной x_n. Из этих равенств легко получим, что

$$F_{x_n}(x_n\theta(x_n) J_+^{(k)}(x_n) + x_n\theta(-x_n) J_-^{(k)}(x_n)) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2.17)$$

Из (2.14)–(2.17) получим

$$x_n \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\beta_{x'} v_0 = F^{-1}_{\xi'} F^{-1}_\eta (i\xi')^\beta (i\eta)^l \Big(\int\limits_{-\infty}^{x_n} (x_n - y_n) J_+^{(k)}(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n +$$
$$+ \int\limits_{x_n}^{\infty} (x_n - y_n) J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{x_n} J_+^{(k)}(\xi', x_n - y_n, \tau) y_n g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) y_n g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n\Big), \quad (2.18)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $l = 0, 1$. Используя (2.14)–(2.18), выводим, что

$$x_n \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\beta_{x'} v_0 = F^{-1}_{\xi,\eta} (i\xi')^\beta (i\eta)^l \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big[\frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)}\Big] F_{x,t}(e^{-\gamma t} f_0)(\xi, \eta) +$$
$$+ F^{-1}_{\xi,\eta} \frac{(i\xi')^\beta (i\eta)^l (i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)} F_{x,t}(e^{-\gamma t} x_n f_0(x, t))(\xi, \eta). \quad (2.19)$$

Как вытекает из результатов [3] (см. лемму 3.3 гл.2) функции

$$\frac{(i\xi')^{\beta}(i\eta)^{l}(i\xi_n)^{k}}{M(i\xi',i\xi_n,\tau)}, \quad |\beta|+k+2l\le 4,$$

являются мультипликаторами Фурье. Аналогично устанавливаем, что и функции

$$(i\xi')^{\beta}(i\eta)^{l}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\Big[\frac{(i\xi_n)^{k}}{M(i\xi',i\xi_n,\tau)}\Big], \quad |\beta|+k+2l\le 4,$$

являются мультипликаторами. Тогда из (2.19) вытекает оценка

$$\Big\|x_n\,\frac{\partial^k}{\partial x_n^k}\,\frac{\partial^l}{\partial t^l}\,D_{x'}^{\beta}\,v_0\Big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\le$$
$$\le c\big(\big\|F_{\xi,\eta}^{-1}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{-1}{2}}F_{x,t}(e^{-\gamma t}f_0)\big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}+\|e^{-\gamma t}x_nf_0\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\big),$$

которую можно также переписать в виде (см. [5])

$$\Big\|x_n\frac{\partial^k}{\partial x_n^k}\frac{\partial^l}{\partial t^l}D_{x'}^{\beta}v_0\Big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\le$$
$$\le c\big(\big\|e^{-\gamma t}f_0\big\|_{L_q(0,\infty;W_q^{-1}(\mathbb{R}^n))}+\|e^{-\gamma t}x_nf_0\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\big), \quad \gamma\ge 0, \tag{2.20}$$

где $l=0,1$, $k=0,1,2,3,4$, $|\beta|+k+2l\le 4$. Запишем представление для решений задачи (2.1) из [3], упростив его в данной конкретной ситуации. Имеем

$$F_{x',t}u_1=\omega_1+\omega_2+F_{x',t}v_0, \quad \omega_1=J_1(i\xi',x_n,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_1(i\xi',y_n,\tau)g(\xi',y_n,\tau)\,dy_n,$$
$$\omega_2=J_2(i\xi',x_n,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_2(i\xi',y_n,\tau)g(\xi',y_n,\tau)\,dy_n, \quad u_1=e^{-\gamma t}u(x,t), \tag{2.21}$$

где

$$J_1=\frac{\lambda_1^+e^{ix_n\lambda_2^+}-\lambda_2^+e^{ix_n\lambda_1^+}}{\lambda_1^+-\lambda_2^+}, \quad J_2=\frac{e^{ix_n\lambda_1^+}-e^{ix_n\lambda_2^+}}{i(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},$$
$$I_1=-(J_+(-y_n)\theta(-y_n)+\theta(y_n)J_-(-y_n)), \quad I_2=-(J_+'(-y_n)\theta(-y_n)+\theta(y_n)J_-'(-y_n)).$$

