Реализация алгоритмов построения регуляризованных сплайнов

студент Добросельский М.К.

научный рук. Роженко А.И.

НГУ, 2014

Цель и задачи

Цель

Исследовать новые радиальные базисные функции $h_{\nu,n}$, используемые для построения регуляризованных сплайнов и разработать алгоритмы их вычисления

Задачи

1. Изучить новые радиальные базисные функции $h_{\nu,n}$
2. Получить алгоритмы их вычисления, пригодные для программной реализации
3. Написать программный код, реализующий эти алгоритмы

РБФ-сплайн

Тренд

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Phi(x, x_i) + p(x)}$$

Радиальная базисная функция $\Phi(x, x_i) = \phi(|x - x_i|)$

Популярные РБФ

- **Гауссиан**

$$\phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^2}$$

- **Мультиквадрик**

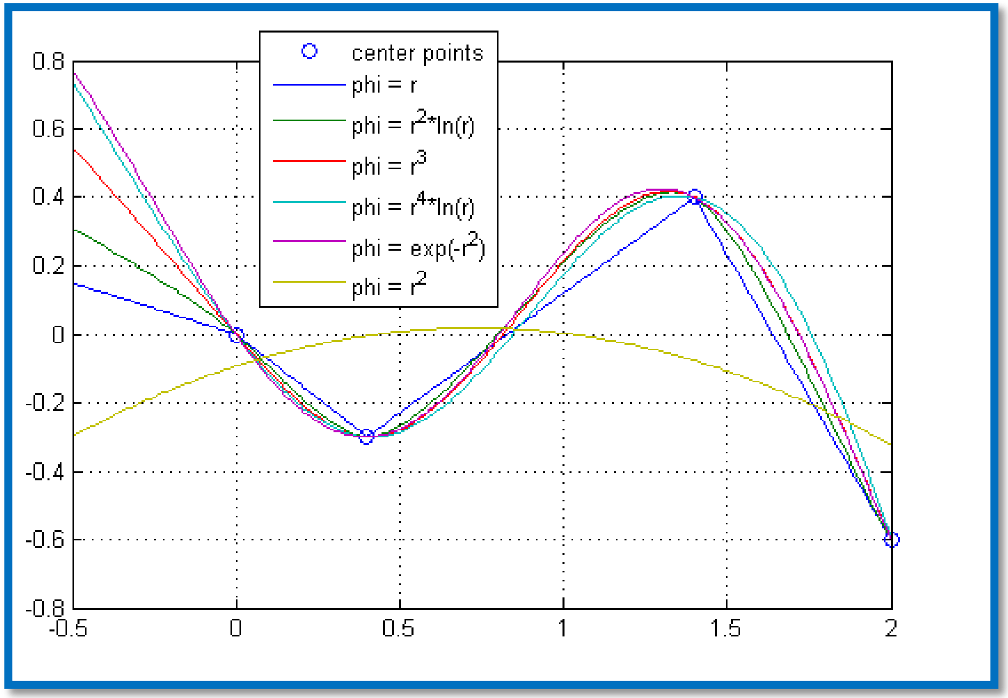
$$\phi(r) = -\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$$

- **Обратный мультиквадрик**

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$$

- **Сплайн тонкой пластины**

$$\phi(r) = r^2 \ln(r)$$



Сплайны Л. Миташа и Е. Миташевой

Сплайн с натяжением

$$\phi(r) = \frac{1}{2\varphi^3}\left(1 - \varphi r - e^{-\varphi r}\right), d = 1$$

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi\varphi^2}\left[\ln\left(\frac{\varphi r}{2}\right) + \gamma + K_0(\varphi r)\right], d = 2$$

Регуляризованный сплайн

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{r^2}{4}\left[\ln\left(\frac{r}{2\tau}\right) + \gamma - 1\right] + \tau^2\left[K_0\left(\frac{r}{\tau}\right) + \gamma + \ln\left(\frac{r}{2\tau}\right)\right]\right\}, d = 2$$

$$\phi(r) = \frac{\tau^2}{2\pi r}\left[e^{-r/\tau} - 1 + \frac{r}{\tau} - \frac{r^2}{2\tau^2}\right], d = 3$$

