Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1. Обзор предметной области 4

1.1 РБФ-сплайн 4

1.2 Основные определения и обозначения 4

1.3 Популярные РБФ 5

Глава 2. Семейство функций $h_{\nu,n}$ 6

2.1 РБФ Л. Миташа и Е. Миташевой 6

2.2 Функции h_ν и $\tilde{h}_\nu$ 7

2.3 Функция $h_{\nu,n}$ 8

2.4 Связь функции $h_{\nu,n}$ с функциями Л. Миташа и Е. Миташевой 8

Глава 3. Реализация вычисления функций $h_{\nu,n}$ 9

3.1 Общий случай 9

3.2 Вычисление функции h_ν 9

3.3 Особенности вычисления $h_{\nu,n}$ 10

3.3.1 Вычисление $h_{-n,n}$ 10

3.3.2 Вычисление $h_{-n-1/2,n}$ 11

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 13

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 14

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной дипломной работы является реализация на языке программирования и последующая оптимизация новых радиальных базисных функций (РБФ), предложенных Роженко А. И. в [1], которые могут быть использованы в качестве базисных функций в многомерных сплайнах. Данные функции являются обобщением РБФ для сплайна с натяжением и регуляризованного сплайна, введённых Л. Миташем и Е. Миташевой в [2].

Радиальные функции используются для построения РБФ-сплайнов при решении задачи аппроксимации данных. Данный метод напоминает размещение резиновой мембраны между опорными точками и одновременно уменьшение общей кривизны поверхности. Выбор конкретной базисной функции определяет поведение этой мембраны между значениями.

Радиальные базисные функции часто используются для создания сглаженных поверхностей из большого количества расчетных данных. Также с их помощью можно создавать слабо изменяющиеся поверхности, например поверхности высот, благодаря чему РБФ-сплайны активно используются в геоинформационных системах (ГИС). В число других задач, решаемых с помощью РБФ, входят реконструкция изображений, подавление шума в данных и др. Кроме того, с их помощью решаются такие важные проблемы, как создание трёхмерных изображений при ультразвуковом исследовании в медицине и проектирование крыльев самолётов. Всё это доказывает важность исследований методов приближения РБФ-сплайнами.

Перед автором данной дипломной работы была поставлена задача – реализовать радиальные базисные функции, предложенные в [1], на языке программирования C#, провести оптимизацию полученных решений и включить их в библиотеку SDM. Для реализации были использованы: интегрированная среда разработки Microsoft Visual Studio 2010, а также программный пакет Scilab, как средство для построения графиков.

Глава 1. Обзор предметной области

В данной главе будут предоставлены базовые сведения по интерполяции сплайнами на основе РБФ, введены основные определения, а также приведены примеры наиболее известных радиальных базисных функций.

1.1 РБФ-сплайн

Если некоторая функция $\Phi(s,t)$ зависит только от расстояния между точками s и t, то она называется *радиальной базисной функцией*. То есть, $\Phi(s,t)$ – РБФ, если

$$\Phi(s,t) = \phi(|s-t|),$$

где s и t из пространства $\mathbb{R}^d$, $|s-t|$ – Евклидово расстояние между точками s и t.

Обычно аргумент $|s-t|$ записывают, как r, тем самым сокращая запись до $\phi(r)$. Саму функцию ϕ называют порождающей функцией для Φ, а точку t – центральной точкой.

РБФ-сплайном на сетке с узлами $x_i \in \mathbb{R}^d,\ i = 1, \dots, N$ называют конструкцию вида

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi(|x - x_i|) + p(x)$$

где $\phi \in C[0,\infty)$ – РБФ, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ – произвольные значения, $p(x)$ – функция из заданного конечномерного линейного пространства $\mathcal{P}$ непрерывных функций.

1.2 Основные определения и обозначения

Пространство $\mathcal{P}$ называется *трендом сплайна*. Обычно $\mathcal{P} = \mathbb{P}^d_{m-1}$, т.е. пространство полиномов степени меньше $m \in \mathbb{Z}_+$ на $\mathbb{R}^d$. Тренд определяет поведение сплайна между узлами и на бесконечности.