Далее используем рассуждения из [3] (см., например, § 6 гл.4). Имеем

$$x_n\omega_j^{(k)}=-\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial z_n}(x_n+z_n)J_j^{(k)}(x_n+z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n=$$
$$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n+z_n)\frac{\partial}{\partial z_n}\big((x_n+z_n)J_j^{(k+1)}(x_n+z_n)\big)\theta(z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n+z_n)(x_n+z_n)J_j^{(k)}(x_n+z_n)\theta(z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j'(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n.$$

В полученном представлении правая часть уже определена при всех $x_n \in \mathbb{R}$. Заменяя здесь переменную z_n на $-z_n$, и используя формулу преобразования Фурье свертки, придем к равенствам

$$F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_j^{(k)}) =$$
$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}} F^{-1}_{\xi,\eta} \Big[\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_j^{(k)}(x_n)\theta(x_n))(\xi,\eta) F_{x,t} F^{-1}_{\xi',\eta}(\theta(-x_n) \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n) -$$
$$- i \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_i^{(k)}(x_n)\theta(x_n))(\xi,\eta) F_{x,t} F^{-1}_{\xi',\eta}(\theta(-x_n) \int\limits_{-\infty}^{\infty} I'_j(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n) \Big]. \tag{2.22}$$

Величины $F_{x_n}(J_j^{(k)}(x_n)\theta(x_n))$ легко находятся в явном виде. Например, при $k = 0$ имеем

$$F_{x_n}(J_1\theta) = \frac{-i(\xi_n - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+))}{(2\pi)^{1/2}(\xi_n - \lambda_1^+)(\xi_n - \lambda_2^+)}, \quad F_{x_n}(J_2\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(\xi_n - \lambda_1^+)(\xi_n - \lambda_2^+)}. \tag{2.23}$$

Аналогичный вид имеют и преобразования Фурье оставшихся функций $F_{x_n}(J_j^{(k)})$. Используя лемму 2.2, теорему Лизоркина о мультипликаторах и индукцию, нетрудно установить, что функции

$$\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_1^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s' \rangle^{-1} \langle s \rangle^{-2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_1^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s \rangle^{-2},$$
$$\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_2^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s \rangle^{-2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_j^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s \rangle^{-1}$$

являются мультипликаторами Фурье (типа (q,q)) на $\mathbb{R}^{n+1}$ при $|\beta| + 2l + k \le 4$, $l = 0, 1$. Тогда из представления (2.22) вытекают оценки

$$\|D^\beta_{x'} D^l_t F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_1^{(k)})\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} \le c \|F^{-1}_{\xi,\eta} \langle s' \rangle \langle s \rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_1(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} +$$
$$+ c \|F^{-1}_{\xi,\eta} \langle s \rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I'_1(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}, \tag{2.24}$$

$$\|D^\beta_{x'} D^l_t F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_2^{(k)})\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} \le c \|F^{-1}_{\xi,\eta} \langle s \rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_2(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} +$$
$$+ c \|F^{-1}_{\xi,\eta} \langle s \rangle F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I'_2(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{2.25}$$

Используя (2.14)–(2.17) легко получить, что

$$F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_1^{(l)}(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n) = -\frac{(i\xi_n)^l}{M(i\xi, \tau)} F_{x_n}(g)(\xi,\eta), \quad l = 0, 1, 2. \tag{2.26}$$

Кроме того [3], можно убедиться, что функции

$$\frac{\langle s'\rangle\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}{M(i\xi,\tau)},\ \frac{\xi_n\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}{M(i\xi,\tau)},$$
$$\frac{\xi_n\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}{M(i\xi,\tau)},\ \frac{\xi_n^2\langle s\rangle(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}}{M(i\xi,\tau)}$$