Функции h_ν и $\widetilde{h}_\nu$

Введём вспомогательные функции $\boldsymbol{h_\nu}$

$$h_\nu(t) = t^{\nu/2} K_\nu\left(\sqrt{t}\right)$$

и $\boldsymbol{\tilde{h}_\nu}$

$$\tilde{h}_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(-\nu)t^\nu}{2^{\nu+1}}, & \nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+ \\[2ex] (-1)^{\nu+1} \dfrac{t^\nu \left[\ln\left(\dfrac{t}{4}\right) - \psi(1) - \psi(\nu+1)\right]}{\nu!\, 2^{\nu+1}}, & \nu \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

Функция $h_{\nu,n}$

С помощью предыдущих функций определим функцию $\boldsymbol{h_{\nu,n}}$

$$h_{\nu,0}(t) = \tilde{h}_\nu(t) - h_\nu(t),$$

$$h_{\nu,n}(t) = \frac{\tilde{h}_{\nu+n}(t)}{n!\,2^n} - h_{\nu,n-1}(t), \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\boxed{h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}\left(h_\nu(t) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\tilde{h}_{\nu+k}(t)}{k!\,2^k}\right)}$$

Связь с функциями Миташа и Миташевой

Имеет место следующая связь

$$\phi(r) = f\left((ar)^2 + b^2\right) + p(r^2)$$

Тогда

$h_{1-\frac{d}{2},0}$ – РБФ сплайна с натяжением

$h_{1-\frac{d}{2},1}$ – РБФ регуляризованного сплайна

Методы вычисления функции h_ν

$\boldsymbol{\nu = n \in \mathbb{Z}_+}$

$$h_0(t) = K_0\left(\sqrt{t}\right),$$

$$h_1(t) = \sqrt{t}K_1\left(\sqrt{t}\right),$$

$$h_{n+1}(t) = th_{n-1}(t) - 2nh_n(t)$$

$\boldsymbol{\nu = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}_+}$

$$h_{n+\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\pi/2}e^{-\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!\,2^k}t^{\frac{n-k}{2}}$$

Методы вычисления функции $h_{\nu,n}$

Общий случай

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}\left(h_\nu(t) - \frac{(-1)^{\nu+1} t^\nu \ln\left(\frac{t}{4}\right)}{2^{\nu+1}} \sum_{k\in K} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!\,4^k} t^k - \frac{t^\nu}{2^{\nu+1}} \sum_{l\in L} \frac{(-1)^l \Gamma(-\nu-l)}{l!\,4^l} t^l\right),$$

$$I = \{i \in \mathbb{Z}, 0 \le i \le n\},$$
$$K = \{k \in I, \nu + k \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$L = \{l \in I, \nu + l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+\},$$

Методы вычисления функции $h_{\nu,n}$

Особенности

$h_{-n,n}$

$$h_{-n,n}(t) = -\frac{\psi(n+1)+\gamma}{2^{n+1}n!} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{t}{4}\right) - \psi(k+1) - \psi(n+k+1)\right]\frac{\left(\frac{t}{4}\right)^k}{k!\,(n+k)!}$$

$$h_n(t) = 2^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(-\frac{t}{4}\right)^k + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{t}{4}\right) + \gamma - \psi(n+k+2)\right]\frac{\left(\frac{t}{4}\right)^k}{k!\,(n+k+1)!}$$

Методы вычисления функции $h_{\nu,n}$

Особенности

$h_{-n-\frac{1}{2},n}$

$$h_{-n-\frac{1}{2},n}(t) = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k!\,(n-k)!}\left(e^{-\sqrt{t}}\frac{(n+k)!}{2^k}t^{-\frac{n+k+1}{2}} - \frac{(-1)^k\big(2(n-k)\big)!}{2^n}t^{k-n-\frac{1}{2}}\right)$$

Результаты

1. Изучены и проанализированы функции $h_{\nu,n}$
2. Получены формулы вычисления функции $h_{\nu,n}$, удобные для программной реализации
3. Написан и протестирован программный код вычисления функции $h_{\nu,n}$, добавленный в библиотеку SDM

Спасибо за внимание