Функция $\phi(r)$ называется *условно положительно определённой на* $\mathbb{R}^d$ *относительно* $\mathcal{P}$, если для любых различных точек $y_i \in \mathbb{R}^d$ и коэффициентов (среди которых есть хотя бы один ненулевой) $\mu_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, M,\ M \in \mathbb{N}$, таких что

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i p(y_i) = 0 \ \ \forall p \in \mathcal{P},$$

выполняется

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\mu_i\mu_j\phi(|y_i-y_j|)>0.$$

Если $\mathcal{P}=\mathbb{P}_{m-1}^d$, то $\phi(r)$ называется *условно положительно определённой порядка* m *на* $\mathbb{R}^d$.

Обозначим через $\mathcal{R}_m^d$ множество всех условно положительно определённых РБФ порядка m на $\mathbb{R}^d$. Очевидно, что $\mathcal{R}_{m_1}^{d_1}\subset\mathcal{R}_m^d$ при $m_1\le m$ и $d_1\ge d$. Таким образом, можно ввести обозначение $\mathcal{R}_m^\infty\coloneqq\bigcap_{d=1}^\infty\mathcal{R}_m^d$. Функции из $\mathcal{R}_m^\infty$ имеют прямую связь с вполне монотонными функциями. Функцию $f\in C^\infty(0,\infty)$ называют вполне монотонной, если $(-1)^k f^{(k)}\ge 0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$.

Обозначим через $\mathcal{M}_m$ множество функций $f\in C^\infty(0,\infty)$, имеющих вполне монотонную производную $(-1)^m f^{(m)}$. Известно, что если функция $f\in\mathcal{M}_m$ ограничена в нуле и $f^{(m)}$ не константа, то $f(r^2)\in\mathcal{R}_m^\infty$. И обратно, $\phi(\cdot)\in\mathcal{R}_m^\infty\Rightarrow\phi(\sqrt{\cdot})\in\mathcal{M}_m$ [3, 4].

1.3 Популярные РБФ

Приведём список наиболее распространённых РБФ.

1) *Мультиквадрик*

$$\phi(r)=(-1)^{\lfloor\nu\rfloor+1}(r^2+c^2)^\nu,$$
$$\nu\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+,\nu>0.$$

2) *Обратный мультиквадрик*

$$\phi(r)=(r^2+c^2)^\nu,$$
$$\nu\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+,\nu<0.$$

3) *Полигармонический сплайн*

$$\phi(r)=(-1)^{\nu+1}r^{2\nu}\ln r,$$
$$\nu\in\mathbb{N}.$$

4) *Сплайн тонкой пластины*. Данный сплайн является частным случаем полигармонического сплайна при $\nu=1$, а его РБФ имеет вид

$$\phi(r)=r^2\ln r.$$

5) *DMM-сплайн*

$$\phi(r)=(-1)^{\nu+1}(r^2+c^2)^\nu\ln(r^2+c^2),$$
$$\nu\in\mathbb{Z}_+.$$

Отметим также, что каждая из перечисленных функций $\phi(r)$ принадлежит $\mathcal{M}_{(\lfloor\nu\rfloor+1)_+}$, где $(k)_+=\max\{k,0\}$.

Глава 2. Семейство функций $h_{\nu,n}$

В данной главе будут рассмотрены функции, послужившие основой для создания нового семейства функций $h_{\nu,n}$, сведения о котором также будут представлены.

2.1 РБФ Л. Миташа и Е. Миташевой

В своей работе [2] Любош Миташ и Елена Миташева, работающие в университете штата Северная Каролины, ввели сплайны, которые и послужили основой для разработки новых РБФ, реализация вычисления которых является целью данной дипломной работы. Перечислим радиальные базисные функции этих сплайнов:

1) *Сплайн с натяжением*

$$\phi(r) = \frac{1}{2\varphi^3}(1 - \varphi r - e^{-\varphi r}),\ d = 1,$$

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi\varphi^2}\left[\ln\left(\frac{\varphi r}{2}\right) + \gamma + K_0(\varphi r)\right],\ d = 2,$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка (см., напр., [5]); γ – константа Эйлера, равная примерно 0.577215.