также являются мультипликаторами. Тогда из (2.24), (2.25) вытекают оценки

$$\|D^\beta_{x'}D^l_tF^{-1}_{\xi,\eta}F_{x_n}(x_n\omega_j^{(k)})\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}\le c\|F^{-1}_{\xi,\eta}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{-1}{2}}F_{x,t}(e^{-\gamma t}f_0)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}=$$
$$=c\|e^{-\gamma t}f_0\|_{L_p(0,\infty;W_p^{-1}(\mathbb{R}^n))},\quad |\beta|+k+2l\le 4,\ j=1,2 \tag{2.27}$$

Из (2.27), (2.20), определения f_0 и леммы 1.3 вытекает первая часть утверждения теоремы. Разрешимость задачи (2.3) и оценки устанавливаются по аналогии. Рассуждения в этом случае только упрощаются.

Рассмотрим задачу

$$Mu=pL_0u+L_1u=f(x)\ (x\in G,\ \operatorname{Re}p\ge 0),u|_\Gamma=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \tag{2.28}$$

где L_0,L_1 — эллиптические операторы с коэффициентами не зависящими от переменной t.

Теорема 2.3. *Пусть $q\in(1,\infty)$ и операторы L_0,L_1 удовлетворяют условиям* a)-c). *Тогда найдется $\gamma_0>0$ такое что при всех p с $\operatorname{Re}p\ge\gamma_0$ и $f\in L_{q,\rho}(G)$ задача* (2.28) *имеет единственное решение из $H^4_q(G)$ и справедлива оценка*

$$(1+|p|)\|u\|_{H^2_q(G)}+\|u\|_{H^4_q(G)}\le c\|f\|_{L_{q,\rho}(G)}, \tag{2.29}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим априорную оценку. Умножим уравнение (2.28) на $\overline{p}u$ и проинтегрируем уравнение по области G. Тогда получим

$$|p|^2(L_0u,u)+\overline{p}(L_1u,u)=\overline{p}(f,u). \tag{2.30}$$

В силу неравенства $\operatorname{Re}(L_0u,u)\ge\delta\|u\|^2_{W_2^1(G)}$ имеем

$$|p|^2\delta\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\operatorname{Re}\overline{p}\operatorname{Re}(L_1u,u)+\operatorname{Im}p\operatorname{Im}(L_1u,u)\le\operatorname{Re}\overline{p}(f,u),\quad p=\gamma+i\eta.$$

Из неравенства Гординга и неравенства Коши с ε вытекает, что

$$|p|^2\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\gamma\|u\|^2_{W_2^2(G)}\le c(\gamma\|u\|^2_{L_2(G)}+\varepsilon\eta^2\|u\|^2_{W_2^1(G)}+c(\varepsilon)\|u\|^2_{W_2^2(G)}+|p||(f,u)|).$$

Выберем $\varepsilon=1/(4c)$ и затем $\gamma_0\ge\max(4c,4cc(\varepsilon))$. Тогда из последнего неравенства, используя лемму 1.3, получим, что при $\gamma\ge\gamma_0>0$ выполнено

$$(1+|p|^2)\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\gamma\|u\|^2_{W_2^2(G)}\le c_1\|\rho f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.31}$$

Возвращаясь к равенству (2.30) и используя (2.31) окончательно получим оценку

$$(1+|p|^2)\|u\|^2_{W_2^1(G)} + (1+|p|)\|u\|^2_{W_2^2(G)} \le c_2\|\rho f\|^2_{L_2(G)} \tag{2.32}$$

