

УДК 514.13+514.132

ПРИЗМЫ В H^3 *

Д. А. Деревнин

§ 1. Введение

Основной целью статьи является проблема реализации и нахождения объемов многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве H^3 . Вычисление объемов многогранников — это довольно старая и непростая задача. Вероятно первый результат в этом направлении принадлежит Тарталье (1494) который нашел объем евклидова тетраэдра. В гиперболическом пространстве ситуация более сложная. Даже в случае простейших многогранников, к которым можно отнести тетраэдр и призму, заметный успех был достигнут только в последнее время. Для тетраэдра полное решение задачи было дано недавно несколькими авторами. Первая формула была получена Ю. Чо, Х. Кимом [7]. Более простой вариант формулы можно найти в работе Деревнина Д.А. и Медных А.Д. [3] (см. также [5]). Объемы гиперболических призм, до данной работы, были найдены только в нескольких частных случаях [4, 10].

Основным результатом статьи можно считать, полученную в 6 параграфе, формулу для вычисления объема компактной четырехугольной призмы специального вида $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ (см. рис. 1). Только шесть двугранных углов $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ этой призмы могут быть отличны от $\pi/2$. В параграфе 4 доказывается, что любая остроугольная призма в H^3 разбивается на конечное число четырехугольных призм указанного вида. Это дает алгоритм нахождения объема произвольной остроугольной призмы в H^3 .

В различных областях математики, например в теории дискретных групп, в теории многообразий, возникает интерес к группам отражений, что непосредственно связано с многогранниками Коксетера. В 5 параграфе данной статьи дается полная классифика-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00104), и ИНТАС (грант 03-51-3663)

ция четырехугольных Коксетеровских призм в H^3 . Заметим, что треугольные Коксетеровских призмы были описаны И. М. Каплинской [9]. В приложении приведены все 30 Коксетеровских схем, соответствующих четырехугольным призмам и вычислены их гиперболические объемы.

§ 2. Вспомогательные результаты

Рассмотрим многогранник верхним и нижним основаниями которого являются n -угольники P_1, P_2, \dots, P_n и Q_1, Q_2, \dots, Q_n в H^3 , а боковыми гранями — четырехугольники $P_i P_{i+1} Q_i Q_{i+1}$. Здесь и далее мы используем индекс $i+1$ вместо $(i+1) \bmod n$. Этот многогранник мы называем n -угольной призмой в H^3 .

Обозначим F_o и F_{n+1} верхнее и нижнее основания призмы соответственно и F_i , $i = 1, \dots, n$ боковые грани $P_i P_{i+1} Q_i Q_{i+1}$. Пусть α_i , β_i and γ_i двугранные углы между боковыми гранями F_i , $i = 1, \dots, n$ и гранями F_o , F_{n+1} и F_{i-1} соответственно. Двугранные углы полностью определяют призму, которую обозначим $D(\alpha, \beta, \gamma)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ являются мульти-индексами.

Мы интересуемся остроугольными призмами, в значительной степени, из-за того, что существует простой в употреблении критерий существования остроугольного многогранника в H^3 . Критерий существования дается следующей теоремой.

Теорема 1 (Андреев [1, с. 467] или [14, с. 119]). *Ограниченный остроугольный многогранник заданной комбинаторной структуры, отличный от тетраэдра или треугольной призмы существует в H^3 если и только если следующие условия выполнены:*

- (1) *если три грани встречаются в одной вершине, то сумма двугранных углов между ними больше чем π ;*
- (2) *если три грани попарно смежные, но не встречаются в одной точке, то сумма двугранных углов между ними меньше чем π ;*
- (3) *если четыре грани «циклично» смежные (как боковые грани четырехугольной призмы), то по крайней мере один из них отличен от $\pi/2$.*

Андреев доказал также [2, с. 522], что гиперплоскости любых двух несмежных граней остроугольного многогранника в $m \geq 2$ имеют пустое пересечение на $\overline{H^m}$. Следовательно, для $m = 2, 3$ всегда существует общий перпендикуляр в H^m к плоскостям обеих граней. Нам понадобятся следующие элементарные леммы.

Лемма 1. *Пусть D выпуклый многогранник в H^m , $m = 2, 3$, чьи двугранные углы не превосходят $\pi/2$. Пусть F грань D , точка $P \in D \setminus F$ и Q основание перпендикуляра опущенного на плоскость F из P .*

- Тогда
- 1) $PQ \subset D$;
 - 2) $Q \in \partial F$ если и только если $P \in F^*$, где F^* , F смежные грани D и двугранный угол между F^* и F равен $\pi/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть l_Q^\perp перпендикулярная к F прямая, проходящая через точку $Q \in F$. Рассмотрим цилиндр $C_F = \{l_Q^\perp : Q \in F\}$. Основание перпендикуляра опущенного на плоскость F из любой точки $P \in C_F$ принадлежит F по построению. Оно принадлежит ∂F если и только если P лежит на границе C_F . Из ограничения на углы получаем $F \subset C_F$ и выпуклость дает нам утверждение 1) нашей леммы. Для доказательства 2) заметим, что $P \in C_F$ если и только если $P \in F^*$, где F^* и F смежные грани D и двугранные углы между F^* и F равны $\pi/2$.

Лемма 2. Пусть $D = D(\alpha, \beta, \gamma)$ n -угольная компактная призма в H^3 чьи двугранные углы $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq \pi/2$, $i = 1, \dots, n$. Пусть F_o и F_{n+1} — верхнее и нижнее основания D , соответственно, и F_1, \dots, F_n — боковые грани D . Тогда существуют такие точки $P \in F_o$ и $Q \in F_{n+1}$, что PQ — общий перпендикуляр между плоскостями F_o и F_{n+1} . Более того

- (i) если существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое что $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$, тогда $PQ \subset F_i$ и $P \in (P_i, P_{i+1})$, $Q \in (Q_i, Q_{i+1})$;
- (ii) если существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое что $\alpha_i = \beta_i = \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} = \pi/2$, тогда $PQ = P_{i+1}Q_{i+1} = F_i \cap F_{i+1}$;
- (iii) если не существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такого что $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$, тогда $P \in F_o \setminus \partial F_o$ и $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$, то есть $PQ \cap F_i = \emptyset$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 случай $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$ возможен либо для одного i , либо для двух соседних значений i .

