

УДК 517.927+519.62+519.614

МАКСИМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ  
КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ  
КАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

*Е. А. Лашина, Г. А. Чумаков, Н. А. Чумакова*

§ 1. Введение

При исследовании сложной динамики в системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром  $\varepsilon$

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, z), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, z), \quad \dot{z} = \varepsilon h(x_1, x_2, z) \quad (1)$$

важную роль играют стационарные и периодические решения вырожденной системы при  $\varepsilon = 0$ , которая представляет собой однопараметрическое семейство двумерных динамических систем с параметром  $z$ :

$$\dot{x} = f(x, z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (2)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $f = (f_1, f_2)$ . Например, для получения релаксационных автоколебаний в системе (1) можно использовать гистерезис стационарных состояний системы (2) по параметру  $z$  в том случае, когда поверхность  $h(x, z) = 0$  пересекает семейство стационарных состояний системы (2) в единственной седловой точке. Существенную роль в этом случае играет «медленная» переменная  $z$  системы (1).

Для получения многопиковых колебаний и хаотических решений в системе вида (1) в работах [1, 2] предприняты попытки использовать наряду с множественностью стационарных состояний вырожденной системы дополнительно так называемые максимальные семейства устойчивых периодических решений системы (2), зависящих от параметра  $z$ .

**Максимальные семейства периодических решений.** Пусть  $x = y(t, x_0, z)$  — решение системы (2), для которого  $y(0, x_0, z) = x_0$ . Предположим, что функция  $\gamma_0(t) =$

$y(t, x_0, z_0)$  — периодическая с наименьшим периодом  $T_0$ . Обозначим через  $D(t)$  матрицу  $D(t) = \partial y(t, x_0, z_0) / \partial x_0$ , которая является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}D(t) = f'_x(\gamma_0(t), z_0) \cdot D(t), \quad D(0) = I. \quad (3)$$

Заметим, что  $D(t)$  — фундаментальная матрица решений системы (3) и матрица коэффициентов  $f'_x(\gamma_0(t), z_0)$  периодическая с периодом  $T_0$ . Характеристические корни  $(e_1, e_2)$  матрицы  $D(T_0)$  называются *мультипликаторами* периодического решения  $\gamma_0(t)$ . Эта фундаментальная матрица всегда имеет собственное число равное 1, например  $e_2$ , поскольку  $\dot{\gamma}_0(t) = D(t)f(x_0, z_0)$  является решением системы (3). Если  $e_1$  по абсолютной величине меньше 1, то периодическое решение  $\gamma_0(t)$  асимптотически устойчиво (орбитально), а если  $|e_1| > 1$ , то  $\gamma_0(t)$  неустойчиво.

Предположим, что  $|e_1| \neq 1$ . Тогда периодическое решение  $\gamma_0(t)$ , для которого матрица  $D(T_0)$  имеет это свойство, будем называть *грубым*. В этом случае с помощью метода возмущений, предложенного Анри Пуанкаре, периодическое решение  $\gamma_0(t)$  можно вложить в однопараметрическое семейство  $\gamma(t, z)$  периодических решений, а именно: если  $\gamma_0(t)$  является грубым, то существует окрестность  $z_0 - \delta_0 \leq z \leq z_0 + \delta_0$  такая, что система (2) имеет периодическое решение  $\gamma(t, z)$  с периодом  $T(z)$ . Как  $\gamma(t, z)$ , так и  $T(z)$  являются непрерывными функциями по  $z$  в окрестности  $|z_0 - z| \leq \delta_0$ , причем  $\gamma(t, z_0) = \gamma_0(t)$  и  $T(z_0) = T_0$ . Функции  $\gamma(t, z)$  и  $T(z)$  определяются однозначно в этой окрестности.

Теперь определим процедуру продолжения по параметру  $z$  семейства грубых периодических решений. Для этого положим  $\gamma_1(t) = \gamma(t, z_1)$  и  $T_1 = T(z_1)$ , где  $z_1 = z_0 + \delta_0$  (аналогично на левом конце интервала  $|z - z_0| \leq \delta_0$ ). Это решение является грубым в силу выбора  $\delta_0$ . Следовательно, существует окрестность  $|z_1 - z| \leq \delta_1$  такая, что все решения из семейства  $\gamma(t, z)$  являются грубыми;  $\delta_1$  выбирается аналогично  $\delta_0$ . Далее определим  $\gamma_2(t) = \gamma(t, z_2)$ , где  $z_2 = z_1 + \delta_1$ , и выполним ту же самую процедуру снова, непрерывно расширяя семейство грубых периодических решений вправо. Повторяя этот процесс и двигаясь по параметру  $z$  к обоим концам интервала существования грубых периодических решений, правому и левому, мы получим так называемое *максимальное семейство периодических решений*.

Так как нас интересуют периодические решения однопараметрического семейства двумерных динамических систем (2), то возникает необходимость описать возможные бифуркации периодических решений, происходящие при трансверсальном пересечении кривой в пространстве всех систем, которая соответствует этому однопараметрическому семейству, и границы раздела разных областей невырожденных систем. В силу того, что семейство однопараметрическое, неустранимы лишь простейшие вырождения, изображаемые границами коразмерности один (они задаются одним уравнением) в пространстве всех систем [3]. От более сложных вырождений можно избавиться малым возмущением рассматриваемого семейства динамических систем. Следовательно, при изменении

параметра  $z$  можно рассматривать только бифуркации первой степени негрубости. Из результатов А. А. Андропова и др. [4] следует, что в этом случае максимальные семейства периодических решений могут завершаться одним из негрубых особых элементов следующего характера: сложный фокус первого порядка, петля сепаратрисы седла, петля сепаратрисы седло-узла, полуустойчивый предельный цикл. К перечисленным бифуркациям периодических решений необходимо добавить бифуркацию стационарных решений, которая происходит в окрестности негрубого особого элемента — седло-узла. Отметим, что смена качественных структур в окрестности негрубого особого элемента однозначно определяет перестройки фазовых портретов однопараметрического семейства динамических систем.

В качестве приложения рассматривается кинетическая модель гетерогенной каталитической реакции в виде динамической системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Эту кинетическую модель предложил чл.-корр. РАН Михаил Гаврилович Слинько, в постановке задачи активное участие принимал проф. Тадей Иванович Зеленьяк. В настоящей работе особое внимание уделено глобальным бифуркациям и аспектам фазового потока, которые нельзя вывести из локальной информации. Простейшие из них связаны с появлением гомоклинических орбит и решений-уток. В разделе 3 представлен итерационный алгоритм уточнения гомоклинических орбит в однопараметрических семействах плоских векторных полей.