2) *Регуляризованный сплайн*

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{r^2}{4}\left[\ln\left(\frac{r}{2\tau}\right) + \gamma - 1\right] + \tau^2\left[\mathrm{K}_0\left(\frac{r}{\tau}\right) + \gamma + \ln\left(\frac{r}{2\tau}\right)\right]\right\},\ d = 2,$$

$$\phi(r) = \frac{\tau^2}{2\pi r}\left[e^{-r/\tau} - 1 + \frac{r}{\tau} - \frac{r^2}{2\tau^2}\right],\ d = 3.$$

Параметр φ представляет собой *обобщённый параметр натяжения*. Его влияние на получаемый сплайн продемонстрировано на Рисунке 1. Чем больше значение φ, тем меньше расстояние, на котором каждая точка вносит свой вклад в вид интерполянта. При построении данного графика использовался сплайн с трендом 37, и, как видно из рисунка, при больших значениях параметра натяжения значения сплайна между точками приближаются к тренду. При небольших же значениях φ возможны сильные скачки интерполянта между точками. Влияние параметра τ является обратным к φ.

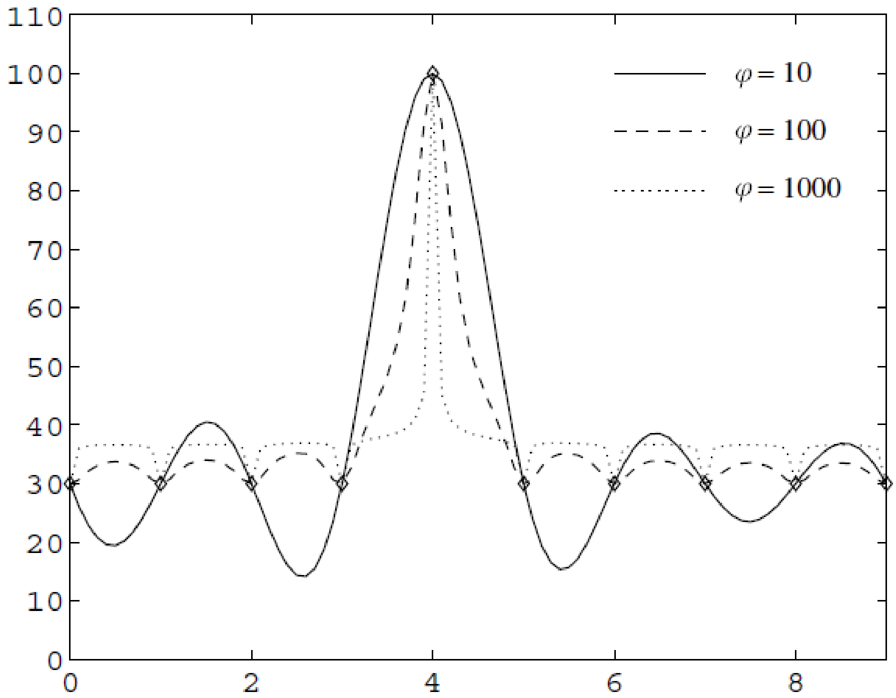

Рисунок 1. Влияние параметра φ в сплайне с натяжением на вид интерполирующей функции.

2.2 Функции h_ν и $\tilde{h}_\nu$

Чтобы определить семейство $h_{\nu,n}$, необходимо ввести два вспомогательных семейства функций $h_\nu(t)$ и $\tilde{h}_\nu(t)$. Функции $h_\nu(t)$ определяются по формуле

$$h_\nu(t) = t^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{t}),$$

где K_ν – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка ν (см., напр., [5]).

В случае $\nu = n \in \mathbb{Z}_+$ существует разложение в степенной ряд функции $h_\nu \in \mathcal{M}_0$, имеющее вид [1]

$$h_n(t) = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{t}{4}\right)^k + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{t}{4}\right) + \gamma - \psi(n+k+2)\right] \frac{\left(\frac{t}{4}\right)^k}{k!\,(n+k+1)!}, \tag{2.1}$$

где $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$ (γ – константа Эйлера).