Случай (ii). Это легкое упражнение в сферической тригонометрии проверить, что $P_{i+1}Q_{i+1}$ общий перпендикуляр между плоскостями F_o и F_{n+1} .

Случай (i). Легко видеть, что общий перпендикуляр PQ между гиперболическими прямыми P_iP_{i+1} and Q_iQ_{i+1} является общим перпендикуляром между плоскостями F_o и F_{n+1} . Так как углы между плоскостями $P_iQ_iQ_{i+1}P_{i+1}$ не превосходят $\pi/2$ то возможны две ситуации. Первая - $P \in (P_i, P_{i+1})$, $Q \in (Q_i, Q_{i+1})$ и вторая - $PQ \in \{P_iQ_i, P_{i+1}Q_{i+1}\}$. Мы должны отвергнуть вторую ситуацию, поскольку если, скажем, $PQ = P_iQ_i$, то мы приходим в противоречие с предположением, что двугранные углы $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$. Аналогично, исключается случай $PQ = P_{i+1}Q_{i+1}$.

Случай (iii). Пусть d -гиперболическое расстояние между точками в H^3 .

Покажем, что найдутся такие точки $P \in F_o \setminus \partial F_o$ и $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$, что

$$d(P, Q) = \min_{P' \in F_o, Q' \in F_{n+1}} d(P', Q').$$

Существуют три возможности:

- a) Ни одна точка не лежит на границе.
То есть $P \in F_o \setminus \partial F_o$ и $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$;
- b) Одна из точек, скажем P лежит на границе.
То есть $P \in \partial F_o$, $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$;
- c) Обе точки лежат на границе.
То есть $P \in \partial F_o$, $Q \in \partial F_{n+1}$.

Покажем, что ситуации b) и c) невозможны. Пусть $P \in \partial F_o$, $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$. Мы опустим перпендикуляр QP' из Q на F_o . По лемме 1 $P' \neq P$ и $P' \in F_o \setminus \partial F_o$. Поскольку $d(P', Q)$ катет прямоугольного треугольника PQP' и $d(P, Q)$ гипотенуза, мы имеем $d(P', Q) < d(P, Q)$. Это противоречит предположению.

Пусть $P \in \partial F_o$, $Q \in \partial F_{n+1}$. Мы опустим перпендикуляр QP' из Q на F_o . Если $P' \neq P$ мы имеем противоречие по тем же соображениям что и выше. Если $P' = P$ тогда по лемме 1 $P, Q \in F_i$ для некоторого i и $\alpha_i = \pi/2$. Это означает по предположению что $\beta_i < \pi/2$. Откуда, по лемме 1 основание Q' перпендикуляра PQ' из P на F_{n+1} лежит в $F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$ и мы имеем противоречие по тем же соображениям что и выше.

Из рассмотренного следует, что существуют точки $P \in F_o \setminus \partial F_o$ и $Q \in F_{n+1} \setminus \partial F_{n+1}$, которые реализуют минимум функции $d(P, Q)$. В этом случае линия PQ является общим перпендикуляром между плоскостями F_o и F_{n+1} .

Пусть точки $P_1, P_2, P_3, P_4 \in H^2$ являются вершинами гиперболического четырехугольника и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ углы при вершинах с соответствующим номером. Обозначим a_1, a_2, a_3, a_4 гиперболические длины сторон $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1$ соответственно. Мы рассмотрим остроугольный четырехугольник, то есть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \leq \pi/2$. Гиперболический четырехугольник существует если хотя бы один из углов меньше чем $\pi/2$ (см., напр., [6]). Для определенности полагаем $\alpha_3 < \pi/2$.

Мы приводим список элементарных формул для гиперболического четырехугольника с двумя прямыми углами. Пусть $\alpha_2 = \alpha_4 = \pi/2$. Тогда [8, с. 90]

$$\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} = \frac{\cosh a_1}{\cosh a_3} = \frac{\cosh a_2}{\cosh a_4}, \quad (1)$$

$$\sinh a_2 = -\cos \alpha_3 \sinh a_1 + \sin \alpha_3 \cosh a_1 \sinh a_4, \quad (2)$$

$$\cos \alpha_3 = \sinh a_2 \sinh a_1 - \cosh a_2 \cosh a_1 \cos \alpha_1. \quad (3)$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha_4 = \pi/2$. Тогда [8, с. 88]

$$\frac{\cosh a_2}{\sin \alpha_3} = \frac{\cosh a_3}{\sin \alpha_2} = \frac{\sinh a_2}{\sinh a_1}, \quad (4)$$

$$\sinh a_2 = \sinh a_3 \sinh a_4 - \cosh a_3 \cosh a_4 \cos \alpha_3, \quad (5)$$

$$\cos \alpha_3 = -\cos \alpha_2 \cosh a_1 + \sin \alpha_2 \sinh a_1 \sinh a_2. \quad (6)$$

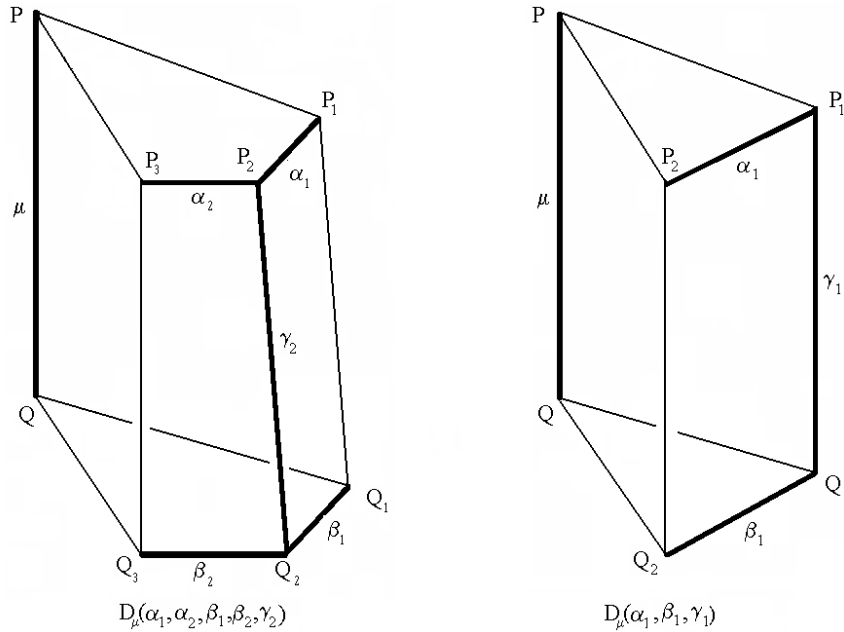


Рис. 1.