## § 2. Эволюция максимальных семейств периодических решений

### § 2.1. Кинетическая модель

В данной работе мы рассмотрим кинетическую модель гетерогенной реакции окисления водорода на металлических катализаторах, описывающую изменения безразмерных концентраций адсорбированного водорода ( $x_1$ ) и кислорода ( $x_2$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1(1 - x_1 - x_2)^2 - k_{-1}x_1^2 - 2k_{30}e^{-\mu_3x_2}x_1^2x_2 \equiv f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= k_2(1 - x_1 - x_2)^2 - k_{40}e^{-\mu_4x_2 + \mu_5z}x_2 - k_{30}e^{-\mu_3x_2}x_1^2x_2 \equiv f_2(x_1, x_2, z) \end{aligned} \quad (4)$$

в области  $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$  с параметром  $z \in [0, 1]$ , определяющим концентрацию кислорода, растворенного в приповерхностный слой катализатора [1, 2]. Здесь  $k_1, k_{-1}, k_2, k_{30}, k_{40}, \mu_3, \mu_4$  и  $\mu_5$  — положительные константы, определяющие скорости отдельных стадий реакции и влияние состояния поверхности катализатора на его активность.

Фазовые портреты системы нелинейных уравнений (4) при различных наборах параметров подробно изучались в работах [5, 2, 6]. Теперь для нас основной интерес представляет вопрос: какие локальные и глобальные бифуркации периодических решений возможны в системе (4) при изменении параметра  $z$  и какая последовательная смена

фазовых портретов при этом происходит? Кроме того, в данной работе мы рассмотрим влияние параметра  $k_2$  (он пропорционален  $P_{O_2}$  — парциальному давлению кислорода в газовой фазе) на максимальные семейства периодических решений. В частности, изучается явление ветвления максимального семейства периодических решений, которое происходит в окрестности негрубого элемента — петли сепаратрисы седла [7]. Для уточнения бифуркационного значения параметра  $z$  и петли сепаратрисы седла мы предлагаем итерационный алгоритм, основанный на решении краевой задачи вблизи гомоклинической орбиты.

### § 2.2. Параметризация стационарных состояний

Для построения семейств стационарных состояний  $x_S = (x_{1S}, x_{2S})$  системы (4), зависящих от параметра  $z$ , получим сначала из уравнения  $f_1(x_S) = 0$  зависимость координаты  $x_{1S}$  от  $x_{2S}$ :

$$x_{1S}(x_{2S}) = \frac{\sqrt{k_1}(1 - x_{2S})}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_{-1} + 2k_{30} \exp(-\mu_3 x_{2S})} x_{2S}}. \quad (5)$$

Затем из уравнения  $f_2(x_{1S}, x_{2S}, z) = 0$  определим зависимость  $z = z(x_{1S}, x_{2S})$ :

$$z(x_{1S}, x_{2S}) = \frac{1}{\mu_5} \ln \left[ \frac{k_2(1 - x_{1S} - x_{2S})^2 - k_{30} \exp(-\mu_3 x_{2S}) x_{1S}^2 x_{2S}}{k_{40} x_{2S}} \right] + \frac{\mu_4 x_{2S}}{\mu_5}. \quad (6)$$

Теперь, подставляя (5) в (6) и изменяя  $x_{2S}$  от 0 до 1, построим кривую  $z = z(x_{1S}(x_{2S}), x_{2S})$  в пространстве  $(x_1, x_2, z)$ . Таким образом, все максимальные семейства стационарных состояний можно параметризовать с помощью одного параметра  $x_{2S}$ . Тогда из условия  $z_0 = z(x_{1S}(x_{2S}), x_{2S})$  можно определить число стационарных состояний при фиксированном значении параметра  $z = z_0$ .

Границами различных семейств стационарных состояний будут служить либо точки пересечения кривой  $z = z(x_{1S}(x_{2S}), x_{2S})$  с границей области  $\Omega \times [0, 1]$ , либо стационарные точки, для которых выполняется условие

$$\det f_x(x_S, z) = 0. \quad (7)$$

В качестве примера рассмотрим кинетическую модель (4) для следующих значений параметров:

$$k_1 = 0.2, \quad k_{-1} = 0.01, \quad k_{30} = 100, \quad k_{40} = 2, \quad \mu_3 = 30, \quad \mu_4 = 12, \quad \mu_5 = 10. \quad (8)$$

На рис. 1 при  $k_2 = 0.5$  показаны три семейства стационарных состояний  $AN$ ,  $BC$  и  $CD$ . Точки  $A$ ,  $N$ ,  $B$  и  $D$  принадлежат границе области  $\Omega \times [0, 1]$  и являются границами различных семейств. В точке  $C$  выполнено условие (7), и стационарное состояние является седло-узлом. В этой точке соединяются два семейства, причем  $BC$  состоит из седловых точек, а  $CD$  — из устойчивых узлов. Стационарная ветвь  $AN$  состоит

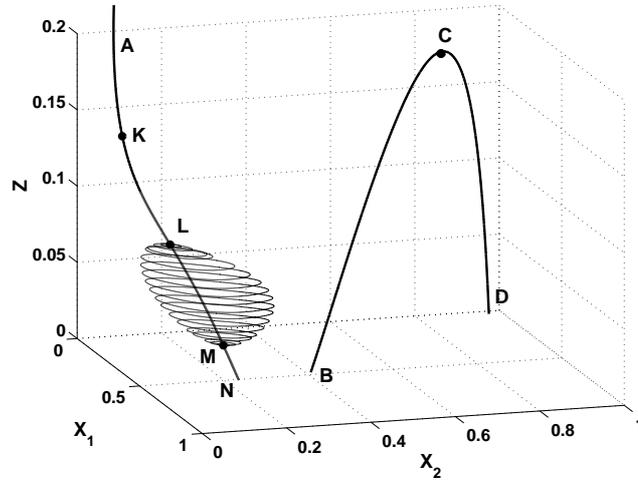


Рис. 1. Максимальное семейство  $S^s$  устойчивых периодических решений и ветви стационарных состояний при  $k_2 = 0.5$

из четырех открытых интервалов:  $AK$  — устойчивые узлы,  $KL$  — устойчивые фокусы,  $LM$  — неустойчивые фокусы и  $MN$  — устойчивые фокусы. В точках  $L$  и  $M$  при  $z = z_L$  и  $z = z_M$ , соответственно, происходят бифуркации Андронова-Хопфа [8] и рождаются устойчивые предельные циклы, однопараметрическое семейство которых вместе с точками бифуркаций образует в пространстве  $(x, z)$  поверхность  $S^s$ , топологически эквивалентную сфере.

Определение значений параметра  $z$ , соответствующих точкам  $K$ ,  $L$  и  $M$ , очевидно [4]: в точке  $K$  выполнены условия

$$[\operatorname{tr} f_x(x_s, z)]^2 = 4 \det f_x(x_s, z), \quad \operatorname{tr} f_x(x_s, z) < 0, \quad \frac{d}{dz} \left[ (\operatorname{tr} f_x(x_s, z))^2 - 4 \det f_x(x_s, z) \right] \neq 0,$$

а в точках  $L$  и  $M$

$$\operatorname{tr} f_x(x_s, z) = 0, \quad \det f_x(x_s, z) > 0, \quad \frac{d}{dz} [\operatorname{tr} f_x(x_s, z)] \neq 0.$$

### § 2.3. Ветвление максимальных семейств периодических решений

Рассмотрим изменение структуры максимального семейства  $S^s$  периодических решений, которое связано с глобальными бифуркациями периодических решений, происходящими в системе (4) при увеличении параметра  $k_2$ .