Кроме того, из равенства $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$ следует

$$h_\nu(t) = t^\nu h_{-\nu}(t). \tag{2.2}$$

Функции $\tilde{h}_\nu(t) \in \mathcal{M}_{(\lfloor\nu\rfloor+1)_+}$ определяются по формуле

$$\tilde{h}_\nu(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(-\nu)t^\nu}{2^{\nu+1}}, & \nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+ \\ (-1)^{\nu+1}\frac{t^\nu\left[\ln\left(\frac{t}{4}\right)-\psi(1)-\psi(\nu+1)\right]}{\nu!2^{\nu+1}}, & \nu \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \tag{2.3}$$

где Γ – гамма-функция.

2.3 Функция $h_{\nu,n}$

В качестве обобщения РБФ из 2.1 в [1] было предложено семейство функций $h_{\nu,n}(t) \in \mathcal{M}_{(\lfloor\nu\rfloor+n+1)_+}$. Данное семейство определяется рекуррентно по формулам

$$h_{\nu,0}(t) = \tilde{h}_\nu(t) - h_\nu(t),$$

$$h_{\nu,n}(t) = \frac{\tilde{h}_{\nu+n}(t)}{n!\,2^n} - h_{\nu,n-1}(t), \qquad n = 1,2,\dots$$

что эквивалентно формуле

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}\left(h_\nu(t) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\tilde{h}_{\nu+k}(t)}{k!2^k}\right). \tag{2.4}$$

В [1] сформулирована и доказана теорема о предельных значениях функции $h_{\nu,n}(t)$ при малых значениях t. В теореме утверждается, что

$$h_{\nu,n}(t) \sim \begin{cases} \frac{\tilde{h}_{\nu+n+1}(t)}{(n+1)!\,2^{n+1}}, & \nu \le -n-1 \\ O(1), & -n-1 < \nu < 0 \\ o(1), & \nu = 0 \\ (-1)^{n+1}\Gamma(\nu)2^{\nu-1}, & \nu > 0 \end{cases}$$

2.4 Связь функции $h_{\nu,n}$ с функциями Л. Миташа и Е. Миташевой

Прежде всего, стоит обратить внимание на то, как соотносятся аргументы функций, r и t. Имеет место следующая связь между $f \in \mathcal{M}_m$ и $\phi \in \mathcal{R}_m^d$

$$\phi(r) = f((ar)^2 + b^2), \tag{2.5}$$

где $b \neq 0$, если функция не ограничена в нуле. При этом к функции ϕ можно добавить любой полином $p(r^2) \in \mathbb{P}_{m-1}^1$, не влияющий на принадлежность f к $\mathcal{M}_m$.

Учитывая это, функция $h_{1-\frac{d}{2},0} \in \mathcal{M}_{\left(\left\lfloor 1-\frac{d}{2}\right\rfloor+1\right)_+}$ соответствует РБФ сплайна с натяжением при $d = 1,2$, а функция $h_{1-\frac{d}{2},1} \in \mathcal{M}_{\left(\left\lfloor 1-\frac{d}{2}\right\rfloor+2\right)_+}$ – РБФ регуляризованного сплайна при $d = 2,3$.

Глава 3. Реализация вычисления функций $h_{\nu,n}$

В данной главе будут рассмотрены методы вычисления функции $h_{\nu,n}$, пригодные для практического использования, будут обсуждены некоторые возникшие проблемы и их решения.

3.1 Общий случай

В общем случае используется формула (2.4), которую, с учётом (2.3), можно представить в виде

$$h_{\nu,n}(t) = (-1)^{n+1}\left(h_\nu(t) - \frac{(-1)^{\nu+1}t^\nu \ln\left(\frac{t}{4}\right)}{2^{\nu+1}}\sum_{k\in K}\frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!\,4^k}t^k\right.$$
$$\left.-\frac{t^\nu}{2^{\nu+1}}\sum_{l\in L}\frac{(-1)^l\Gamma(-\nu-l)}{l!\,4^l}t^l\right),$$
$$I = \{i \in \mathbb{Z}, 0 \le i \le n\},$$
$$K = \{k \in I, \nu + k \in \mathbb{Z}_+\}, L = \{l \in I, \nu + l \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+\}, \tag{3.1}$$

в которой также опущены константы, добавляемые к $\ln\left(\frac{t}{4}\right)$ в формуле для $\tilde{h}_\nu(t)$ в случае $\nu \in \mathbb{Z}_+$.