§ 3. Метрические соотношения в четырехугольных призмах специального вида

Рассмотрим компактную четырехугольную призму $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ и треугольную призму $D_\mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, изображенные на Рис.1. Двугранные углы в ребрах без метки равны $\pi/2$. Пусть двугранные углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu$ удовлетворяют условиям

- a) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \leq \pi/2, \mu + \gamma_2 < \pi$ для 4-угольной призмы и $\mu + \gamma_1 < \pi/2$ для треугольной;
- b) $\alpha_i + \beta_i \neq \pi, i = 1, 2$;
- c) Сумма двугранных углов между тремя гранями встречающимися в одной вершине больше чем π .

Тогда, по теореме о существовании многогранника в гиперболическом пространстве (обобщение теоремы 1, которое можно найти в [12]), призмы $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ и $D_\mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ существуют в H^3 .

Назовем призмы $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ и $D_\mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *регулярными*.

В этом параграфе мы изучаем метрическую структуру призмы $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$.

Далее, в теореме 4 мы докажем, что любая остроугольная n -угольная призма, $n > 3$, может быть разрезана на конечное число регулярных призм.

Теорема 2. Пусть $D = D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ регулярная четырехугольная призма. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 и ρ гиперболические длины ребер D , двугранные углы в которых равны

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ и μ , соответственно. Тогда

$$\frac{\sinh c_2 \sin \mu}{\sin \gamma_2 \sinh \rho} = \frac{\cosh a_1 \cosh b_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2} = \frac{\cosh a_2 \cosh b_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (4) к четырехугольникам $P_1Q_1Q_2P_2$ и PQ_1P_1 мы имеем

$$\frac{\sinh c_2}{\sinh P_1Q_1} = \frac{\cosh a_1}{\sin \angle Q_1Q_2P_2}$$

и

$$\frac{\sinh P_1Q_1}{\sinh d} = \frac{\cosh QQ_1}{\sin \alpha_1}.$$

умножая эти равенства получим

$$\frac{\sinh c_2}{\sinh \rho} = \frac{\cosh a_1 \cosh QQ_1}{\sin \alpha_1 \sin \angle Q_1Q_2P_2}. \quad (7)$$

Из (1) следует

$$\cosh QQ_1 = \cosh b_2 \frac{\sin \angle Q_1Q_2Q_3}{\sin \mu}. \quad (8)$$

Сферическая теорема синусов дает

$$\frac{\sin \angle Q_1Q_2Q_3}{\sin \angle Q_1Q_2P_2} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta_2}. \quad (9)$$

Исключая $\sin \angle Q_1Q_2Q_3$, $\sin \angle Q_1Q_2P_2$ и $\cosh QQ_1$ из последних трех равенств получаем

$$\frac{\sinh c_2 \sin \mu}{\sin \gamma_2 \sinh \rho} = \frac{\cosh a_1 \cosh b_2}{\sin \alpha_1 \sin \beta_2}.$$

Равенство

$$\frac{\sinh c_2 \sin \mu}{\sin \gamma_2 \sinh \rho} = \frac{\cosh a_2 \cosh b_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_1}$$

получается аналогично.

Теорема 3. Пусть $D = D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ регулярная четырехугольная призма и ρ гиперболическая длина ребра D , двугранный угол в котором равен μ . Тогда

$$\cos \mu = \frac{(r_o + r_1x + r_2x^2)}{\sqrt{(p_o + p_1x + x^2)(q_o + q_1x + x^2)}}, \quad (10)$$

где $x = \cosh \rho$ и коэффициенты $r_o, r_1, r_2, p_o, p_1, q_o, q_1$ зависят от двугранных углов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ следующим образом

$$\begin{aligned} r_o &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_2, & r_1 &= \cos \alpha_1 \cos \beta_2 + \cos \alpha_2 \cos \beta_1, \\ r_2 &= -\cos \gamma_2, \\ p_o &= \cos^2 \beta_1 - \sin^2 \alpha_1, & p_1 &= 2 \cos \alpha_1 \cos \beta_1, \\ q_o &= \cos^2 \beta_2 - \sin^2 \alpha_2, & q_1 &= 2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \end{aligned} \quad (11)$$

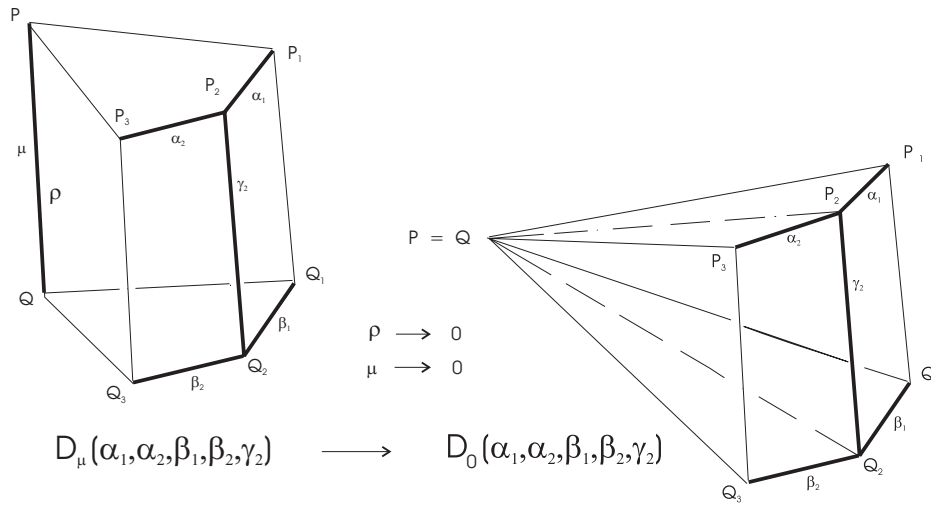


Рис. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (6) мы имеем

$$\sinh PP_1 = \frac{\cos \beta_1 + \cos \alpha_1 \cosh \rho}{\sin \alpha_1 \sinh \rho} \quad (12)$$