При  $k_2 > 2.1$  семейство  $S^s$  сначала распадается на два максимальных семейства  $S_1^s$  и  $S_1^u$ , где  $S_1^s$  — семейство устойчивых периодических решений, а  $S_1^u$  — семейство неустойчивых периодических решений, расположенных внутри  $S_1^s$  в пространстве  $(x, z)$ . Неустойчивые периодические решения зарождаются в точке  $z = z_L$  в результате бифуркации Андронова-Хопфа с направлением бифуркации в сторону увеличения  $z$ . Соединяет семейства  $S_1^s$  и  $S_1^u$  при  $z = z^{max} > z_L$  полуустойчивый предельный цикл с двумя

мультипликаторами, равными единице. Отметим, что характер колебаний при увеличении  $z$  от  $z_L$  до  $z^{max}$  изменяется от гармонических до релаксационных, и бифуркацию Андронова-Хопфа сопровождают решения-утки. Ранее устойчивые и неустойчивые утки-циклы в системе (4) были обнаружены в [2] при  $k_2 = 15$  и  $k_{-1} = 0.0025$ .

**Решения-утки.** При  $k_2 > 2.1$  и для  $z$  из окрестности  $z^{max}$  переменная  $x_2$  является быстрой по сравнению с  $x_1$ , то есть  $\dot{x}_2 \gg \dot{x}_1$ . Множество точек на фазовой плоскости, в которых скорость изменения быстрой переменной равна нулю, называется *медленной кривой*. Для рассматриваемой системы (4) медленная кривая задается уравнением

$$f_2(x_1, x_2, z) = 0 \quad (9)$$

и в плоскости  $(x_1, x_2)$  имеет вид  $S$ -образной кривой, состоящей из трех изолированных ветвей решений  $x_{2j} = \omega_j(x_1, z)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , уравнения (9). Обозначим через  $\zeta_j(x_1, z)$  производную

$$\zeta_j(x_1, z) = \left. \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, z) \right|_{x_2 = \omega_j(x_1, z)}.$$

Основное предположение в теории сингулярных возмущений, основы которой были заложены в работах А. Н. Тихонова, состоит в том, что  $\zeta_j(x_1, z) < 0$ . Нарушение этого условия может привести к возникновению так называемых *траекторий-уток*. Ветвь  $x_{2j} = \omega_j(x_1, z)$  медленной кривой устойчива, если  $\zeta_j(x_1, z) < 0$ . Если  $\zeta_j(x_1, z) > 0$ , то ветвь теряет устойчивость. Ветви медленной кривой  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  разделяются так называемыми точками срыва, в которых  $\zeta_j(x_1, z) = 0$ . В малой окрестности устойчивого и неустойчивого участков медленной кривой лежат устойчивые и неустойчивые интегральные многообразия. Наличие дополнительного параметра  $z$  обеспечивает условие того, чтобы устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия можно было склеить в одной точке срыва. Именно через эту точку проходит траектория, которая называется *решением-уткой*.

**Определение [9].** Траектория сингулярно возмущенной системы называется *траекторией-уткой*, если она проходит вначале вдоль устойчивой ветви медленной кривой, а затем вдоль неустойчивой, причем оба раза расстояния порядка единицы. *Воронкой* называется пучок траекторий, которые вначале находились на ощутимом расстоянии друг от друга, а затем стали бесконечно близкими. *Душем* называется пучок траекторий, которые вначале были бесконечно близкими, а затем разошлись на ощутимое расстояние. Пучок траекторий называется *тоннелем*, если сначала он образует воронку, а затем душ.

В системе (4) при  $k_2 = 8$  установлено существование однопараметрического семейства траекторий-уток, заключенных между двумя циклами-утками, один из которых является устойчивым периодическим решением, а другой — неустойчивым. Пучок траекторий, порожденный этими утками-циклами, является тоннелем (см. рис. 2). Отметим,

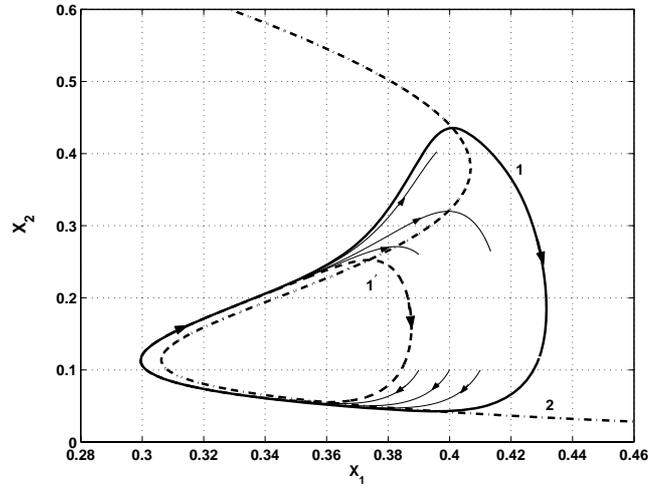


Рис. 2. Тоннель, порожденный устойчивой уткой-циклом с головой (1) и неустойчивой уткой-циклом без головы (1') при  $k_2 = 8$  и  $z = 0.382254$ ; (2) — медленное многообразие  $f_2(x, z) = 0$

что траектории из такого пучка обладают высокой параметрической чувствительностью к начальным данным [2, 12].

При  $k_2 = 8$  семейство  $S_1^s$  устойчивых периодических решений соответствует интервалу  $(z_M, z^{max})$ , а семейство  $S_1^u$  неустойчивых циклов —  $(z_L, z^{max})$ , где  $z_M = 0.297004$ ,  $z_L = 0.3818252$ ,  $z^{max} = 0.38225452$ . На рис. 3 справа показано, как при увеличении параметра  $z$  изменяются устойчивые и неустойчивые утки-циклы в плоскости  $(x_1, x_2)$ , а слева показаны максимальные семейства стационарных состояний и устойчивых периодических решений в пространстве  $(x, z)$ .