3.2 Вычисление функции h_ν

Для практических задач важны случаи вычисления функции h_ν для целых и полуцелых значений ν. В случае $\nu = n \in \mathbb{Z}_+$ применяется рекуррентное определение

$$h_0(t) = K_0(\sqrt{t}),$$
$$h_1(t) = \sqrt{t}K_1(\sqrt{t}),$$
$$h_{n+1}(t) = th_{n-1}(t) - 2nh_n(t).$$

В случае $\nu = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}_+$ применяется формула [5]

$$h_{n+\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\pi/2}e^{-\sqrt{t}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!2^k}t^{\frac{n-k}{2}}. \tag{3.2}$$

При отрицательных значениях ν используется формула (2.2). Для вычисления модифицированных функций Бесселя второго рода порядков 0 и 1 были использованы дробно-рациональные приближения из библиотеки Boost / Math / Special Functions [7].

3.3 Особенности вычисления $h_{\nu,n}$

В разделе 2.4 была рассмотрена связь (2.5), из которой следует важность умения верно рассчитывать значение функции в нуле. В данном разделе будет рассмотрено вычисление функции $h_{\nu,n}$ при $t \to 0$ в случаях $\nu + n = 0$ и $\nu + n = -\frac{1}{2}$. В данных случаях возникает разница больших значений, которая мала, т. е. возникает потеря точности. Поэтому были проведены эксперименты с альтернативными способами вычисления таких функций в окрестности нуля с целью выяснить, насколько точны прямые расчётные формулы.

3.3.1 Вычисление $h_{-n,n}$

Для вычисления функции $h_{\nu,n}$ в случае $\nu + n = 0$ было решено использовать формулу (2.1), что привело к формуле

$$h_{-n,n}(t) = -\frac{\psi(n+1)+\gamma}{2^{n+1}n!} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{t}{4}\right) - \psi(k+1) - \psi(n+k+1)\right]\frac{\left(\frac{t}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}. \quad (3.3)$$

При $t < 4$ ряд знакопостоянный и быстро сходится, поэтому был проведен сравнительный эксперимент вычисления функции $h_{0,0}$ на отрезке $(0;\ 4)$ с помощью формул (3.1) и (3.3). Результаты этого эксперимента показаны в таблице 1, где $\delta = \left|h_{0,0(3.1)} - h_{0,0(3.3)}\right|$.

Таблица 1. Сравнение результатов расчёта функции $h_{-n,n}(t)$ при $t < 4$ с помощью прямой и альтернативной формул

t	$h_{0,0(3.1)}$	$h_{0,0(3.3)}$	δ
1e–10	-3,15723e-10	-3,15721e-10	1,13469e-15
1e–9	-2,86939e-09	-2,86939e-09	7,26527e-16
1e–8	-2,58157e-08	-2,58157e-08	2,30052e-15
1e–7	-2,29374e-07	-2,29374e-07	5,87277e-16
1e–6	-2,00592e-06	-2,00592e-06	5,37645e-16
1e–5	-1,7181e-05	-1,7181e-05	9,62199e-16
1e–4	-1,43029e-04	-1,43029e-04	1,13028e-17
1e–3	-1,14253e-03	-1,14253e-03	3,40656e-16
1e–2	-8,55242e-03	-8,55242e-03	2,2031e-16
1e–1	-5,71143e-02	-5,71143e-02	7,63278e-17
1	-3,05093e-01	-3,05093e-01	5,55112e-17
2	-4,69784e-01	-4,69784e-01	5,55112e-17

3	-5,92307e-01	-3,50837e-02	1,99928e-02

Как видно из таблицы, прямая формула (3.1) имеет достаточную точность, стало быть, можно использовать её. В случае же $t < \epsilon$ (машинный эпсилон) используется формула (3.2), в которой используется только первая константа и первый член ряда, т.е.

$$h_{-n,n} = -\frac{\psi(n+1)+\gamma}{2^{n+1}n!} + \frac{\left(\ln\left(\frac{t}{4}\right) - \psi(2) - \psi(n+2)\right)t}{2^{n+3}}.$$