и

$$\sinh PP_3 = \frac{\cos \beta_2 + \cos \alpha_2 \cosh \rho}{\sin \alpha_2 \sinh \rho}. \quad (13)$$

Формула (3) дает соотношение

$$\cos \mu = \frac{\sinh PP_1 \sinh PP_3 - \cos \nu}{\cosh PP_1 \cosh PP_3}, \quad (14)$$

где $\nu = \angle P_1P_2P_3$. Применяя сферическую теорему косинусов к сферическому треугольнику вокруг вершины P_2 имеем

$$\cos \gamma_2 = -\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \nu. \quad (15)$$

Исключая PP_1 , PP_3 и $\cos \nu$ из (12)–(15) получим (10).

Нам необходимо изучить вырождение многогранника $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ при $\rho \rightarrow 0$ (см. рис. 3). Из теоремы 3 и подходящих формул для плоских гиперболических четырехугольников мы получаем следующее предложение.

Предложение 1. Пусть $D = D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ регулярная 4-угольная призма и ρ гиперболическая длина высоты PQ в D . Пусть углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ будут фиксированы и $\rho \rightarrow 0$. Тогда

- 1) Двугранный угол $\mu \rightarrow 0$;
- 2) Длины ребер $PP_1, PP_3, QQ_1, QQ_3 \rightarrow \infty$;
- 3) Длины ребер $P_1P_2, P_2P_3, Q_1Q_2, Q_2Q_3, P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3$ стремятся к некоторым конечным значениям. В частности

$$\sinh c_1 \rightarrow \frac{\cos \alpha_1 + \cos \beta_1}{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}, \quad \sinh c_3 \rightarrow \frac{\cos \alpha_2 + \cos \beta_2}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2},$$

$$\sinh a_i \rightarrow \frac{\sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \psi_i + (1 + \cos \alpha_i \cos \beta_i) \cos \varphi_i}{\sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \varphi_i},$$

где $i = 1, 2$, a_1, a_2, c_1, c_3 гиперболические длины ребер $P_1P_2, P_2P_3, P_1Q_1, P_3Q_3$, соответственно, $\psi_1 = \angle P_2Q_2Q_1$, $\psi_2 = \angle P_2Q_2Q_3$, $\varphi_1 = \angle P_1P_2Q_2$ и $\varphi_2 = \angle P_3P_2Q_2$.

§ 4. Каноническое разбиение n -угольной призмы

В этом параграфе мы докажем, что всякая остроугольная призма в H^3 имеет каноническое разбиение на конечное число регулярных призм, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Теорема 4. Пусть $D = D(\alpha, \beta, \gamma)$ n -угольная компактная призма в H^3 с двугранными углами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq \pi/2$, где $i = 1, \dots, n$ и $n > 3$. Тогда D есть объединение r регулярных четырехугольных призм и s регулярных треугольных призм. Более того

- (i) если существует в точности одно $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$, тогда $r = n - 2$ и $s = 0, 1$ или 2 есть количество прямых углов среди $\{\gamma_i, \gamma_{i+1}\}$;
- (ii) если существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\alpha_i = \beta_i = \alpha_{i+1} = \beta_{i+1} = \pi/2$, тогда $r = n - 3$ и $s = 0, 1$ или 2 есть количество прямых углов среди $\{\gamma_i, \gamma_{i+2}\}$;
- (iii) если не существует такого $i \in \{1, \dots, n\}$, что $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$, то $r = n$ и $s = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По лемме 2 существуют такие $P \in F_o$ и $Q \in F_{n+1}$ что PQ является общим перпендикуляром между верхним F_o и нижним F_{n+1} основаниями D . Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ существует единственная плоскость \bar{F}_i проходящая через PQ и ортогональная F_i . Пусть F_i грань D со свойствами

- 1) $PQ \cap F_i = \emptyset$,
- 2) $PQ \cap F_j = \emptyset$, где F_j смежная F_i и двугранный угол в ребре $F_i \cap F_j$ равен $\pi/2$.

Покажем что $\bar{F}_i \cap F_i = \bar{P}_i\bar{Q}_i$, где $\bar{P}_i \in (P_i, P_j)$ и $\bar{Q}_i \in (Q_i, Q_j)$. Пусть \bar{P}_i и \bar{Q}_i основания перпендикуляров опущенных на P_iP_j и Q_iQ_j из точек P и Q соответственно. По лемме 1 $\bar{P}_i \in [P_i, P_j]$ и $\bar{Q}_i \in [Q_i, Q_j]$. Элементарные вычисления с использованием сферической тригонометрии показывают, что плоскости \bar{P}_iPQ, \bar{Q}_iPQ ортогональны F_i .