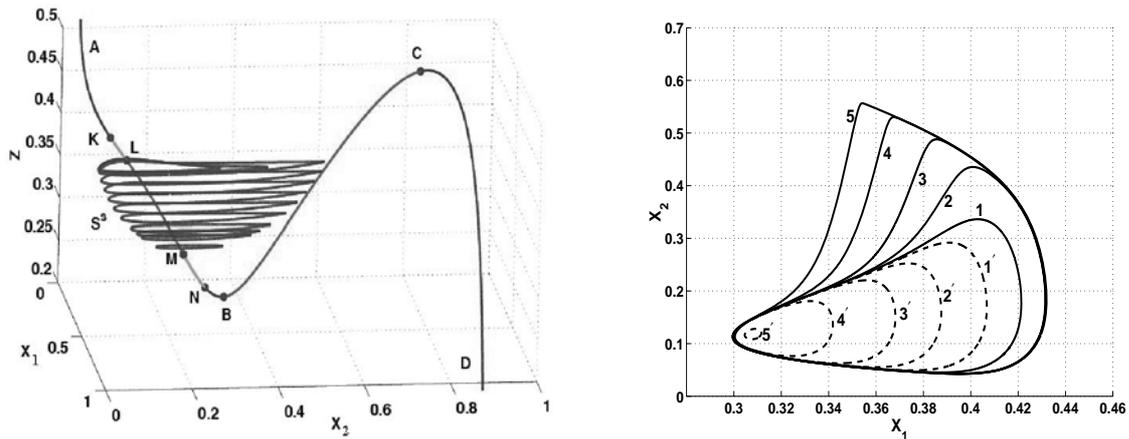


Рис. 3. Максимальные семейства стационарных точек и устойчивых периодических решений системы (4) (слева), устойчивые и неустойчивые утки-циклы, сопровождающие бифуркацию Андронова-Хопфа (справа):  $k_2 = 8$  и  $z = 0.3822545$  (1), 0.382254 (2), 0.38225 (3), 0.3822 (4), 0.381854 (5) ( $l$  соответствует неустойчивым циклам)

**Гомоклинические орбиты.** При увеличении параметра  $k_2$  поверхность  $S^s$  приближается к кривой  $BC$  седловых стационарных состояний (см. рис. 3). Существует критическое значение  $k_2^* \in (9.4508, 9.4509)$ , при котором  $S^s$  касается кривой  $BC$  в точке  $M_p = (x_p, z_p)$ . Это означает, что при  $z = z_p$  в системе (4) происходит глобальная бифуркация рождения периодического решения из петли сепаратрисы седла. В этом случае периоды соответствующих периодических решений неограниченно растут при стремлении  $z$  к  $z_p + 0$  или  $z_p - 0$ .

Для  $k_2 > k_2^*$  максимальное семейство устойчивых периодических решений распадается на два семейства  $S_1^s$  и  $S_2^s$  так, что устойчивые автоколебания в системе (4) существуют для  $z$  из интервалов  $(z_1^{min}, z_1^{max})$  и  $(z_2^{min}, z_2^{max})$ , где  $z_1^{max} < z_2^{min}$ . Отметим, что при  $z \rightarrow z_1^{max} - 0$  или  $z \rightarrow z_2^{min} + 0$  периоды периодических решений неограниченно растут, значения параметра  $z_1^{max}$  и  $z_2^{min}$  соответствуют глобальным бифуркациям вырождения периодического решения в петлю сепаратрисы седловой особой точки. Поскольку неустойчивые периодические решения зарождаются в точке  $z = z_L$  и  $z_L > z_2^{min}$ , то семейство неустойчивых периодических решений  $S^u$  в пространстве  $(x, z)$  целиком содержится внутри  $S_2^s$ . Максимальное значение параметра  $z_2^{max}$ , для которого существуют периодические решения, соответствует полуустойчивому предельному циклу. С помощью алгоритма, который приведен ниже, мы уточнили бифуркационные значения параметра для  $k_2 = 9.451$ :  $z_1^{min} = 0.31183022$ ,  $z_1^{max} = 0.3886879$ ,  $z_2^{min} = 0.3888419$ ,  $z_L = 0.3987314$ ,  $z_2^{max} = 0.399117009$ .

При дальнейшем увеличении  $k_2$  уменьшается длина интервала  $(z_2^{min}, z_2^{max})$  так, что при  $k_2 > 15.7691$  точка  $z_L$  бифуркации Андронова-Хопфа удовлетворяет неравенствам  $z_1^{max} < z_L < z_2^{min}$ . Например, при  $k_2 = 18$  бифуркационные значения  $z_1^{min} = 0.3772$ ,  $z_1^{max} = 0.44300427$ ,  $z_L = 0.463779$ ,  $z_2^{min} = 0.46391788$  и  $z_2^{max} = 0.4640088674$ . На рис. 4 слева показаны максимальные семейства устойчивых периодических решений и фрагменты семейств стационарных состояний при  $k_2 = 18$ . Стационарные состояния на кривой 4 соответствуют неустойчивым фокусам, а на кривой 3 — седлам. Кривые 1 и 2 являются гомоклиническими траекториями при  $z = z_1^{max}$  и  $z = z_2^{min}$ , соответственно. Справа на рис. 4 изображены семейства  $S_2^s$  и  $S^u$  — устойчивых и неустойчивых периодических решений для  $z_L \leq z \leq z_2^{max}$ , причем циклы 1-4 и 1'-4' являются траекториями-утками.

Таким образом, в кинетической модели (4) максимальные семейства периодических решений могут завершаться одним из негрубых элементов следующего характера: сложный фокус первого порядка («мягкая» бифуркация Андронова-Хопфа), петля сепаратрисы седла или полуустойчивый предельный цикл («жесткая» бифуркация рождения/вырождения периодических решений).

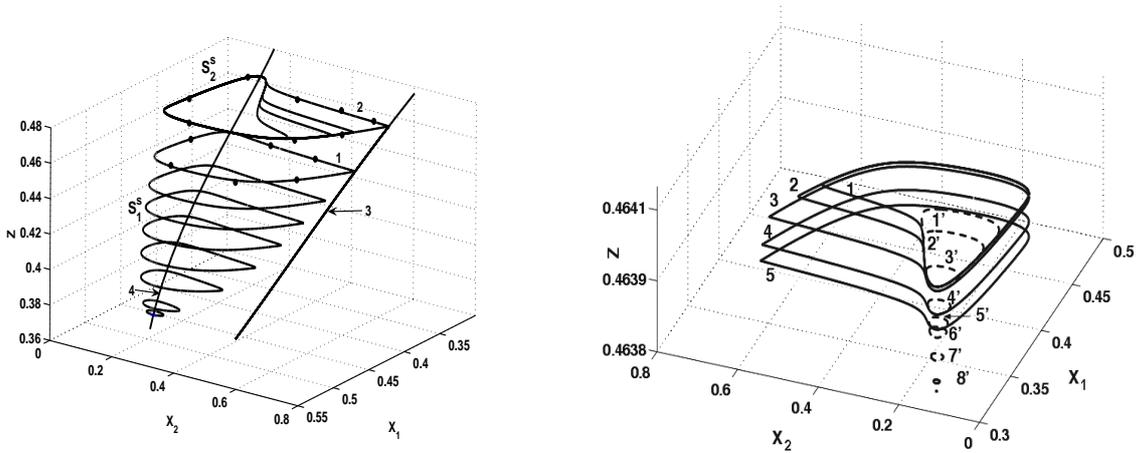


Рис. 4. Два максимальных семейства устойчивых периодических решений, которые заканчиваются гомоклиническими орбитами 1 и 2 (слева), устойчивые и неустойчивые утки-циклы, сопровождающие бифуркацию Андронова-Хопфа, для  $k_2 = 18$  и  $z = 0.4640088674$  (1),  $0.46400886$  (2),  $0.464$  (3),  $0.46395$  (4),  $0.46391788$  (5),  $0.4639$  (6),  $0.46385$  (7),  $0.4638$  (8) ( $t$  соответствует неустойчивым циклам) (справа)