справедливую при $\operatorname{Re} p \ge \gamma_0$, что мы далее считаем выполненным. Без ограничения общности можем считать в (2.28), что $f \in C_0^\infty(G)$ в силу плотности этого класса в $L_{q,\rho}(G)$. Оценка (2.32) гарантирует (см. [10–11]), что при $\gamma \ge \gamma_0 > 0$ задача (2.28) имеет решение принадлежащее каждому из пространств $W_q^4(G)$ $(q \in (1,\infty))$. Фиксируем $\delta > 0$ и построим покрытие границы Γ областями U_j $(j \le m)$ такими, что $\rho(\partial \cup U_j, \Gamma) \ge 3\delta/4$ и $\operatorname{diam} U_j \le \delta$. Достроим это покрытие до покрытия $\{U_j\}_{j=1}^N$ $(\operatorname{diam} U_j \le \delta)$ всей области G, причем такого, что $\rho(U_j,\Gamma) \ge \delta/2$ $(j > m)$. Очевидным образом это возможно. Также без ограничения общности считаем, что кратность покрытия $k(n)$ не зависит от параметра δ. Построим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_j\}$, подчиненное покрытию $\{U_j\}$ и систему гладких функций $\{\psi_j\}$ таких, что $\operatorname{supp}\psi_j \subset U_j$, $\psi_j(x) \equiv 1$ на $\operatorname{supp}\varphi_j$. Фиксируем $j \le m$ и сделаем в уравнении (2.28) преобразование координат $x = x(z)$ $(z = z(x))$ класса C^4 выпрямляющее границу (см., например, [6,7]). Положим $K_j = z(U_j \cap G) \subset \{z_n > 0\}$. Получим уравнение $pL_0(z,D_z)u + L_1(z,D_z)u = f$. Умножая это уравнение на φ_j и выбирая произвольную точку $z_0 \in K_j$, придем к уравнению

$$p(L_0'(z_0,D_z)+1)(\varphi_j u) + (L_1'(z_0,D_z)+1)(\varphi_j u) = f\varphi_j + pL_{00}(z,D_z)u + L_{01}(z,D_z)u +$$

$$+ p((L_0'(z_0,D_z) - L_0'(z,D_z))(\varphi_j u) + (L_1'(z_0,D_z) - L_1'(z,D_z))(\varphi_j u),$$

где L_{00}, L_{01} — дифференциальные операторы, содержащие соответственно 1-е и 3-е производные от функции u, операторы L_0', L_1' — главные части операторов L_0, L_1. Продолжая функцию $\varphi_j u(z)$ нулем на все $\mathbb{R}^n_+$ и используя теорему 2.2, получим оценку

$$\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(\mathbb{R}^+)}|p|^q + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(\mathbb{R}^n_+)} \le c_1(\delta)(|p|^q\|\psi_j u\|^q_{H_q^1(\mathbb{R}^n_+)} + \|\psi_j u\|^q_{H_q^3(\mathbb{R}^n_+)}) +$$

$$+ \varepsilon(\delta)(|p|^q\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(\mathbb{R}^n_+)}) + c\|f\varphi_j\|^q_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.33}$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$, $c_i(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ (величина $\varepsilon(\delta)$ зависит от модулей непрерывности коэффициентов). При достаточно малом δ $\varepsilon(\delta) \le 1/4$. Выбирая и фиксируя такое δ и затем переходя к исходной системе координат, получим

$$\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(G)}|p|^q + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(G)} \le c\|f\varphi_j\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_2(|p|^q\|\psi_j u\|^q_{H_q^1(G)} + \|\psi_j u\|^q_{H_q^3(G)}). \tag{2.34}$$

В случае $j > m$ дополнительной замены переменной мы не делаем и, используя уже теорему 2.1, получаем неравенство вида (2.34). Просуммировав неравенства вида (2.34) по j, придем к неравенству

$$\|u\|^q_{H_q^2(G)}|p|^q + \|u\|^q_{H_q^4(G)} \le c\|f\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_3(|p|^q\|u\|^q_{H_q^1(G)} + \|u\|^q_{H_q^3(G)}). \tag{2.35}$$

При каждом $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon)$ такое, что

$$\|u\|^q_{H^i_q(G)} \le \varepsilon \|u\|^q_{H^{i+1}_q(G)} + c(\varepsilon)\|u\|^q_{L_q(G)} \quad (i = 1, 3).$$