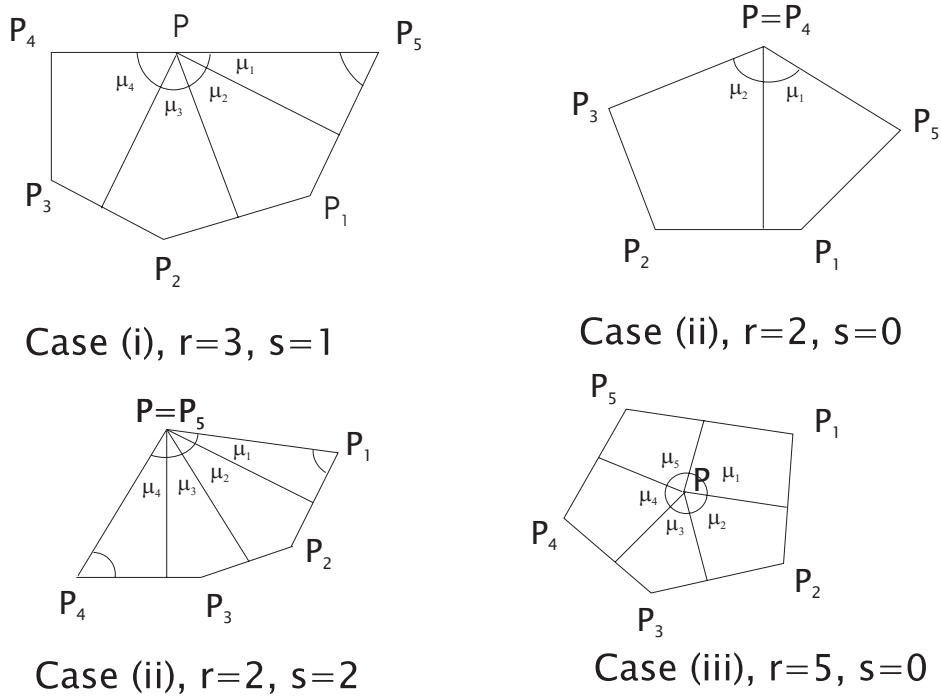


Рис. 3.

Откуда $\overline{P}_i, \overline{Q}_i \in \overline{F}_i \cap F_i$. Заметим также, что $\overline{P}_i \overline{Q}_i$ общий перпендикуляр между $P_i P_j$ и $Q_i Q_j$. По лемме 1 существуют две возможности. Случай 1) невозможен, поскольку тогда один из двугранных углов γ_i или γ_j равен $\pi/2$, а PQ лежит на грани D смежной F_i . Следовательно, мы имеем случай 2), то есть $\overline{P}_i \in (P_i, P_j)$ и $\overline{Q}_i \in (Q_i, Q_j)$.

Легко сосчитать что количество граней со свойствами 1), 2) равно $r + s$, где значение r и s соответствует (i), (ii) или (iii). Для удобства, если $PQ \subset F_j$, то мы можем пронумеровать боковые грани D по часовой стрелке, начиная с первой грани после F_j со свойствами 1), 2).

По построению, \overline{F}_i ортогональна обоим граням F_o и F_{n+1} . Отсюда, плоскости \overline{F}_i , $i = 1, \dots, r + s$ пересекают нашу призму D на r регулярных четырехугольных призм и s регулярных треугольных призм.

§ 5. Комбинаторное описание гиперболических призм Коксетера

Рассмотрим призму $D(\alpha, \beta, \gamma) \subset H^3$. Пусть $\alpha_i = \pi/k_i$, $\beta_i = \pi/l_i$ и $\gamma_i = \pi/m_i$, где натуральные числа $k_i, l_i, m_i \geq 2$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $D(\alpha, \beta, \gamma)$ n -угольная призма Коксетера и мы обозначим ее $D(k, l, m)$, где $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ и $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ мульти-индексы. Мы припишем числа k_i , l_i и m_i , $i = 1, \dots, n$ как метки или индексы соответствующим ребрам.

Отражения в гранях, встречающихся в каждой вершине, должны порождать конечную подгруппу $O(3)$, следовательно тройки чисел ассоциированные с ребрами пересекающимися в вершине должны принадлежать множеству

$$O = \{(2, 2, j), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\}. \quad (16)$$

Совместно с теоремой 1 это дает следующий критерий для комбинаторной структуры призм Коксетера.

Теорема 5. Пусть $D(k, l, m)$ будет n -угольной призмой Коксетера. Полагаем, что $n > 3$. Тогда призма существует в пространстве H^3 если и только если следующие условия выполнены:

- (A1) существует максимум одно значение i такое что либо $(k_i, l_i) = (2, 2)$ либо $(k_i, l_i) = (k_{i+1}, l_{i+1}) = (2, 2)$;
- (A2) для любого i тройка чисел (k_i, k_{i+1}, m_i) и (l_i, l_{i+1}, m_i) с точностью до перестановки принадлежит множеству O ;
- (A3) если $n = 4$ тогда по меньшей мере одно из $\{m_i\}$ больше чем 2.

Заметим, что всегда существует линия PQ которая ортогональна и верхнему и нижнему основаниям (см. лемма 2). Первый случай в (A1) может произойти только если PQ имеет пересечение размерности 1 с внутренностью боковой грани F_i и второй случай если PQ принадлежит ребру P_iQ_i .

Случай треугольных призм Коксетера описан И. М. Каплинской в [9]. Применение критерия к четырехугольным призмам дает следующий результат.

Теорема 6. Существует в точности тридцать типов групп Коксетера, действующих в H^3 и имеющих четырехугольные призмы в качестве фундаментального множества. Соответствующие схемы Коксетера приведены в приложении.

§ 6. Объемы

В этом параграфе мы находим объем регулярной четырехугольной призмы $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$, как функцию от двугранных углов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$ и высоты ρ . Хорошо известное дифференциальное уравнение Шлефли для случая компактного многогранника $D \subset H^3$ имеет вид [11, с. 281]

$$d \text{Vol}(D) = -\frac{1}{2} \sum \rho_i d\mu_i,$$

где i пробегает все ребра D , ρ_i длина i -го ребра и μ_i двугранный угол при этом ребре.

Пусть $\Lambda(x)$ функция Лобачевского

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \log |2 \sin t| dt.$$

Определим функцию $V_p(x, y, z)$ следующим равенством

$$V_p(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[\Lambda(z) + \Lambda\left(\frac{\pi + x + y - z}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi + x - y - z}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi - x + y - z}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{x + y + z - \pi}{2}\right) \right].$$

Пусть, далее, $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ — регулярная четырехугольная призма. По предложению 1, указанная призма стремится, к $D_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$, когда ее высота $\rho \rightarrow 0$. Многогранник $D_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ (см. Рис. 2) есть объединение двух пирамид с общей вершиной на абсолюте. Формула для объема пирамиды с вершиной на абсолюте дана в [14, с. 129]. Используя эту формулу и предложение 1 мы получаем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $D = D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma)$ — регулярная четырехугольная призма, а ρ — гиперболическая длина высоты PQ . Пусть $D_0 = D_0(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma)$ будет пределом $D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma)$, когда $\rho \rightarrow 0$. Тогда

$$\text{Vol}(D_0) = V_p(\delta, \alpha_1, \tau) + V_p(\beta_1, \delta, \theta) + V_p(\gamma_2 - \delta, \alpha_2, \pi - \tau) + V_p(\beta_2, \gamma_2 - \delta, \pi - \theta),$$