### § 3. Решения вблизи гомоклинической орбиты системы (2). Краевая задача

Предположим, что динамическая система (2) при  $z = z_0$  имеет простое (грубое) седло  $p_0 = (x_{10}, x_{20})$  и что существует гомоклиническая орбита  $L_0$ , стремящаяся к седлу  $p_0$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$ . Такая траектория содержится одновременно в неустойчивом  $W^u(p_0)$  и устойчивом  $W^s(p_0)$  многообразиях седла  $p_0$ , то есть  $L_0 \subset W^u(p_0) \cap W^s(p_0)$ , и говорят, что  $L_0$  образует петлю. Будем считать для определенности, что две сепаратрисы седла  $p_0$ , не принадлежащие  $L_0$ , лежат вне петли, образованной сепаратрисой  $L_0$ . Контур  $L_0 \cup \{p_0\}$  имеет угловую точку  $p_0$ , касательные в которой указывают направления устойчивого и неустойчивого собственных подпространств  $E^s(p_0)$  и  $E^u(p_0)$  линеаризованной в окрестности стационарной точки  $p_0$  системы (3). Мы рассмотрим случай, когда величина  $\text{tr } f'_x(x_0, z_0) < 0$ , то есть петля  $L_0$  устойчива изнутри и из нее рождается единственный устойчивый предельный цикл (см. рис. 5,  $b-d$ ). В неустойчивом случае алгоритм уточнения петли сепаратрисы седла такой же.

Пусть  $q \neq p_0$  — некоторая точка, принадлежащая  $L_0$  и лежащая вне малой окрестности седла  $p_0$ . Пусть  $M$  — одномерное сечение, трансверсальное к  $L_0$  в точке  $q$ , и  $I = [z_0 - \Delta, z_0 + \Delta]$  — некоторый интервал, содержащий  $z_0$ . Обозначим через  $p = p(z)$  кривую седловых точек, существующих при  $z \in I$ , где  $p_0 = p(z_0)$ . Пусть  $u(z), s(z)$  — гладкие кривые в  $R^2 \times R$ , содержащиеся в пересечении поверхностей  $(M \times I) \cap W^u(p)$  и  $(M \times I) \cap W^s(p)$ , соответственно (см. рис. 5,  $a$ ). Тогда  $u(z_0) - s(z_0) = 0$ . Допустим, что для  $z = z_0$  выполнено неравенство  $\frac{d}{dz} [u(z) - s(z)] \neq 0$ . Так как сечение  $M$  в точке  $q = M \cap L_0$  трансверсально вектору  $f(q, z_0)$ , мы будем предполагать, что векторное

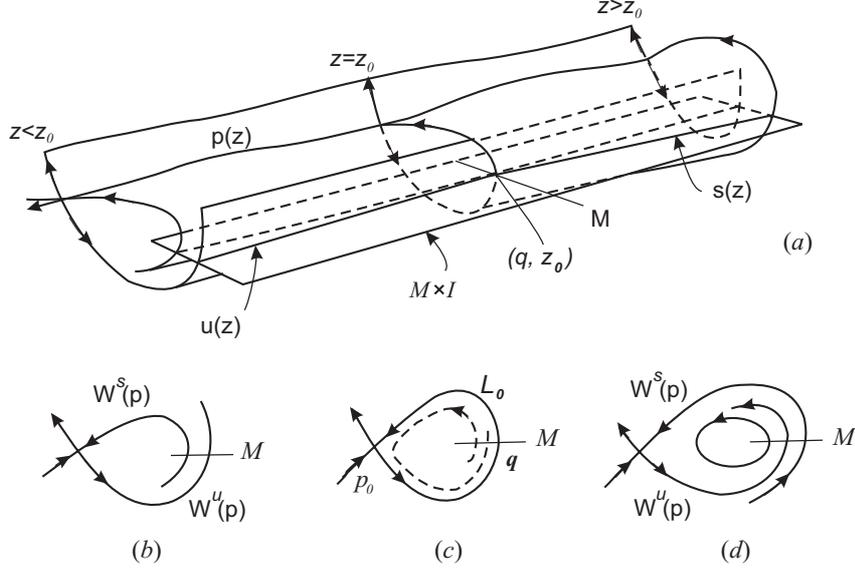


Рис. 5. Глобальная бифуркация устойчивого периодического решения из петли сепаратрисы седла: (a)  $M \times I$  и кривые  $u(z), s(z)$ ; (b)  $z < z_0$ ; (c)  $z = z_0$ ; (d)  $z > z_0$

поле  $f(x, z)$  трансверсально  $M$  для всех  $z \in I$ .

При численном построении решения системы (2) вблизи сепаратрис седла возникает ряд трудностей. С одной стороны, траектория может оставаться вблизи седла как угодно долго. Однако некоторые из орбит, близкие к  $L_0$ , могут покидать ее окрестность при  $t \rightarrow +\infty$ . Это порождает высокую параметрическую чувствительность решений задачи Коши к начальным данным.

Основная идея по преодолению этой проблемы состоит в том, чтобы интегрировать систему вперед по времени вблизи неустойчивого многообразия  $W^u(p)$  и назад по времени вблизи устойчивого инвариантного многообразия  $W^s(p)$ . Таким образом, для нахождения бифуркационного значения параметра  $z_0$  и уточнения петли  $L_0$  вместо решения краевой задачи на бесконечном интервале  $-\infty < t < +\infty$  мы будем решать следующую краевую задачу на конечном интервале:

**Краевая задача:** при заданных  $\varepsilon$  и собственных векторах  $V_1(z) \in E^s(p)$  и  $V_2(z) \in E^u(p)$  линеаризованной в окрестности седла  $x = p(z)$  системы  $\dot{x} = f'_x(p(z), z)x$ , где  $\|V_j(z)\| \leq \varepsilon$ , найти такие параметры  $z$  и  $t_j$  и такие функции  $\eta_j(t)$ , что

$$\dot{\eta}_j = (-1)^j f(\eta_j, z), \quad \eta_j(0) = p(z) + V_j(z), \quad \eta_1(t_1) = \eta_2(t_2) \in M. \quad (10)$$

Здесь  $j = 1, 2$

### § 3.1. Предварительные сведения

В этом разделе приводится ряд понятий и фактов [10, 11], которые позволят нам в дальнейшем сформулировать алгоритм уточнения гомоклинической орбиты.

**Возмущение стационарной точки.** Пусть  $x = x(z)$  при  $z \in I$  — координаты семейства особых точек, которые являются решением уравнения  $f(x, z) = 0$ . Пусть  $\delta$  — малое возмущение параметра  $z$  такое, что  $z + \delta \in I$ . Тогда для соответствующих приращений функций  $x(z + \delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$  имеем

$$x(z + \delta) = x(z) + \delta x_z + O(\delta^2), \quad (11)$$

где  $x_z = -A^{-1}f_z$ ,  $A = f'_x(x(z), z)$  — матрица первых производных вектора  $f(x, z)$  по  $x$ ,  $f_z$  — вектор производных функции  $f(x, z)$  по параметру  $z$ .