3.3.2 Вычисление $h_{-n-\frac{1}{2},n}$

Для вычисления функции $h_{\nu,n}$ в случае $\nu + n = -\frac{1}{2}$ было решено использовать формулу (3.2), что привело к формуле

$$h_{-n-\frac{1}{2},n}(t) = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{k!(n-k)!}\left(e^{-\sqrt{t}}\frac{(n+k)!}{2^k}t^{-\frac{n+k+1}{2}} - \frac{(-1)^k(2(n-k))!}{2^n}t^{k-n-\frac{1}{2}}\right), \quad (3.4)$$

в которой $e^{-\sqrt{t}}$ раскладывается в ряд Тейлора

$$e^{-\sqrt{t}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(-\sqrt{t}\right)^l}{l!}.$$

Был проведён сравнительный эксперимент вычисления функции $h_{-\frac{1}{2},0}$ на отрезке $(0;\ 5)$ с помощью формул (3.1) и (3.4). Отрезок был выбран произвольно. Результаты этого эксперимента показаны в таблице 2, где $\delta = \left|h_{-\frac{1}{2},0(3.1)} - h_{-\frac{1}{2},0(3.4)}\right|$.

Таблица 2. Сравнение результатов расчёта функции $h_{-n-\frac{1}{2},n}(t)$ при $t \leq 5$ с помощью прямой и альтернативной формул

t	$h_{-\frac{1}{2},0(3.1)}$	$h_{-\frac{1}{2},0(3.4)}$	δ
1e-10	1,25331e+00	1,25331e+00	7,18314e-13
1e-09	1,25329e+00	1,25329e+00	1,63469e-12
1e-08	1,25325e+00	1,25325e+00	1,68754e-14
1e-07	1,25312e+00	1,25312e+00	4,84057e-14
1e-06	1,25269e+00	1,25269e+00	3,77476e-14
1e-05	1,25133e+00	1,25133e+00	1,9984e-15
1e-04	1,24707e+00	1,24707e+00	6,66134e-15
1e-03	1,2337e+00	1,2337e+00	2,22045e-16

1e-02	1,19269e+00	1,19269e+00	8,88178e-16
1e-01	1,07448e+00	1,07448e+00	2,22045e-16
0,5	8,98512e-01	8,98512e-01	2,22045e-16
1	7,92246e-01	7,92246e-01	1,11022e-16
2	6,7077e-01	6,7077e-01	0,0e+00
3	5,95581e-01	5,95581e-01	0,0e+00
4	5,41848e-01	5,41848e-01	1,11022e-16
5	5,00594e-01	5,00594e-01	1,11022e-16

Из таблицы видно, что прямая формула (3.1) имеет достаточную точность, поэтому можно использовать её. В случае же $t < \epsilon$ используется формула (3.4), в которой используются первые члены разложения экспоненты в ряд, что приводит к некоторым частным формулам

$$h_{-\frac{1}{2},0}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right),$$

$$h_{-\frac{3}{2},1}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{t}}{6}\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные перед автором дипломной работы задачи были успешно выполнены, а именно:

1) изучены и проанализированы функции $h_{\nu,n}$, предложенные в [1];

2) получены формулы вычисления функции $h_{\nu,n}$, удобные для программной реализации;

3) написан и протестирован программный код вычисления функции $h_{\nu,n}$, добавленный в библиотеку SDM.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.I. Rozhenko, On new families of radial basis functions // Proc. Int. Conf. "Constructive theory of functions – 2013", Sozopol, June 9–15, 2013 (to appear).
2. L. Mitáš, H. Mitášová, General variational approach to the interpolation problem, Comput. Math. Applic. 16 (12) (1988), 983–992.
3. C.A. Micchelli, Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions, Constr. Approx. 2 (1986), 11–22.
4. H. Wendland, "Scattered Data Approximation", Cambridge Monographs on Appl. and Comput. Math., Vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
5. Abramowitz, M. et Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover. Publications, New York, 1965.
6. R.N. Rohling, A.H. Gee, L. Berman, Radial basis function interpolation for 3-D ultrasound. Technical report CUED/F-INFENG/TR 327, Cambridge University Department of Engineering, 1998.
7. Boost C++ Libraries. URL: http://www.boost.org (дата обращения: 01.09.2013).