где δ, τ и θ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \cot \delta &= \cos \gamma_2 + \frac{\cos \alpha_2 + \cos \beta_2}{\cos \alpha_1 + \cos \beta_1}, \\ \cos \tau &= \sin \delta \left(\frac{\cos \alpha_2}{\sin \gamma_2} + \cos \alpha_1 \right) - \cos \delta \cos \alpha_1, \\ \cos \theta &= \sin \delta \left(\frac{\cos \beta_2}{\sin \gamma_2} + \cos \beta_1 \right) - \cos \delta \cos \beta_1. \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть $D_\mu = D_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2)$ регулярная четырехугольная призма, а ρ — гиперболическая длина высоты PQ . Тогда

$$\text{Vol}(D) = V_o + \frac{1}{2} \int_1^{\cosh \rho} \text{arc cosh } x \frac{R'_1 R_2 R_3 - R_1 R'_2 R_3 - R_1 R_2 R'_3}{2R_2 R_3 \sqrt{R_1^2 - R_2 R_3}} dx,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (r_o + r_1 x + r_2 x^2), & R'_1 &= 2r_2 x + r_1, \\ R_2 &= p_o + p_1 x + x^2, & R'_2 &= 2x + p_1, \\ R_3 &= q_o + q_1 x + x^2, & R'_3 &= 2x + q_1, \end{aligned}$$

коэффициенты $r_o, r_1, r_2, p_o, p_1, q_o, q_1$ зависят от двугранных углов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ и определяются равенствами (11) и $V_o = \text{Vol}(D_0)$ дано в лемме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем двойные углы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_2$, тогда уравнение Шлеффли имеет вид

$$d \text{Vol}(D) = -\frac{1}{2} \rho d\mu. \quad (17)$$

Пусть

$$V(\mu) = V_0 - \frac{1}{2} \int_0^\mu \rho(\mu) d\mu.$$

Нетрудно видеть что функция $V(\mu)$ является решением дифференциального уравнения (17) с начальными условиями $V(0) = V_0$. По теореме 3 имеем, что μ — дифференцируемая функция от $x = \cosh \rho$. После подстановки получим

$$\begin{aligned} V(\mu) &= \tilde{V}(\rho) = V_0 - \frac{1}{2} \int_1^{\cosh \rho} \operatorname{arc} \cosh x \mu'(x) dx = \\ &= V_0 + \frac{1}{2} \int_1^{\cosh \rho} \operatorname{arc} \cosh x \frac{2R_1' R_2 R_3 - R_1 R_2' R_3 - R_1 R_2 R_3'}{2R_2 R_3 \sqrt{R_1^2 - R_2 R_3}} dx. \end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть $D_\mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ — регулярная треугольная призма. Тогда, отражением в грани PP_1Q_1Q , мы получим регулярную четырехугольную призму $D_\mu(\alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_1, 2\gamma_1)$ и

$$\operatorname{Vol}(D_\mu(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)) = \frac{1}{2} \operatorname{Vol}(D_\mu(\alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_1, 2\gamma_1)).$$

Замечание 2. По теореме 4 объем произвольной остроугольной призмы Коксетера с высотой ρ равен

$$\sum_{i=1}^{r+s} \operatorname{Vol}(D_i),$$

где D_i , $i = 1, \dots, r$ регулярные четырехугольные призмы и D_i , $i = r + 1, \dots, r + s$ регулярные треугольные призмы.

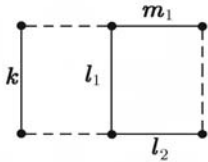
§ 7. Приложение

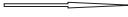



Индексы на схемах Коксетера имеют следующий смысл. Индексы k , l и m могут принимать любое целое значение, большее 2. Индексы k_i , l_i и m_i на схеме могут принимать любое значение из множества $\{3, 4, 5\}$ с одним условием: если схема содержит пару индексов (k_i, k_{i+1}) , (l_i, l_{i+1}) , (k_i, m_i) , (l_i, m_i) , (k_{i-1}, m_i) или (l_{i-1}, m_i) для некоторого $i \bmod 4$, тогда, по меньшей мере, одно из чисел соответствующей пары равно 3.

Отметим, что все вычисления объемов были проверены с помощью недавно появившейся компьютерной программы С. Ходжсона и Д. Хеда [13], которая позволяет приближенно считать объемы орбифолдов с заданным графом в качестве сингулярного множества.

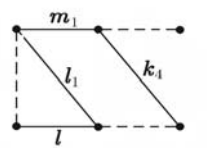
1).		$(l_1, l_2, m) = (3, 3, 3)$ $(l_1, l_2, m) = (3, 4, 3)$ $(l_1, l_2, m) = (3, 5, 3)$ $(l_1, l_2, m) = (3, 3, 6)$		Vol = 0.392327 Vol = 0.520965 Vol = 0.613965 Vol = 0.477033
2).		$(l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3)$ $(l_3, l_4, m_1) = (3, 4, 3)$ $(l_3, l_4, m_1) = (3, 5, 3)$ $(l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 4)$		Vol = 0.464468 Vol = 0.668555 Vol = 0.83312 Vol = 0.58849
3).		$(k, l, m) = (3, 3, 3)$ $(k, l, m) = (3, 4, 4)$ $(k, l, m) = (4, 4, 4)$ $(k, l, m) = (3, 4, 5)$		Vol = 0.324424 Vol = 0.450659 Vol = 0.538275 Vol = 0.47909
4).		$(l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3)$ $(l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 4, 3)$ $(l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 4)$ $(l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 4, 3, 3)$		Vol = 0.684415 Vol = 0.87474 Vol = 0.82987 Vol = 0.914055
5).		$(k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3)$ $(k_4, l_2, l_3, m_1) = (4, 3, 3, 3)$ $(k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 4)$ $(k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 5)$		Vol = 0.602205 Vol = 0.71548 Vol = 0.75397 Vol = 0.857475
6).		$(k_3, k_4, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_1, m_1) = (3, 4, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_1, m_1) = (4, 3, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_1, m_1) = (3, 5, 3, 3)$		Vol = 0.464468 Vol = 0.668555 Vol = 0.58849 Vol = 0.8312





7).