**Возмущение собственных значений.** В дальнейшем нас будут интересовать семейство операторов  $A(\delta) = f'_x(x(z + \delta), z + \delta)$ . Пусть семейство  $A(\delta)$  дифференцируемо. Предположим, что дано асимптотическое разложение  $A(\delta)$  с точностью до членов первого порядка

$$A(\delta) = A + \delta B + O(\delta^2)$$

при  $\delta \rightarrow 0$ , где  $A = A(0)$ ,  $B = A'(0) = (b_{jk})$ ,  $j, k = 1, 2$ , и  $B = f_{xx}x_z + f_{xz}$  или в покомпонентной записи:

$$b_{11} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial z}, \quad b_{12} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial z},$$

$$b_{21} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial z}, \quad b_{22} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial z}.$$

Будем предполагать, что оператор  $A(\delta)$  диагонализуем для  $z + \delta \in I$ . Пусть  $\lambda_{1,2}$  — собственные значения невозмущенного оператора  $A$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Обозначим через  $E^s$  и  $E^u$  устойчивое и неустойчивое собственные подпространства, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Выберем в  $R^2$  биортогональную систему векторов  $\{\varphi_j\}$  и  $\{\psi_k\}$  для  $j, k = 1, 2$ , так что  $(\varphi_j, \psi_k) = \delta_{jk}$ , где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера, следующим образом. Пусть  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  — базисные векторы в инвариантных подпространствах  $E^s$  и  $E^u$  оператора  $A$ , так что  $A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ , а  $\{\psi_1, \psi_2\}$  — сопряженный базис, т. е. базис в инвариантных подпространствах  $E_*^s$  и  $E_*^u$  сопряженного к  $A$  оператора  $A^*$ , так что  $A^*\psi_j = \bar{\lambda}_j \psi_j$ . Поскольку собственные значения  $\lambda_{1,2}$  оператора  $A$  простые, то асимптотические разложения собственных значений  $\lambda_{1,2}(\delta)$  оператора  $A(\delta)$  с точностью до первого порядка имеют вид

$$\lambda_j(\delta) = \lambda_j + \delta(B\varphi_j, \psi_j) + O(\delta^2), \quad j = 1, 2.$$

**Проекторы и инвариантные подпространства.** Пусть матрица  $A$  представима в виде

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  и  $\lambda_1$  хорошо отделено от  $\lambda_2$ . Тогда векторы  $T_1$  и  $T_2$  соответствующего разбиения  $T = [T_1 : T_2]$  составляют базисы инвариантных подпространств  $E^s$  и  $E^u$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Для задания подпространств мы будем использовать проекторы. Матрица  $P$  называется *проектором*, если  $P^2 = P$ . Матрица  $(I - P)$ , где  $I$  — единичная матрица, также является проектором.

Рассмотрим следующие представления «косых», проекторов на инвариантные подпространства матрицы  $A$  [11]:

$$P = [T_1 : T_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [T_1 : T_2]^{-1}, \quad I - P = [T_1 : T_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [T_1 : T_2]^{-1}.$$

Тогда  $P$  — проектор на  $E^s$  параллельно  $E^u$ , а  $(I - P)$  — проектор на  $E^u$  параллельно  $E^s$ . Отметим, что  $\|P\| \geq 1$  и  $\|P\| = 1$  тогда и только тогда, когда  $P$  — ортогональный проектор.

**Интегральные представления проекторов.** Если провести на комплексной плоскости замкнутый контур  $\gamma$ , разделяющий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то проекторы  $P$  и  $(I - P)$  можно вычислить при помощи некоторого комплексного интеграла по такому контуру [10, 11]. Если обходя контур против часовой стрелки, мы оставляем область, содержащую  $\lambda_1$ , слева, то имеет место представление

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda. \quad (12)$$

В этом представлении при  $|\lambda| > \|A\|$  матрица  $(\lambda I - A)^{-1}$  является ограниченной, ряд Неймана

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda} A \right)^n$$

абсолютно сходится и выполнено неравенство

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq (|\lambda| - \|A\|)^{-1}. \quad (13)$$

Рассмотрим модификацию представления (12) в случае, когда мнимая ось осуществляет дихотомию спектра матрицы  $A$ , то есть  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 > 0$ . В этом случае контур  $\gamma$  можно взять в виде границы полукруга, состоящей из отрезка  $\lambda = i\tau$  при  $-\alpha \leq \tau \leq \alpha$ , где  $\alpha > \|A\|$ , и полуокружности  $\lambda = \alpha e^{i\varphi}$  при  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (i\tau I - A)^{-1} d\tau + O(\|A\|/\alpha), \\ I - P &= \frac{1}{2} I - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (i\tau I - A)^{-1} d\tau + O(\|A\|/\alpha). \end{aligned}$$

**Возмущение резольвенты.** Рассмотрим резольвенту  $R(\lambda, \delta) = [\lambda I - A(\delta)]^{-1}$  матрицы  $A(\delta)$ . Пусть  $R_0(\lambda) = R(\lambda, 0) = (\lambda I - A)^{-1}$ . Тогда имеет место равенство

$$R(\lambda, \delta) = R_0(\lambda) [I - (A(\delta) - A) \cdot R_0(\lambda)]^{-1}. \quad (14)$$

Резольвента  $R(\lambda, \delta)$  существует, если второй сомножитель в (14) может быть определен абсолютно сходящимся рядом Неймана, а для этого достаточным условием служит, например, неравенство

$$\|A(\delta) - A\| < \|R_0(\lambda)\|^{-1}.$$

Это неравенство, очевидно, выполняется для достаточно малых  $\delta$ , если  $A(\delta)$  можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда. В этом случае правую часть формулы (14) также можно записать в виде степенного ряда относительно  $\delta$ . Отсюда и из того, что  $A(\delta) = A + \delta B + O(\delta^2)$ , получаем

$$R(\lambda, \delta) = R_0(\lambda) + \delta R_0(\lambda) B R_0(\lambda) + O(\delta^2). \quad (15)$$

**Возмущение собственных проекторов.** Оператор

$$P(\delta) = \frac{1}{2} I + \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R(i\tau, \delta) d\tau$$

является проектором на собственное подпространство  $E^s(\delta)$ , отвечающее собственному значению  $\lambda_1(\delta) < 0$  оператора  $A(\delta)$ . Интегрируя почленно разложение (15), получаем

$$P(\delta) = P + \delta P^{(1)} + O(\delta^2), \quad (16)$$

где проектор  $P = P(0)$  определен выше и

$$P^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R_0(i\tau) B R_0(i\tau) d\tau. \quad (17)$$

Отметим, что выражение  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R(i\tau) B R(i\tau) d\tau$  называется *главным значением несобственного интеграла*  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(i\tau) B R(i\tau) d\tau$ .