Используя это неравенство с достаточно малым ε и (2.35), придем к оценке

$$\|u\|^q_{H^2_q(G)}|p|^q + \|u\|^q_{H^4_q(G)} \le c\|f\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_4|p|^q\|u\|^q_{L_q(G)}. \tag{2.36}$$

Из уравнения (2.28) получим

$$(pu, L^*_0 v) + (L_1 u, v) = (f, v), \quad v \in W^2_r(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_r(G), \quad r = q/(q-1). \tag{2.37}$$

Разделив (2.37) на норму $\|L^*_0 v\|_{L_r(G)}$ (отметим, что задача $L^*_0 v = f$, $v|_\Gamma = 0$ имеет единственное решение из $W^2_r(G)$ при $f \in L_r(G)$), используя неравенство

$$|(D^\alpha u, D^\beta v)| \le c\|u\|_{W^{3-\delta}_q(G)}\|v\|_{W^{1+\delta}_r(G)}, \ \ \delta < 1/r, \ |\alpha| = 3, \ |\beta| = 1, \tag{2.38}$$

и лемму 1.3, придем к неравенству

$$\|pu\|_{L_q(G)} \le c\|f\|_{L_{q,\rho}(G)} + c_1\|u\|_{W^{3-\delta}_q(G)}. \tag{2.39}$$

Тогда из очевидной оценки

$$\|u\|_{W^{3-\delta}_q} \le \varepsilon\|u\|_{H^4_q(G)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_q(G)},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, (2.39), (2.36) получим оценку (2.29), если необходимо увеличивая при этом величину γ_0. Из (2.29) вытекает существование решений. Единственность вытекает из оценки (2.32) и из того факта, что решение из класса полученного в теореме с нулевой правой частью на самом деле принадлежит классу $W^4_p(G)$ при всех $p < \infty$ [10–11]. Рассмотрим задачу

$$Mu = L_0(x, D_x)u_t + L_1(x, D_x)u = f(x, t), \quad u|_{S_\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_\infty} = 0, \quad u|_{t=0} = 0,$$

где L_0, L_1 — эллиптические операторы, удовлетворяющие условиям теоремы 2.3, $S_\infty = \Gamma \times (0, \infty)$, $(x, t) \in Q_\infty = G \times (0, \infty)$. Сделав замену $u = e^{\gamma t}v$, мы придем к задаче

$$L_0 v_t + L_1(x, D_x)v + \gamma L_0 v = g(x, t) = e^{-\gamma t} f(x, t), \quad v|_{S_\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{S_\infty} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{2.40}$$

Теорема 2.4. *Пусть* $q \in (1, \infty)$. *Найдется* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $\gamma \ge \gamma_0$ *и всех* $g \in L_{q,\rho}(Q_\infty)$ *задача* (2.40) *имеет единственное решение* v *такое, что* $v \in L_q(0, \infty; H^4_q(G))$, $v_t \in L_q(0, \infty; H^2_q(G))$ *и справедливы оценки*

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(G))} + \|v_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.41}$$

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} \le c\frac{1}{\gamma}\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.42}$$

где постоянная c *не зависит от* γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве постоянной γ_0 постоянную полученную в теореме 2.3. Используя лемму 1.4, сведем задачу (2.40) к задаче

$$v_t + Av = g_0, \quad A = L_0^{-1}(L_1 + \gamma L_0), \quad g_0 = L_0^{-1}(g), \tag{2.43}$$

где оператор A рассматривается как оператор из $L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$ в $L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$ с областью определения $L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G))$. В силу теоремы 2.3 A — генератор аналитической полугруппы. Положим $B^s_q = (\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G), \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))_{1-\theta,q}$ ($\theta = (s-2)/2$, $s \in (2,4)$). Как вытекает из известных результатов (см., например, [12]) при всех $g_0 \in L_q(0,\infty;B^s_q)$ задача (2.43) имеет единственное решение из класса $Av \in L_q(0,\infty;B^s_q)$, $v_t \in L_q(0,\infty;B^s_q)$ причем справедлива оценка

$$\|v_t\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} + \|Av\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} \le c\|g_0\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)}, \tag{2.44}$$