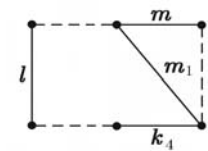
$(k, l_1, l_2, m_1) = (3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.602205
$(k, l_1, l_2, m_1) = (3, 4, 3, 3)$		Vol = 0.788615
$(k, l_1, l_2, m_1) = (3, 3, 3, 4)$		Vol = 0.75397
$(k, l_1, l_2, m_1) = (4, 3, 3, 3)$		Vol = 0.642895





8).



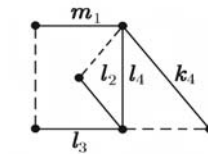
$(k_1, l, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.57829
$(k_1, l, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 4)$		Vol = 0.80615
$(k_1, l, l_1, m_1) = (4, 3, 3, 3)$		Vol = 0.7155
$(k_1, l, l_1, m_1) = (3, 3, 4, 3)$		Vol = 0.685015





9).



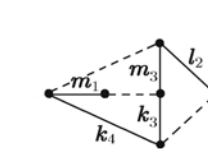
$(k_4, l, m, m_1) = (3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.51635
$(k_4, l, m, m_1) = (4, 3, 3, 3)$		Vol = 0.675985
$(k_4, l, m, m_1) = (3, 4, 3, 3)$		Vol = 0.586585
$(k_4, l, m, m_1) = (3, 3, 4, 3)$		Vol = 0.553165





10).



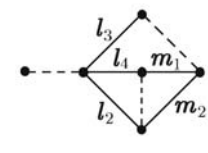
$(k_1, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 5, 3, 3, 4)$		Vol = 1.31609
$(k_1, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 5, 3, 4, 3)$		Vol = 1.06663
$(k_1, l_2, l_3, l_4, m_1) = (4, 4, 3, 5, 3)$		Vol = 1.51321
$(k_1, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 5, 3, 4)$		Vol = 1.1161





11).



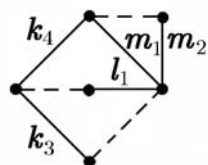
$(k_3, k_4, l_2, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.93171
$(k_3, k_4, l_2, m_1, m_3) = (3, 4, 3, 3, 4)$		Vol = 1.33861
$(k_3, k_4, l_2, m_1, m_3) = (5, 3, 4, 4, 3)$		Vol = 1.66612
$(k_3, k_4, l_2, m_1, m_3) = (5, 3, 5, 5, 3)$		Vol = 1.8795

12).

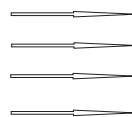


$(l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.928935
$(l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (4, 3, 5, 3, 3)$		Vol = 1.502
$(l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (4, 3, 3, 4, 3)$		Vol = 1.26646
$(l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 5, 3, 5, 5)$		Vol = 1.8107

13).

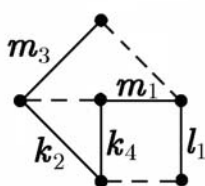


- $(k_3, k_4, l_1, m_1, m_2) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k_3, k_4, l_1, m_1, m_2) = (4, 3, 4, 3, 3)$
- $(k_3, k_4, l_1, m_1, m_2) = (5, 3, 3, 5, 5)$
- $(k_3, k_4, l_1, m_1, m_2) = (3, 5, 4, 3, 3)$

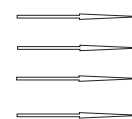


- Vol = 0.93171
- Vol = 1.26046
- Vol = 1.73958
- Vol = 2.11883

14).

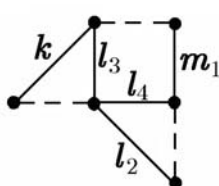


- $(k_2, k_4, l_1, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k_2, k_4, l_1, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 4, 3)$
- $(k_2, k_4, l_1, m_1, m_3) = (4, 3, 3, 3, 3)$
- $(k_2, k_4, l_1, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 4)$

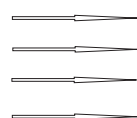


- Vol = 0.85747
- Vol = 1.06122
- Vol = 0.986315
- Vol = 0.99238

15).

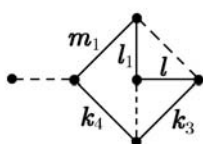


- $(k, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k, l_2, l_3, l_4, m_1) = (4, 3, 3, 3, 3)$
- $(k, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3)$
- $(k, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 4, 3)$

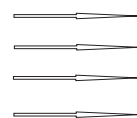


- Vol = 0.85747
- Vol = 0.90841
- Vol = 1.06374
- Vol = 1.06122

16).

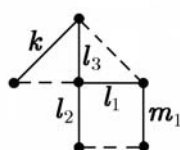


- $(k_3, k_4, l_1, l, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k_3, k_4, l_1, l, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3)$
- $(k_3, k_4, l_1, l, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4)$
- $(k_3, k_4, l_1, l, m_1) = (3, 3, 3, 4, 3)$

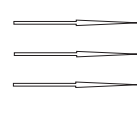


- Vol = 0.7482
- Vol = 0.851545
- Vol = 0.982705
- Vol = 0.77461

17).

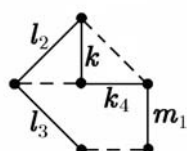


- $(k, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4)$
- $(k, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3)$
- $(k, l_1, l_2, l_3, m_1) = (4, 3, 3, 3, 3)$

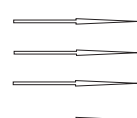


- Vol = 0.77754
- Vol = 0.93703
- Vol = 1.02918
- Vol = 0.80735

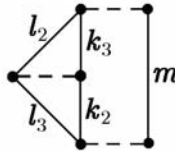

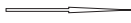


18).