При  $\alpha > \|A\|$  из (15)–(17) следует, что

$$P^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} R_0(i\tau) B R_0(i\tau) d\tau + O(\|B\|/\alpha).$$

Таким образом, возмущение  $\delta P^{(1)}$  проектора  $P(\delta)$  на устойчивое инвариантное подпространство матрицы  $A(\delta)$  можно вычислить с помощью главного значения интеграла от функции  $R_0(\lambda) B R_0(\lambda)$ , взятого вдоль мнимой оси. Заметим, что в рассматриваемом случае, когда мнимая ось осуществляет дихотомию спектра оператора  $A$ , матрица  $\delta P^{(1)}$  является вещественной, поскольку имеет место равенство

$$P^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} (\tau^2 I + A^2)^{-1} (A B A - \tau^2 B) (\tau^2 I + A^2)^{-1} d\tau + O(\|B\|/\alpha).$$

Аналогично, для возмущенного проектора  $I - P(\delta)$  на инвариантное подпространство  $E^u(\delta)$  матрицы  $A(\delta)$  справедливо следующее асимптотическое представление с точностью до первого порядка по  $\delta$ :

$$I - P(\delta) = I - P - \delta P^{(1)} + O(\delta^2). \quad (18)$$

**Возмущение собственных векторов.** С помощью проекторов  $P(\delta)$  и  $I - P(\delta)$  мы теперь можем найти «приближенные собственные векторы» матрицы  $A(\delta)$ :

$$\varphi_j(\delta) = \varphi_j + (-1)^{j+1} \delta P^{(1)} \varphi_j + O(\delta^2), \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

Из (19) следует, что если норма  $\|P^{(1)}\|$  велика, то малое возмущение  $\delta$ , вообще говоря, может приводить к сравнительно большим изменениям собственных векторов  $\varphi_j(\delta)$  матрицы  $A(\delta)$ .

### § 3.2. Алгоритм уточнения гомоклинической орбиты

В этом разделе дается общее описание итерационного процесса уточнения петли сепаратрисы седловой точки и соответствующего значения параметра.

Рассмотрим седловую точку  $x = p(z)$  системы (2)  $\dot{x} = f(x, z)$ . Пусть имеется три точки  $a_1, a_2$  и  $a_3$ , лежащие в окрестности гомоклинической орбиты  $L_0$  и отличные от  $p(z)$ , причем  $a_1$  и  $a_2$  — вблизи стационарной точки. Если точки  $a_1$  и  $a_2$  не принадлежат устойчивому и неустойчивому инвариантным многообразиям  $E^s$  и  $E^u$  линеаризованной системы в окрестности  $p(z)$ , то мы можем заменить эти точки их проекциями на  $E^s$  и  $E^u$ :

$$a_j - \frac{(a_j - p(z), \psi_k)}{\|\psi_k\|^2} \cdot \psi_k, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2,$$

которые опять обозначим через  $a_j$ . Тогда две точки  $a_j$  можно представить в виде

$$a_j = p(z) + \varepsilon \varphi_j, \quad j = 1, 2.$$

Будем предполагать, что  $\varepsilon > 0$  достаточно мало. Обозначим через  $\pi_3$  гиперплоскость  $\pi_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - a_3, b_3) = 0\}$ , проходящую через точку  $a_3$  и ортогональную некоторому вектору  $b_3$ , который определяет трансверсальное сечение  $M$  векторного поля  $f$ . Пусть выполнено условие неортогональности векторов  $b_3$  и  $f(a_3, z)$ :

$$(b_3, f(a_3, z)) = (1 - \Delta) \cdot \|f(a_3, z)\| \cdot \|b_3\| > 0$$

с некоторым  $\Delta > 0$ . Пусть для  $j = 1, 2$  вектор-функции  $x_j(t, a_j, z)$ , определенные на интервалах  $[0, t_j]$ , соответственно, являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{dx_j}{dt} = (-1)^j f(x_j, z), \quad x_j(0, a_j, z) = a_j, \quad 0 \leq t \leq t_j,$$

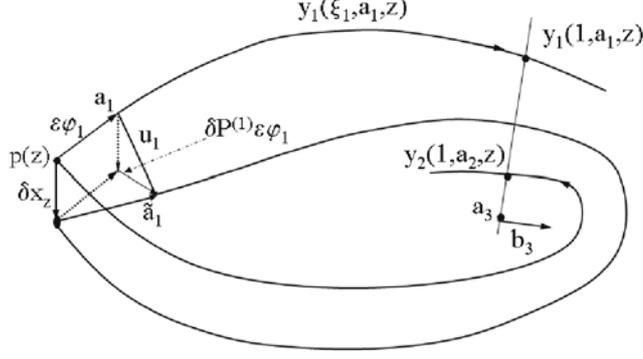


Рис. 6. Схема алгоритма уточнения гомоклинической траектории

и удовлетворяют условиям:  $(x_j(t_j, a_j, z) - a_3, b_3) = 0$ , или, эквивалентно,  $x_j(t_j, a_j, z) \in \pi_3$ .

Если для  $j = 1, 2$  ввести переменные  $\xi_j = t/t_j$  и обозначить функции  $x_j(\xi_j t_j, a_j, z)$  через  $y_j(\xi_j, a_j, z)$ , то  $y_j$  являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{dy_j}{d\xi_j} = (-1)^j t_j f(y_j, z), \quad y_j(0, a_j, z) = a_j, \quad 0 \leq \xi_j \leq 1, \quad (20)$$

и удовлетворяют условиям  $(y_j(1, a_j, z) - a_3, b_3) = 0$ . Таким образом, задача уточнения петли сепаратрисы сводится к следующей краевой задаче: найти значение параметра  $z$ , координаты точек  $a_1$  и  $a_2$ , интервалы времени  $t_1$  и  $t_2$  такие, чтобы решения задач Коши (20) при  $\xi_1 = \xi_2 = 1$  попадали на гиперплоскость  $\pi_3$  и удовлетворяли условию  $y_1(1, a_1, z) = y_2(1, a_2, z)$ .

Пусть  $\delta$  — малое возмущение параметра  $z$  и

$$u_j = \delta x_z + (-1)^{j+1} \delta \varepsilon P^{(1)} \varphi_j \quad (21)$$

— малые возмущения начальных условий  $a_j$  такие, что  $a_j + u_j$  лежат на искомой гомоклинической траектории, а  $\tau_j$  — результирующие малые изменения времен прихода траекторий  $y_j(\xi_j, a_j + u_j, z + \delta)$  на гиперплоскость  $\pi_3$  (см. рис. 6).