где постоянная c зависит от нормы резольвенты $(A+\lambda)^{-1}$ ($\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$) и соответственно она не будет зависеть от $\gamma \ge \gamma_0$. Отметим, что класс $L_q(0,\infty;B^s_q)$ плотно вложен в $L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$. В силу этого считаем, что $g_0 \in L_q(0,\infty;B^s_q)$. Получим априорные оценки, позволяющие доказать разрешимость задачи. Имеем вложения $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G) \subset W^3_q(G)$, $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G) \subset W^1_q(G)$ и таким образом $B^s_q \subset (W^3_q(G), W^1_q(G))_{1-\theta,q} = W^{s-1}_q(G)$ ($s \ne 3, \theta = (s-2)/2$, $s \in (2,4)$). Применяя оператор A^{-1} к (2.43), получим, что функция $v_0 = A^{-1}v$ удовлетворяет уравнению (2.43) с правой частью $A^{-1}g_0$ и таким образом удовлетворяет оценке (2.44), где вместо g_0 стоит $A^{-1}g_0$. В частности, при $s > 4-\delta$ имеем оценку

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))} \le c_1\|A^{-1}g_0\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} \le c_2\|g_0\|_{L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))} \le c_3\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.45}$$

где постоянные c_i не зависят от γ, $\delta \in (0,1)$. Повторяя рассуждения, использованные при получении оценки (2.39), получим оценку

$$\|v_t + \gamma v\|_{L_q(Q_\infty)} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} + c\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))}, \quad \delta < 1/r,\ r = q/(q-1), \tag{2.46}$$

где постоянная c не зависит от γ. Из (2.45), (2.46) вытекает оценка

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))} + \|v_t\|_{L_q(Q_\infty)} + \gamma\|v\|_{L_q(Q_\infty)} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} \tag{2.47}$$

с постоянной c, не зависящей от $\gamma \ge \gamma_0$. Далее, повторяем рассуждения, использованные при получении оценки (2.36) теперь уже в области Q. Строим тоже самое покрытие G и разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}$ и используем первую половину теорем 2.1 и 2.2. Аналог неравенства (2.36) запишется в виде

$$\|v_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} + \|v\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(G))} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} + \|v_t\|_{L_q(Q_\infty)} + \gamma\|v\|_{L_q(Q_\infty)}. \tag{2.48}$$

Неравенства (2.47), (2.48) дают оценку (2.41). Оценка (2.42) вытекает непосредственно из уравнения и (2.41). Единственность решения вытекает из того факта, что решение удовлетворяет уравнению (2.43) [12].

§ 3. Основные результаты

Основной результат этого параграфа — теорема о разрешимости задачи (0.1), (0.2).

Теорема 2.4. *Пусть* $q \in (1, \infty)$, *данные задачи удовлетворяют условиям* (1.1) *и операторы условиям* a)–c). *Тогда при* $f \in L_{q,\rho}(Q)$ *задача* (0.1), (0.2) *имеет единственное решение* $u \in H_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1.2, сведем задачу к однородной. Построим продолжение коэффициентов операторов $L_0(x, t, D_x), L_1(x, t, D_x)$ и правой части на область $(x, t) \in G \times [T, \infty)$ с сохранением класса и условий a)–c). Может считать, что при $t \geq T + 1$ коэффициенты — постоянные, а правая часть в уравнении равна 0. Построим покрытие $[0, T]$ интервалами $U_k = ((k-1)\delta - \delta/4, k\delta + \delta/4)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $N\delta = T$ и соответствующее разбиение единицы $\{\varphi_j(t)\}$. Построим также функции $\psi_j(t) \in C_0^\infty(U_j)$ такие, что $\psi_j(t) \equiv 1$ на $\operatorname{supp} \varphi_j$. Сделаем в (0.1) замену $u = e^{\gamma t}v$. Получим уравнение

$$M_\gamma(x, t, D_x)v = M(x, t, D_x)v + \gamma L_0(x, t, D_x)v = e^{-\gamma t}f. \tag{3.1}$$