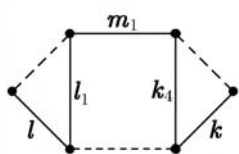

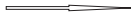




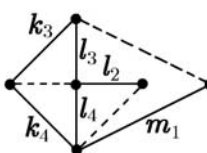




- $(k, k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3)$
- $(k, k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4)$
- $(k, k_4, l_2, l_3, m_1) = (3, 4, 3, 3, 3)$
- $(k, k_4, l_2, l_3, m_1) = (4, 3, 3, 3, 3)$

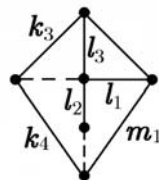

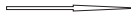




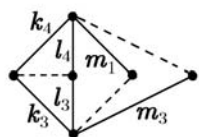




- Vol = 0.68818
- Vol = 0.856305
- Vol = 0.79198
- Vol = 0.7158

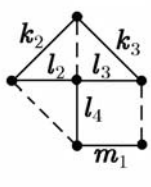



19).  $(k_2, k_3, l_2, l_3, m) = (3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 0.784655
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, m) = (3, 4, 3, 3, 3)$  Vol = 0.9164
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, m) = (3, 3, 3, 3, 4)$  Vol = 0.88766
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, m) = (3, 4, 3, 3, 4)$  Vol = 1.02864

20).  $(k, k_4, l, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 0.72275
 $(k, k_4, l, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 4, 3)$  Vol = 0.83337
 $(k, k_4, l, l_1, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4)$  Vol = 0.9914
 $(k, k_4, l, l_1, m_1) = (4, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 0.76537

21).  $(k_3, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.16193
 $(k_3, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$  Vol = 1.35793
 $(k_3, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3, 3)$  Vol = 1.28615
 $(k_3, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 4, 3, 3)$  Vol = 1.38285

22).  $(k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.15245
 $(k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3, 3)$  Vol = 1.34593
 $(k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 4)$  Vol = 1.42128
 $(k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 4, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.36496

23).  $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.33337
 $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$  Vol = 1.55696
 $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m_3) = (3, 4, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.55739
 $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 5, 3)$  Vol = 1.73116

24).  $(k_2, k_3, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 4)$  Vol = 1.0841
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, l_4, m_1) = (4, 3, 3, 3, 3, 3)$  Vol = 1.28214
 $(k_2, k_3, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 5, 3, 3, 3)$  Vol = 1.22709

25).		$(k_2, k_4, l_1, l_3, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_4, l_1, l_3, m_1, m_3) = (3, 3, 4, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_4, l_1, l_3, m_1, m_3) = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$ $(k_2, k_4, l_1, l_3, m_1, m_3) = (3, 4, 3, 3, 4, 3)$		Vol = 1.15658 Vol = 1.29801 Vol = 1.38841 Vol = 1.6381
26).		$(k, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 4, 3, 3, 3, 3)$ $(k, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 4)$ $(k, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1) = (5, 3, 3, 3, 3, 3)$		Vol = 0.943495 Vol = 1.04588 Vol = 1.20096 Vol = 0.977865
27).		$(k, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 4, 3, 3, 3)$ $(k, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4, 3)$ $(k, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (6, 3, 3, 3, 3, 3)$		Vol = 1.04289 Vol = 1.25026 Vol = 1.18272 Vol = 1.10242
28).		$(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m) = (4, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m) = (3, 4, 3, 3, 3, 3)$ $(k_3, k_4, l_3, l_4, m_1, m) = (3, 3, 3, 3, 3, 6)$		Vol = 1.15658 Vol = 1.29801 Vol = 1.38841 Vol = 1.27283
29).		$(k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 3, 4, 3)$ $(k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 3, 4, 3, 3)$ $(k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, m_1) = (3, 3, 3, 4, 3, 3, 3)$		Vol = 1.40142 Vol = 1.53067 Vol = 1.61591 Vol = 1.60097
30).		$(k_2, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 3, 3, 4, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 4, 3, 3, 3, 3, 3)$ $(k_2, k_4, l_2, l_3, l_4, m_1, m_2) = (3, 3, 3, 3, 3, 4, 3)$		Vol = 1.36883 Vol = 1.55967 Vol = 1.48556 Vol = 1.60133

Литература

- [1] *Е. М. Андреев*, О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского, *Мат. сб.*, **81**(123), № 3 (1970), 445–478.
- [2] *Е. М. Андреев*, О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами, *Мат. заметки*, **8**, № 4 (1970), 521–527.
- [3] *Д. А. Деревнин, А. Д. Медных*, О формуле объема гиперболического тетраэдра, *Успехи математических наук*, **60**, № 2 (2005), 159–160.
- [4] *Д. А. Деревнин, А. Д. Медных*, On the volume of spherical Lambert cube, RIM-GARC Preprint Series, Seoul National University Press, 2003, 03–02.
- [5] *Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич*, Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах, *Сиб. мат. ж.*, **45**, № 5 (2004), 1022–1031.
- [6] *А. Бердон*, Геометрия дискретных групп, М., Наука, 1986.
- [7] *Yu. Cho, H. Kim*, On the volume formula for hyperbolic tetrahedra, *Discrete and Computational Geometry*, **22** (1999), 347–366.
- [8] *W. Fenchel*, Elementary geometry in hyperbolic space, De Gruyter, Berlin, New York, 1989.
- [9] *И. М. Каплинская*, О дискретных группах, порожденных отражениями в гранях симплициальных призм в пространствах Лобачевского, *Мат. заметки*, **15** (1974), 159–164.
- [10] *R. Kellerhals*, On the volume of hyperbolic polyhedra, *Math. Ann.*, **285** (1989), 541–569.
- [11] *J. Milnor*, The Schläfli differential equality, in *Collected papers*, Vol. 1, Houston, Publish in Paris, 1994.
- [12] *C. Hodgson, I. Rivin*, A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, *Invent. Math.*, **117**, V. 2 (1994).
- [13] *C. Hodgson, D. Heard*, Computer program “Orb”, August 2005, <http://www.ms.unimelb.edu.au/~snap/orb.html>
- [14] *Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников*, Геометрия пространств постоянной кривизны, *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, М., ВИНТИ, **29** (1988), 5–146.