Разлагая решение  $y_j(1 + \tau_j, a_j + u_j, z + \delta)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(1, a_j, z)$  и удерживая члены до первого порядка малости, получим для  $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} y_j(1 + \tau_j, a_j + u_j, z + \delta) &= y_j(1, a_j, z) + (-1)^j \tau_j t_j f(y_j(1, a_j, z), z) + \\ &+ D_j(1) \cdot u_j + \delta \cdot y_{jz}(1, a_j, z), \end{aligned} \quad (22)$$

где матрица  $D_j(\xi) = y'_{ja}(\xi, a, z) |_{a=a_j}$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{d}{d\xi} D_j(\xi) = (-1)^j t_j \cdot f'_y(y_j(\xi, a_j, z), z) \cdot D_j(\xi), \quad D_j(0) = I,$$

а производная по параметру  $y_{jz}(\xi, a, z)$  является решением задачи Коши:

$$\frac{dy_{jz}}{d\xi} = (-1)^j t_j [f'_y(y_j(\xi, a_j, z), z) \cdot y_{jz} + f'_z(y_j(\xi, a_j, z), z)], \quad y_{jz}(0) = 0.$$

Перепишем равенства (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} y_j(1 + \tau_j, a_j + u_j, z + \delta) - a_3 &= (-1)^j \tau_j t_j f(y_j(1, a_j, z), z) + D_j(1) \cdot u_j + \\ &+ \delta y_{jz}(1, a_j, z) + y_j(1, a_j, z) - a_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим, что траектории  $y_1$  и  $y_2$  образуют искомую петлю сепаратрисы седловой точки. Тогда левые части равенств (23) совпадают, это возмущение  $u_3$  точки  $a_3$ . Обозначим  $h_j = y_j(1, a_j, z) - a_3$  и, учитывая (21), запишем (23) в виде

$$\begin{aligned} u_3 &= (-1)^j \tau_j t_j f(y_j(1, a_j, z), z) + \delta D_j(1)x_z + (-1)^{j+1} \delta \varepsilon D_j(1)P^{(1)}\varphi_j \\ &+ \delta y_{jz}(1, a_j, z) + h_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Пусть вектор  $b_3$  выбран так, что  $\|b_3\| = 1$ . Поскольку расположение вектора  $u_3$  предопределено поведением частных решений  $y_j$  и условием трансверсальности, сделаем линейное ортогональное преобразование  $\mathcal{P}_3$ , при котором вектор  $\mathcal{P}_3 u_3$  будет расположен стандартно, например, ортогонален вектору  $e = (0, 1)$ :

$$\mathcal{P}_3 u_3 = u_3 - 2 \frac{(u_3, b_3 - e)}{\|b_3 - e\|^2} (b_3 - e).$$

Определим вектор  $v_3$  равенством  $u_3 = \mathcal{P}_3 v_3$ . Тогда из (24) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3 v_3 &= (-1)^j \tau_j t_j f(y_j(1, a_j, z), z) + \delta D_j(1)x_z + \\ &+ (-1)^{j+1} \delta \varepsilon D_j(1)P^{(1)}\varphi_j + \delta y_{jz}(1, a_j, z) + h_j. \end{aligned}$$

Поскольку  $\mathcal{P}_3^2 = I$ , то используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_j &= t_j \mathcal{P}_3 f(y_j(1, a_j, z), z), & \theta_j &= \mathcal{P}_3 h_j, \\ \mathcal{R}_j &= \mathcal{P}_3 D_j(1)x_z + (-1)^{j+1} \varepsilon \mathcal{P}_3 D_j(1)P^{(1)}\varphi_j + \mathcal{P}_3 y_{jz}(1, a_j, z), \end{aligned}$$

эти равенства можно переписать в виде

$$v_3 = (-1)^j \tau_j g_j + \delta \mathcal{R}_j + \theta_j,$$

или в покомпонентной форме:

$$\begin{bmatrix} v_3^1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)^j \tau_j \begin{bmatrix} g_j^1 \\ g_j^2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \mathcal{R}_j^1 \\ \mathcal{R}_j^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_j^1 \\ \theta_j^2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Выразим  $(-1)^j \tau_j$  из последнего уравнения системы (25)

$$(-1)^j \tau_j = -\frac{1}{g_j^2} (\delta \mathcal{R}_j^2 + \theta_j^2), \quad (26)$$

а оставшиеся уравнения запишем в виде

$$v_3^1 = \delta \left[ \mathcal{R}_j^1 - \frac{g_j^1}{g_j^2} \mathcal{R}_j^2 \right] + \theta_j^1 - \frac{g_j^1}{g_j^2} \theta_j^2, \quad j = 1, 2,$$

откуда получаем

$$\delta = - \left[ \theta_1^1 - \theta_2^1 - \frac{g_1^1}{g_1^2} \theta_1^2 + \frac{g_2^1}{g_2^2} \theta_2^2 \right] / \left[ \mathcal{R}_1^1 - \mathcal{R}_2^1 - \frac{g_1^1}{g_1^2} \mathcal{R}_1^2 + \frac{g_2^1}{g_2^2} \mathcal{R}_2^2 \right]. \quad (27)$$

Поскольку значение  $z + \delta$  является лишь приближением бифуркационного значения параметра  $z_0$ , при котором существует гомоклиническая траектория, то следующие приближения для параметра  $z$ , начальных данных  $a_j$  задачи Коши (20) и для интервалов  $t_j$  определяются с использованием формул (21), (24), (26) и (27) следующим образом

$$z^{new} = z + \delta, \quad a_3^{new} = a_3 + u_3, \quad a_j^{new} = a_j + u_j, \quad t_j^{new} = t_j(1 + \tau_j), \quad j = 1, 2.$$

Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока величины  $z$ ,  $a_3$ ,  $a_j$  и  $t_j$  для  $j = 1, 2$  не будут найдены с достаточной точностью.

## Литература

- [1] Г. А. Чумаков, М. Г. Слинъко, Кинетическая турбулентность (хаос) скорости реакции взаимодействия водорода с кислородом на металлических катализаторах, Докл. АН СССР, **266**, № 5 (1982), 1194–1198.
- [2] G. A. Chumakov, N. A. Chumakova, Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards, Chem. Eng. J., **91**, No. 2–3 (2003), 151–158.
- [3] В. И. Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
- [4] А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., Наука, 1967.
- [5] Г. А. Чумаков, Анализ математических моделей автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции, Дис. канд. физ.-мат. наук, Новосибирск, НГУ, 1985.
- [6] Г. А. Чумаков, В. Д. Беляев, Р. Плихта (США), В. И. Тимошенко, М. Г. Слинъко, Число и устойчивость стационарных состояний четырехстадийной реакции, Докл. АН СССР, **253**, № 2 (1980), 418–421.
- [7] Е. А. Иванова, N. A. Chumakova, G. A. Chumakov, An algorithm for the saddle-loop homoclinic orbit finding in two-dimensional kinetic model, Труды конференции по вычислительной математике МКВМ-2004, Новосибирск, 2004, 870–875.
- [8] Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн, Теория и приложения бифуркации рождения цикла, М., Мир, 1985.

- [9] *А. К. Звонкин, М. А. Шубин*, Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений, *Успехи мат. наук*, **39**, № 2 (1984) 77–124.
- [10] *Т. Като*, Теория возмущений линейных операторов, М., Мир, 1972.
- [11] *С. К. Годунов*, Современные аспекты линейной алгебры, Новосибирск, Научная книга, 1997.
- [12] *Е. А. Иванова, Н. А. Чумакова*, Оценка глобальной ошибки дискретизации на периодических решениях и решениях-утках одной кинетической модели, Тезисы докладов Международной конференции молодых ученых по математическому моделированию и информатике, Новосибирск, 2002, 29.