Обозначим через $R_i(g)$ решение задачи

$$M_\gamma(x, t_i, D_x)v = g\varphi_i,\ v|_{t=t_i} = 0,\ v|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad t_i = (i-1)\delta - \delta/4,\ t_1 = 0.$$

В силу теоремы 2.4 решение этой задачи существует и функция $v(t + t_i)$ удовлетворяет (2.41) и (2.42). Ищем решение уравнения (3.1) в виде $u = \sum_{i=1}^N \psi_i R_i(g)$. Тогда

$$M_\gamma u = \sum_{i=1}^N \psi_i M_\gamma(t_i) R_i(g) + \sum_{i=1}^N \psi_i (M_\gamma(t) - M_\gamma(t_i)) R_i(g) + \sum_{i=1}^N \psi_{it} L_0 R_i(g) =$$

$$= g + R_{01}(g) + R_{02}(g) = e^{-\gamma t} f, \quad f, g \in L_{q,\rho}(Q). \tag{3.2}$$

В силу теоремы 2.4 имеем оценки

$$\|R_{01}g\|_{L_{q,\rho}(Q)} \leq \varepsilon(\delta)\|g\|_{L_{q,\rho}(Q)}, \quad \|R_{02}g\|_{L_{q,\rho}(Q)} \leq \frac{c(\delta)}{\gamma}\|g\|_{L_{q,\rho}(Q)},$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ и $c(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Выбрав параметр δ а затем и параметр γ, мы можем добиться того, что $\|R_{01} + R_{02}\|_{L_{q,\rho}(Q) \to L_{q,\rho}(Q)} < 1$. Тогда уравнение (3.2) имеет единственное решение и значит исходная задача (0.1), (0.2) разрешима. Покажем единственность. Рассмотрим малый интервал $(0, \delta)$. Перепишем уравнение (0.1) в виде

$$M(x, 0, D_x)u + (M(x, t, D_x)u - M(x, 0, D_x))u = 0.$$

Используя теорему 2.4, легко показать, что $u \equiv 0$ на $(0, \delta)$, если δ достаточно мало. Далее, повторяя рассуждения, покажем, что $u \equiv 0$.

Замечание. *Следуя схеме рассуждений из [4], можно упростить доказательство теоремы 3.1. Однако, условия на коэффициенты при этом усилятся.*

Литература

[1] *A. I. Kozhanov*, Composite type equations and inverse problems, Utrecht, VSP, 1999.

[2] *Yu. Ya. Belov*, Inverse problems for parabolic equations, J. Inv. Ill-Posed Problems, **1**, No. 4 (1993), 283–301.

[3] *Г. В. Демиденко, С. В. Успенский*, Уравнения и системы, не разрешеные относительно старшей производной, Н., Научная книга, 1998.

[4] *М. С. Агранович, М. И. Вишик*, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, Усп. матем. наук, **19**, № 3 (1964), 53–161.

[5] *Х. Трибель*, Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы, М., Мир, 1980.

[6] *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский*, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, Физматлит, 1996.

[7] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Наука, 1973.

[8] *P. Grisvard*, Commutative de deux functeurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures et Appliq, **45**, No. 2 (1966), 144–206.

[9] *И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов*, Неклассические операторно-дифференциальные уравнения, Н., Наука, 2000.

[10] *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг*, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных вблизи границы, М., Иностранная литература, 1962.

[11] *S. Agmon*, Lectures on elliptic boundary value problems, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, New York, Toronto, London, 1965.

[12] *P. Grisvard, G. Da Prato*, Sommes d'operatours lineaires et equations differentielles operationnelles, J. Math. Pures et Appl, **54**, No. 2 (1975), 305–387.